در جلسه قبل عنوان شد برای معادله PDE خطی با دو متغیر مستقل به فرم زیر:

$$a\varphi_{xx} + b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} + d\varphi_x + e\varphi_y + f\varphi = g(x,y) \qquad (1)$$

با تشکیل $\Delta = b^2 - 4ac$، معادله PDE از نظر ریاضی، سه حالت زیر را دارد:

- $\Delta > 0$: در این حالت، معادله دو منحنی مشخصه حقیقی دارد. با این شرط، معادله، هذلولوی یا Hyperbolic نامیده می شود.
- $\Delta = 0$: در این حالت، معادله یک منحنی مشخصه حقیقی دارد. با این شرط، معادله، سهموی یا Parabolic نامیده می شود.
- $\Delta < 0$: در این حالت، معادله منحنی مشخصه حقیقی ندارد. با این شرط، معادله، بیضوی یا Elliptic نامیده می شود.

در این جلسه می خواهیم در مورد فرم کانونی معادلات صحبت کنیم. می خواهیم معادله (1) را که در مختصات کارتزین (x,y) است، به مختصات (ς,η) ببریم (به این کار mapping گفته می شود). خواهیم دید این کار اگر به درستی انجام شود، بسته به نوع معادله (هذلولوی، سهموی و بیضوی) می تواند منجر به ساده شدن شکل معادله گردد. فرم جدید حاصله را که مطلوب بوده و موجب سادگی شکل معادله می شود، فرم کانونی می نامند. پس از حل معادله در فضای جدید، می توان پاسخ ها را مجدداً به فضای (x,y) انتقال داد. این روش لزوماً در مورد تمامی معادلات کارآمد نیست. همچنین، mapping منحصر به فرد نیست، و می توان تعداد زیادی mapping در نظر گرفت، اما آن mapping مطلوب است که شکل معادله را ساده تر کند و فرم کانونی را ایجاد کند.

اولین نکته ای که در مورد mapping باید مورد توجه قرار گیرد، آن است که نوع معادله تغییر نکند، یعنی معادله ای که در فضای (x,y) هذلولوی است، در فضای (ς,η) نیز هذلولوی باقی بماند.

دومین شرط این است که mapping دارای تکینگی (singularity) نبوده و همچنین حقیقی نیز باشد.

از ریاضیات مقدماتی به خاطر داریم در mapping از فضای (x,y) به فضای (ς,η)، ژاکوبین به صورت زیر تعریف می شود:

$$J = \begin{vmatrix} \varsigma_x & \varsigma_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

شرط عدم تکینگی (non singular) بودن آن است که $J \neq 0$ باشد.

چون قرار است معادله (1) را که در فضای $(x\,,y)$ است را به فضای (ς,η) ببریم، لذا در ابتدا باید مشتقات جزئی معادله (1) را با قاعده زنجیره ای بر حسب (ς,η) بنویسیم. داریم:

$$\varphi_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}\frac{\partial\varsigma}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\varsigma_x\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\varsigma_x\varphi_\varsigma+\eta_x\varphi_\eta$$

$$\varphi_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}\frac{\partial\varsigma}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\varsigma_y\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\varsigma_y\varphi_\varsigma+\eta_y\varphi_\eta$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varsigma_x\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=\varsigma_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\varsigma_x\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\eta_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\
&=\varsigma_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\varsigma_x\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\varsigma_x\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\eta_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varsigma_x\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\\
&=\varsigma_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\varsigma_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma^2}+\varsigma_x\eta_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\varsigma_x\eta_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\\
&=\varsigma_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma^2}+2\varsigma_x\eta_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\varsigma_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\\
&=\varsigma_x^2\varphi_{\varsigma\varsigma}+2\varsigma_x\eta_x\varphi_{\varsigma\eta}+\eta_x^2\varphi_{\eta\eta}+\varsigma_{xx}\varphi_\varsigma+\eta_{xx}\varphi_\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{yy}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varsigma_y\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=\varsigma_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\varsigma_y\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\eta_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\
&=\varsigma_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\varsigma_y\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\varsigma_y\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\eta_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varsigma_y\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\\
&=\varsigma_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\varsigma_y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma^2}+\varsigma_y\eta_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\varsigma_y\eta_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\\
&=\varsigma_y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma^2}+2\varsigma_y\eta_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\varsigma_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\\
&=\varsigma_y^2\varphi_{\varsigma\varsigma}+2\varsigma_x\eta_y\varphi_{\varsigma\eta}+\eta_y^2\varphi_{\eta\eta}+\varsigma_{yy}\varphi_\varsigma+\eta_{yy}\varphi_\eta
\end{aligned}$$

به طریق مشابه داریم:

$$\varphi_{xy}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\varsigma_x\varsigma_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma^2}+\left(\varsigma_x\eta_y+\varsigma_y\eta_x\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varsigma\partial\eta}+\eta_x\eta_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\varsigma_{xy}\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}+\eta_{xy}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$$
$$=\varsigma_x\varsigma_y\varphi_{\varsigma\varsigma}+\left(\varsigma_x\eta_y+\varsigma_y\eta_x\right)\varphi_{\varsigma\eta}+\eta_x\eta_y\varphi_{\eta\eta}+\varsigma_{xy}\varphi_\varsigma+\eta_{xy}\varphi_\eta$$

اگر روابط بدست آمده را در معادله (1) جایگذاری کنیم، فرم جدید معادله (1) به صورت زیر خواهد بود:

$$A\varphi_{\varsigma\varsigma}+B\varphi_{\varsigma\eta}+C\varphi_{\eta\eta}+D\varphi_\varsigma+E\varphi_\eta+F\varphi=G\left(\varsigma,\eta\right)\qquad(2)$$

که ضرایب A تا F و G به صورت زیر خواهد بود:

$$A=a\varsigma_x^2+b\varsigma_x\varsigma_y+c\varsigma_y^2$$
$$B=2a\varsigma_x\eta_x+b\varsigma_x\eta_y+b\varsigma_y\eta_x+2c\varsigma_y\eta_y$$
$$C=a\eta_x^2+b\varsigma_x\eta_y+c\eta_y^2$$
$$D=a\varsigma_{xx}+b\varsigma_{xy}+c\varsigma_{yy}+d\varsigma_x+e\varsigma_y$$
$$E=a\eta_{xx}+b\eta_{xy}+c\eta_{yy}+d\eta_x+e\eta_y$$
$$F=f$$
$$G=g$$

اگر برای معادله شماره (2)، Δ را محاسبه کنیم، می توانیم ثابت کنیم که بین دلتای معادله (1) و (2) رابطه زیر برقرار است:

$$B^2-4AC=J^2\left(b^2-4ac\right)$$

چون فرض کرده بودیم ژاکوبین باید مخالف صفر باشد، مطابق رابطه فوق مشاهده می کنیم، در شکل جدید معادله در فضای (ς,η)، نوع معادله عوض نمی شود، یعنی معادله هذلولوی به صورت هذلولوی، معادله سهموی به صورت سهموی و معادله بیضوی به صورت بیضوی باقی می ماند.

تا به اینجا، معادله (2) نسبت به معادله (1) ساده تر نشده است. لذا با تکنیک هایی متناسب با نوع معادله (هذلولوی، سهموی و بیضوی)، ساده سازی ها را معرفی می کنیم.

الف) معادله هذلولوی

این معادله به دلیل اینکه دو منحنی مشخصه حقیقی دارد، دو فرم کانونی معروف به شکل زیر خواهد داشت:

$$\varphi_{\varsigma\varsigma}-\varphi_{\eta\eta}=h_1\left(\varphi_\varsigma,\varphi_\eta,\varphi,\varsigma,\eta\right)$$
$$\varphi_{\varsigma\eta}=h_2\left(\varphi_\varsigma,\varphi_\eta,\varphi,\varsigma,\eta\right)$$

ب) معادله سهموی

این معادله به دلیل اینکه یک منحنی مشخصه حقیقی دارد، یک فرم کانونی معروف به شکل زیر (دو حالت) خواهد داشت:

$$\varphi_{\varsigma\varsigma} = h_3\left(\varphi_\varsigma, \varphi_\eta, \varphi, \varsigma, \eta\right)$$
$$or$$
$$\varphi_{\eta\eta} = h_4\left(\varphi_\varsigma, \varphi_\eta, \varphi, \varsigma, \eta\right)$$

ج) معادله بیضوی

این معادله یک فرم کانونی معروف به شکل زیر خواهد داشت:

$$\varphi_{\varsigma\varsigma} + \varphi_{\eta\eta} = h_5\left(\varphi_\varsigma, \varphi_\eta, \varphi, \varsigma, \eta\right)$$

حال به دنبال تکنیک هایی هستیم تا بتوانیم معادله (2) را با توجه به نوع آن (هذلولوی، سهموی و بیضوی) به فرم کانونی معروف مربوط به معادله تبدیل کنیم. در این صورت معادله (2) به فرم کانونی در آمده و لذا حل آن ساده تر خواهد بود. ابتدا از معادلات هذلولوی شروع می کنیم.

- معادلات هذلولوی

به خاطر داریم که در این معادله، دلتا دو ریشه حقیقی دارد. چنانچه این دو را λ_1 و λ_2 بنامیم، دو منحنی مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \lambda_1 = \dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow y - \lambda_1 x = K_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = \lambda_2 = \dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow y - \lambda_2 x = K_2 \end{cases}$$

الف) یک تکنیک آن است که ς و η را دقیقاً برابر با معادلات منحنی مشخصه فوق انتخاب کنیم، یعنی:

$$\begin{cases} \varsigma = y - \lambda_1 x \\ \eta = y - \lambda_2 x \end{cases}$$

بر اساس انتخاب فوق، مقادیر A تا E را در معادله (2) تعیین می کنیم:

$$A = a\varsigma_x^2 + b\varsigma_x\varsigma_y + c\varsigma_y^2 = a(-\lambda_1)^2 + b(-\lambda_1)(1) + c(1) = a\lambda_1^2 - b\lambda_1 + c$$
$$B = 2a\varsigma_x\eta_x + b\varsigma_x\eta_y + b\varsigma_y\eta_x + 2c\varsigma_y\eta_y = 2a\lambda_1\lambda_2 + b(-\lambda_1 - \lambda_2) + 2c$$
$$C = a\eta_x^2 + b\varsigma_x\eta_y + c\eta_y^2 = a\lambda_1^2 - b\lambda_2 + c$$
$$D = a\varsigma_{xx} + b\varsigma_{xy} + c\varsigma_{yy} + d\varsigma_x + e\varsigma_y = -d\lambda_1 + e$$
$$E = a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y = -d\lambda_2 + e$$
$$F = f$$
$$G = g$$

اگر در روابط فوق، قرار دهیم $\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $\lambda_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$، خواهیم دید که A و C برابر با صفر خواهد شد. (ثابت کنید). بنابراین از مشتقات مرتبه دوم، فقط $\varphi_{\varsigma\eta}$ باقی می ماند و عملاً با این روش، به فرم کانونی دوم معادلات هذلولوی می رسیم.

مثال: فرم کانونی معادله زیر را به دست آورید.

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$$

ابتدا نوع معادله را تعیین می کنیم:

$$\begin{matrix} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{matrix} \rightarrow b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 \rightarrow hyperbolic \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{5+3}{8} = 1 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varsigma = y - x \\ \eta = y - \dfrac{1}{4}x \end{cases}$$

ضرایب A تا E را محاسبه می کنیم. (می دانیم A و C برابر با صفر است):

$$A = a\lambda_1^2 - b\lambda_1 + c = 0$$
$$B = 2a\lambda_1\lambda_2 + b\left(-\lambda_1 - \lambda_2\right) + 2c = -\frac{9}{4}$$
$$C = a\lambda_1^2 - b\lambda_2 + c = 0$$
$$D = -d\lambda_1 + e = 0$$
$$E = -d\lambda_2 + e = \frac{3}{4}$$
$$F = f = 0$$
$$G = g = 2$$

بنابراین معادله (2) برای این مثال به فرم زیر در می آید:

$$-\frac{9}{4}u_{\varsigma\eta} + \frac{3}{4}u_\eta = 2 \rightarrow u_{\varsigma\eta} = \frac{1}{3}u_\eta - \frac{8}{9}$$

مشاهده می کنیم این فرم از معادله شکلی به مراتب ساده تر از معادله اصلی داشته و حل آن راحت تر است.

ب) برای یافتن شکل اول معادله کانونی، باید برای ς و η معادلات جدیدی یافت. برای رسیدن به فرم کانونی اول، باید کاری کنیم تا B=0 شود. به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases} \bar{\varsigma} = \dfrac{\varsigma + \eta}{2} = \dfrac{\left(y - \lambda_1 x\right) + \left(y - \lambda_2 x\right)}{2} = y - \dfrac{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)}{2}x \\ \bar{\eta} = \dfrac{\varsigma - \eta}{2} = \dfrac{\left(y - \lambda_1 x\right) - \left(y - \lambda_2 x\right)}{2} = \dfrac{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}{2}x \end{cases}$$

با این متغیرها، B برابر با صفر خواهد شد. برای نمونه، چنانچه از متغیرهای فوق در مثال قبلی استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \bar{\varsigma} = y - \dfrac{\left(1 + 1/4\right)}{2}x = y - \dfrac{5}{8}x \\ \bar{\eta} = \dfrac{\left(1/4 - 1\right)}{2}x = -\dfrac{3}{8}x \end{cases}$$

با جاگذاری به رابطه زیر خواهیم رسید (اثبات کنید):

$$u_{\bar{\varsigma}\bar{\varsigma}} - u_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = \frac{1}{3}u_{\bar{\varsigma}} - \frac{1}{3}u_{\bar{\eta}} - \frac{8}{9}$$

- معادلات سهموی

در این معادله، دلتا صفر است. مشابه حالت قبلی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a} = \lambda_1 \to y - \lambda_1 x = K_1$$

در اینجا، عملاً یک λ وجود دارد که آن را λ_1 می نامیم. λ_2 را طوری انتخاب می کنیم که ژاکوبین صفر نشود. لذا شکل کلی به صورت قبلی خواهد بود:

$$\begin{cases} \varsigma = y - \lambda_1 x \\ \eta = y - \lambda_2 x \end{cases}$$

مثال: فرم کانونی معادله زیر را به دست آورید.

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

$$\begin{matrix} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{matrix} \Rightarrow b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0 \to parabolic \Rightarrow \lambda = \frac{b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \to \frac{dy}{dx} = -2 \to y = -2x + K_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varsigma = y + 2x \\ \eta = y \end{cases}$$

برای معادله دوم $\eta = y$ را انتخاب می کنیم. فقط مهم است که ژاکوبین صفر نشود. لذا آن را بررسی می کنیم.

$$J = \begin{vmatrix} \varsigma_x & \varsigma_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

پس انتخاب، صحیح است. در این جا باید مقادیر A تا G را بیابیم. داریم:

$$a = 1, b = -4, c = 4, d = 0, e = 0, f = 0, g = e^y$$

$$A = a\varsigma_x^2 + b\varsigma_x\varsigma_y + c\varsigma_y^2 = 0$$
$$B = 2a\varsigma_x\eta_x + b\varsigma_x\eta_y + b\varsigma_y\eta_x + 2c\varsigma_y\eta_y = 0$$
$$C = a\eta_x^2 + b\varsigma_x\eta_y + c\eta_y^2 = 4$$
$$D = a\varsigma_{xx} + b\varsigma_{xy} + c\varsigma_{yy} + d\varsigma_x + e\varsigma_y = 0$$
$$E = a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y = 0$$
$$F = 0$$
$$G = e^y$$

با جاگذاری داریم:

$$4u_{\eta\eta} = e^y \rightarrow u_{\eta\eta} = \frac{1}{4}e^y$$