معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (Partial Differential Equations-PDEs)

معادله ای که شامل متغیر وابسته (تابع مجهول)، متغیرهای مستقل و یک سری مشتقات جزئی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل هستند، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می شود.

$$f\left(x, y, \ldots, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \ldots, \varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \ldots\right)=0$$

متغیرهای مستقل $x, y \rightarrow$

متغیر وابسته $\varphi \rightarrow$

مشتقات جزئی $\varphi_x, \varphi_y, \ldots, \varphi_{xx}, \varphi_{yy} \rightarrow$

اکثر معادلات حاکم بر پدیده های مکانیک سیالات و انتقال حرارت PDE مرتبه ۲ هستند.

چنانچه متغیر وابسته تنها تابعی از یک متغیر مستقل باشد و یا مشتق جزئی فقط تابعی از یک متغیر مستقل باشد، در آن صورت معادله دیفرانسیل، معمولی یا ODE (Ordinary Differential Equation) نامیده می شود و شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$f\left(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots\right)=0$$
$$f\left(x, y, \ldots, \varphi, \varphi_y, \varphi_{yy}, \varphi_{yyy}, \ldots\right)=0$$

معادلات ODE ممکن است حل تحلیلی داشته باشند ولی معادلات PDE جز در شرایط خاص حل تحلیلی ندارند.

در معادلات PDE، مرتبه معادله، عبارت است از بالاترین مرتبه مشتق جزئی. معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_x+\varphi_y+y\,\varphi=0 \qquad (1)$$
$$\left(\varphi_{xx}\right)^3+\varphi_{xy}+\varphi\varphi_{yy}=0 \qquad (2)$$
$$\varphi\varphi_{xx}+\varphi\varphi_x+\varphi_y=0 \qquad (3)$$

هر سه معادله فوق PDE بوده و معادله اول از مرتبه ۱ و معادلات ۲ و ۳ از مرتبه ۲ می باشند.

تقسیم بندی معادلات PDE

- خطی linear
- شبه خطی quasi linear
- غیر خطی non linear

در CFD معادلات شبه خطی و غیر خطی رفتار یکسانی دارند. با این حال، سه معادله فوق را تعریف می کنیم.

معادله خطی: معادله ای که در آن، ضریب تمام مشتقات جزئی و متغیر وابسته، ثابت و یا متغیر مستقل باشد. چون در سیالات و انتقال حرارت عملاً با معادلات PDE مرتبه ۲ سر و کار داریم، تعاریف را بر اساس معادلات مرتبه ۲ بیان می کنیم:

$$a\varphi_{xx} + b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} + d\varphi_x + e\varphi_y + f\varphi = g(x,y) \qquad (1)$$

برای خطی بودن معادله فوق، می بایست a,b,c,...,f یا ثابت بوده و یا تابعی از x و y باشد.

معادله شبه خطی: در ضرایب a,b,c,...,f توابعی از $\varphi, \varphi_x, \varphi_y$ وجود داشته باشد. (در حالت کلی ضرایب مذکور می تواند مشتق جزئی از مرتبه پایین تر از مرتبه معادله باشد).

معادله غیر خطی: در ضرایب a,b,c,...,f توابعی از $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ وجود داشته باشد.

تقسیم بندی دیگری از معادلات PDE

- همگن: اگر در معادله (1) $g(x,y)=0$ باشد
- ناهمگن: اگر در معادله (1)، $g(x,y)\neq 0$ باشد

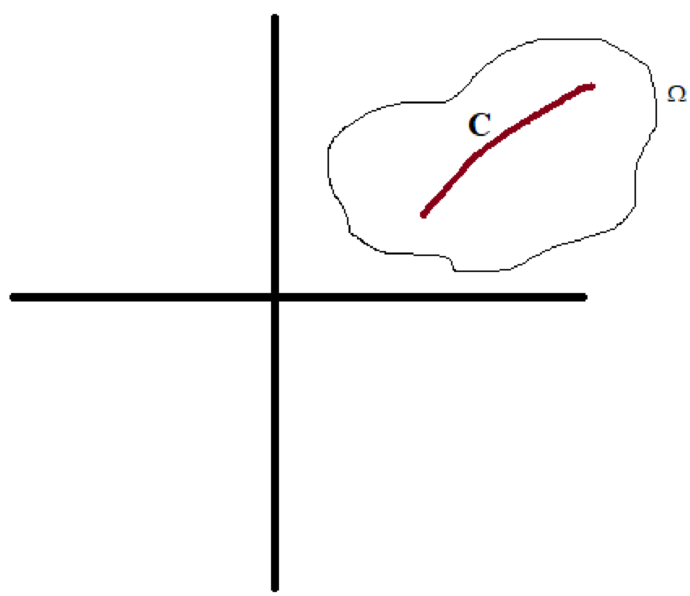
معادله مهم مکانیک سیالات یعنی معادله ناویر- استوکس، یک معادله PDE مرتبه ۲ غیر خطی است.

تقسیم بندی معادلات از نظر ریاضی

برای تقسیم بندی معادلات، لازم است منحنی مشخصه معادله PDE را بیابیم. معادله (1) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$a\varphi_{xx}+b\varphi_{xy}+c\varphi_{yy}=-\left(d\,\varphi_x+e\varphi_y+f\,\varphi-g\right)=H \qquad (2)$$

حل PDE فوق، همواره در یک ناحیه بسته انجام می شود. اگر این ناحیه را مطابق شکل زیر، Ω بنامیم، یک منحنی مشخصه به نام C داخل این ناحیه می توان در نظر گرفت که روی آن، φ_{xx} و مشتقات درجه ۲ پیوسته نیست. این منحنی مشخصه می تواند داخل ناحیه و یا روی مرز باشد.



فرض می کنیم روی منحنی مشخصه، پارامتری به نام τ داریم به نحوی که، $x=x(\tau)$ و $y=y(\tau)$. با این فرض، معادله (2) را می خواهیم بر حسب متغیر جدید τ بنویسیم. نامگذاری های زیر را انجام می دهیم:

$$\varphi_x=p(\tau);$$
$$\varphi_y=q(\tau);$$
$$\varphi_{xx}=u(\tau);$$
$$\varphi_{xy}=v(\tau);$$
$$\varphi_{yy}=w(\tau).$$

بنابراین معادله (2) به صورت زیر در می آید:

$$au(\tau)+bv(\tau)+cw(\tau)=-\left(d\varphi_x+e\varphi_y+f\varphi-g\right)=H \qquad (3)$$

$$\frac{dp}{d\tau}=\frac{d\varphi_x}{dx}\frac{dx}{d\tau}+\frac{d\varphi_x}{dy}\frac{dy}{d\tau}=u\frac{dx}{d\tau}+v\frac{dy}{d\tau} \qquad (4)$$

$$\frac{dq}{d\tau}=\frac{d\varphi_y}{dx}\frac{dx}{d\tau}+\frac{d\varphi_y}{dy}\frac{dy}{d\tau}=v\frac{dx}{d\tau}+w\frac{dy}{d\tau} \qquad (5)$$

اگر معادلات فوق را به صورت دستگاه معادلات در نظر گرفته و آن را به فرم ماتریسی بنویسیم، در آن صورت، صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب، نشان از حالتی دارد که مشتقات مرتبه دوم در آن پیوسته نیست. داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H \\ \frac{dp}{d\tau} \\ \frac{dq}{d\tau} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{vmatrix}=0 \rightarrow a\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2-b\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\left(\frac{dy}{d\tau}\right)+c\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2=0$$

$$\rightarrow ady^2-bdxdy+cdx^2=0$$

با تعریف $h=\frac{dy}{dx}$، معادله نهایی به فرم زیر در می آید:

$$ah^2dx^2-bhdx^2+cdx^2=0$$

$$ah^2-bh+c=0$$

$$h=\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مشاهده می کنیم که h و مقدار و به تبع آن، رفتارش، به مقدار Δ وابسته است. بنابراین، سه حالت ذیل را می توان متصور شد:

- $\Delta > 0$: در این حالت، معادله دو منحنی مشخصه حقیقی دارد. با این شرط، معادله، هذلولوی یا Hyperbolic نامیده می شود.
- $\Delta = 0$: در این حالت، معادله یک منحنی مشخصه حقیقی دارد. با این شرط، معادله، سهموی یا Parabolic نامیده می شود.
- $\Delta < 0$: در این حالت، معادله منحنی مشخصه حقیقی ندارد. با این شرط، معادله، بیضوی یا Elliptic نامیده می شود.

فلسفه نامگذاری معادلات به صورت فوق، این است که با رسم منحنی معادلات، به شکل هایی مشابه شکل های فوق می رسیم.

چند مثال:

الف) معادله لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$a = 1, b = 0, c = 1$$
$$\Delta = 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow Elliptic$$

ب) معادله انتقال حرارت یک بعدی

$$u_{xx} = u_t$$
$$a = 1, b = 0, c = 0;$$
$$\Delta = 0 \rightarrow Parabolic$$

ج) معادله موج

$$u_{xx} = u_{tt}$$
$$a = 1, b = 0, c = -1;$$
$$\Delta = 4 \rightarrow Hyperbolic$$
$$\frac{dt}{dx} = \pm 1$$

د)

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$
$$a = y^2, b = 0, c = -x^2;$$
$$\Delta = 4x^2 y^2 \rightarrow \begin{cases} x, y = 0 \rightarrow parabolic \\ x, y \neq 0 \rightarrow hyperbolic \end{cases}$$

در مثال فوق، مشخص می شود که یک معادله PDE می تواند بر حسب مقادیر x و y رفتار متفاوتی داشته باشد. مثلاً اگر معادله فوق در منحنی بسته تعریف شده باشد، در محل برخورد منحنی با محورهای مختصات و نیز مبدأ، معادله رفتار سهموی و در سایر نقاط رفتار هذلولوی از خود نشان می دهد.