فصل ۷- سیستم های جابجایی طبیعی Natural Convection Systems

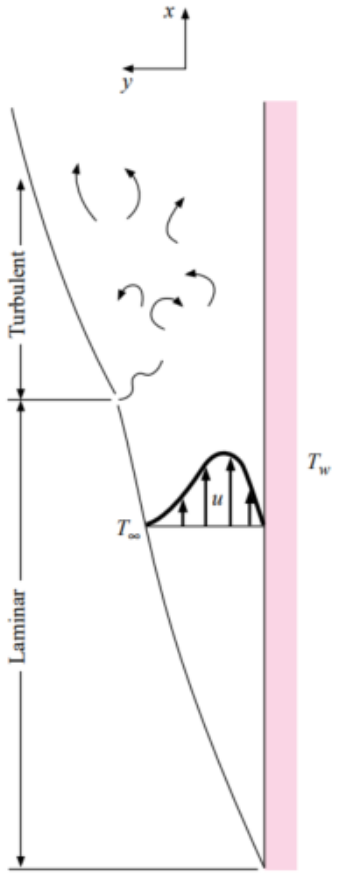
در درس انتقال حرارت ۱، در بحث انتقال حرارت جابجایی، به سیستم های انتقال حرارت جابجایی اجباری (Forced Convection Systems) پرداخته شد. در سیستم های مذکور، سیال در مجاورت و یا داخل سطوح انتقال گرما، به صورت اجباری و تحت نیروی اعمال شده به سیال توسط پمپ و فن و ... به جریان در می آید.

در جابجایی آزاد یا طبیعی، حرکت سیال در اثر نیروی شناوری ناشی از تغییرات چگالی سیال در اثر انتقال حرارت است. به عبارت دقیق تر، در این مکانیزم، چگالی سیال مجاور سطح گرم کاهش یافته و نیروی شناوری موجب جریان سیال می شود.

وجود یک میدان نیروی خارجی مثل میدان گرانش برای ایجاد نیروهای شناوری ضروری است. از مکانیک سیالات به خاطر داریم که نیروهای وارد بر سیال به دو گروه نیروهای سطحی (surface force) و نیروهای حجمی (body force) تقسیم می شوند.

توجه به این نکته ضروری است که نیروی حجمی الزاماً گرانش نیست. مثلاً وقتی سیال داخل یک ماشین دوار، تحت تأثیر نیروی گریز از مرکز (Centrifugal force) قرار می گیرد، این نیرو نیز حجمی است و چنانچه داخل این ماشین، در مجاورت سطوح غیر همدما با خود قرار گیرد، نیروی شناوری به وجود خواهد آمد.

مطابق شکل با گرم شدن صفحه و رسیدن به دمای T_w، یک لایه مرزی جابجایی آزاد تشکیل می شود.
پروفیل سرعت در این حالت، با پروفیل سرعت در لایه مرزی جابجایی اجباری متفاوت است، به این ترتیب که سرعت از مقدار صفر در دیواره به دلیل شرط عدم لغزش، به یک مقدار ماکزیمم رسیده و مجدداً در لبه لایه مرزی، به صفر می رسد.
مشابه لایه مرزی جابجایی اجباری، لایه مرزی می تواند آرام (laminar)، انتقالی (transition region) و یا آشفته (turbulent) باشد.



در ادامه به دنبال رابطه ای هستیم که طبق آن بتوانیم نرخ انتقال حرارت از دیواره را به دست آوریم. اما می دانیم در انتقال حرارت جابجایی، به دلیل حرکت سیال، عملاً معادلات حرکت نیز در رویکرد مورد نظر دخیل خواهند بود. پس باید معادلات ممنتوم و

انرژی در هر دو فرم دیفرانسیلی و انتگرالی استخراج و محاسبه گردد تا نهایتاً به فرمول نرخ انتقال حرارت برسیم. توجه داریم که هندسه کنونی، ساده ترین هندسه ممکن است.

معادله دیفرانسیل حرکت لایه مرزی

این معادله، دقیقاً مشابه معادله لایه مرزی اجباری است و تنها تفاوت آن، اضافه شدن وزن المان سیال است. داریم:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{[7-1]}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_\infty g \qquad \textbf{[7-2]}$$

معادله فوق بیانگر این است که گرادیان فشار در جهت x، ناشی از تغییر در ارتفاع است.

با ترکیب دو معادله فوق داریم:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=g(\rho_\infty-\rho)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{[7-3]}$$

می توان اختلاف چگالی ها را به ضریب انبساط حجمی β ارتباط داد:

$$\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{V_\infty}\frac{V-V_\infty}{T-T_\infty}=\frac{\rho_\infty-\rho}{\rho(T-T_\infty)}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=g\rho\beta(T-T_\infty)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{[7-4]}$$

رابطه فوق، معادله دیفرانسیلی حرکت لایه مرزی جابجایی آزاد است. اگر معادله فوق حل شود، میدان سرعت به دست خواهد آمد. اما مشاهده می کنیم که در سمت راست معادله، دمای T نیز وجود دارد. پس اول باید T را تعیین کنیم تا میدان سرعت قابل دستیابی باشد. از این رو باید معادله انرژی را نیز لحاظ کنیم. این معادله دقیقاً مشابه معادله انرژی لایه مرزی جابجایی اجباری و فرضیات مربوطه است. داریم:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \textbf{[7-5]}$$

مقدار β از جداول به دست می آید و برای گاز ایده آل، معکوس دمای مطلق است.

تمرین ۱- مورد فوق را ثابت کنید.

مشابه استدلالات جابجایی اجباری (مشهور به معادله انتگرال ممنتوم فون کارمن)، چون حل معادلات فوق، مستلزم اعمال شرایط مرزی است و باید δ معلوم باشد، ناچاراً به سراغ معادلات انتگرالی ممنتوم و انرژی می رویم.

با در نظر گرفتن المان حجمی و نوشتن جملات معادله ممنتوم به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2\, dy\right) = -\tau_w + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\, dy$$
$$= -\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\, dy \qquad \textbf{[7-6]}$$

در معادله فوق، اگر یک رابطه برای سرعت و یک رابطه برای دما به دست آوریم، تنها مجهول مسأله، ضخامت لایه مرزی δ خواهد بود.

شرط مرزی دما:

$$T = T_w \quad \text{at } y = 0$$
$$T = T_\infty \quad \text{at } y = \delta$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \delta$$

با توجه به داشتن سه شرط مرزی، پروفیل مرتبه ۲ برای دما می توان به دست آورد:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad \textbf{[7-7]}$$

به طور مشابه برای سرعت، سه شرط مرزی عبارت است از:

$$u = 0 \quad \text{at } y = 0$$
$$u = 0 \quad \text{at } y = \delta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \delta$$

برای سرعت، می توان شرط مرزی چهارم نیز داشت، اگر مجدد به معادله ۷-۴ نگاه کنیم،

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = g\rho\beta(T - T_\infty) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{[7-4]}$$

می بینیم در $y=0$،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\beta\frac{T_w - T_\infty}{\nu} \quad \text{at } y = 0$$

در جابجایی اجباری، به دلیل وجود u_∞ گفته می شد که شکل پروفیل u/u_∞، با y/δ تناسب دارد. اینجا u_∞ برابر با صفر است و لذا نمی توان دقیقاً مشابه قبلی رفتار کرد. با ۴ شرط مرزی و فرض اینکه پروفیل سرعت در xهای مختلف از نظر هندسی تشابه داشته و فرض تعریف سرعت به صورت حاصلضرب چند جمله ای بر حسب y در توابعی بر حسب x، داریم:

$$\frac{u}{u_x} = a + by + cy^2 + dy^3$$

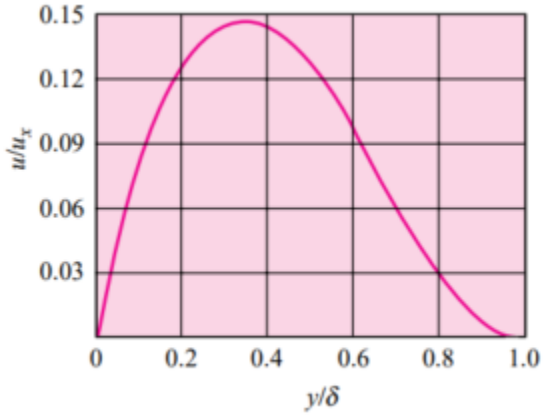
در رابطه فوق، u_x یک سرعت ساختگی بر حسب x است. با معادله فوق و ارضای ۴ شرط مرزی سرعت، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\frac{u}{u_x} = \frac{\beta\delta^2 g(T_w - T_\infty)}{4u_x\nu}\frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

تمرین ۲- رابطه فوق را ثابت کنید.

اگر در رابطه فوق، جملات اولین عبارت سمت راست را به گونه ای در تابع u_x در نظر بگیریم که عبارت ساده تر شود، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad \textbf{[7-8]}$$



از نمودار فوق، چه نتایجی می گیرید؟

با جایگزینی معادلات پروفیل سرعت (۷-۸) و پروفیل دما (۷-۷) در معادله انتگرالی حرکت لایه مرزی (۷-۶)، به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم:

$$\frac{1}{105}\frac{d}{dx}(u_x^2\delta) = \frac{1}{3}g\beta(T_w - T_\infty)\delta - \nu\frac{u_x}{\delta} \qquad \textbf{[7-9]}$$

تمرین ۳- رابطه فوق را ثابت کنید.

مشابه جابجایی اجباری، معادله انرژی را به فرم انتگرالی می نویسیم:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta} u(T-T_\infty)dy\right] = -\alpha \left.\frac{dT}{dy}\right]_{y=0} \qquad \textbf{[7-10]}$$

با جاگذاری عبارات سرعت و دما در معادله فوق، به عبارت زیر می رسیم:

$$\frac{1}{30}(T_w - T_\infty)\frac{d}{dx}(u_x\delta) = 2\alpha\frac{T_w - T_\infty}{\delta} \qquad \textbf{[7-11]}$$

مطابق استدلالی که در معادله (۷-۸) برای ساده سازی عبارت سرعت داشتیم، می توانیم بنویسیم:

$$u_x \sim \delta^2 \qquad \textbf{[7-12]}$$

با جاگذاری این رابطه در معادله (۷-۹) به نتیجه زیر می رسیم:

$$u_x = C_1 x^{1/2} \qquad \textbf{[7-14]}$$

$$\delta = C_2 x^{1/4} \qquad \textbf{[7-15]}$$

با جاگذاری دو عبارت فوق در معادلات (۷-۹) و (۷-۱۱) به دو رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{5}{420}C_1^2 C_2 x^{1/4} = g\beta(T_w - T_\infty)\frac{C_2}{3}x^{1/4} - \frac{C_1}{C_2}\nu x^{1/4} \qquad \textbf{[7-16]}$$

$$\frac{1}{40}C_1 C_2 x^{-1/4} = \frac{2\alpha}{C_2}x^{-1/4} \qquad \textbf{[7-17]}$$

با حل دو معادله فوق، می توان مقادر C_1 و C_2 را به صورت زیر به دست آورد:

$$C_1 = 5.17\nu\left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{1/2} \qquad \textbf{[7-18]}$$

$$C_2 = 3.93\left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{1/4}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{-1/4}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2} \qquad \textbf{[7-19]}$$

عبارات نهایی برای ضخامت لایه مرزی و همین طور سرعت ساختگی، به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\delta}{x} = 3.93\,\mathrm{Pr}^{-1/2}(0.952 + \mathrm{Pr})^{1/4}\mathrm{Gr}_x^{-1/4} \qquad \textbf{[7-20}\boldsymbol{a}\textbf{]}$$

$$u_x \frac{x}{\nu} = 5.17(0.952 + \mathrm{Pr})^{-1/2} \mathrm{Gr}_x^{1/2} \qquad \textbf{[7-20b]}$$

در دو رابطه فوق، مشاهده می کنیم که دو عدد بدون بعد پرانتل و گراشف به کار رفته است که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$$

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$$

از انتقال حرارت ۱ می دانیم عدد پرانتل که در شاهکار نظریه لایه مرزی آقای لودویگ پرانتل در سال ۱۹۰۸ معرفی گردید، ویسکوزیته سینماتیکی و ضریب پخش را با هم مقایسه می کند. کاربرد این عدد در مقایسه ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی و لایه مرزی حرارتی است. به عبارت دیگر، این عدد، پخش اندازه حرکت و پخش حرارت را در جهت عمود بر جریان سیال مقایسه می کند.

عدد جدید بی بعدی که در اینجا دیده می شود، عدد گراشف است. این عدد معادل عدد رینولدز در جریان های اجباری بوده و مقایسه ای است بین نیروهای شناوری و لزجت. (به خاطر داریم که عدد رینولدز، مقایسه نیروهای اینرسی و لزجت بود). این عدد مشابه رینولدز، معیاری است برای انتقال از لایه مرزی آرام به لایه مرزی آشفته.

برای هوای مجاور صفحه تخت، گراشف بحرانی، حدود ۴۰۰ میلیون است. (رینولدز بحرانی برای صفحه افقی تخت حدود ۵۰۰ هزار است).

حال می رسیم به نکته ای که اول مبحث به دنبال آن بودیم و آن نرخ انتقال حرارت در اثر جابجایی آزاد. میدانیم انرژی حرارتی که از دیواره خارج می شود، به صورت جابجایی به سیال منتقل می شود. داریم:

$$q_w = -kA \left.\frac{dT}{dy}\right]_w = hA(T_w - T_\infty)$$

با استفاده از رابطه توزیع دما در معادله (۷-۷)، یعنی

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad \textbf{[7-7]}$$

به عبارات زیر می رسیم:

$$h = \frac{2k}{\delta} \qquad \text{or} \qquad \frac{hx}{k} = \mathrm{Nu}_x = 2\frac{x}{\delta}$$

در رابطه فوق، Nu_x، عدد بدون بعد ناسلت است که انتقال حرارت جابجایی و هدایتی را در مرز سیال و جامد مقایسه می کند.

اگر در رابطه فوق به جای δ مقدار آن را از معادله اول (۷-۲۰) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.508\,\mathrm{Pr}^{1/2}(0.952+\mathrm{Pr})^{-1/4}\mathrm{Gr}_x^{1/4} \qquad \textbf{[7-22]}$$

رابطه فوق، عدد ناسلت را بر حسب فاصله از لبه (x) در یک صفحه عمودی در جابجایی آزاد نشان می دهد.

مشاهده می کنیم که Nu_x تابعی از Pr و Gr است. پرانتل که به راحتی از جداول قرائت می شود. عدد گراشف نیز

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$$

تابعی از g، ضریب انبساط حجمی β، اختلاف دمای دیواره و سیال، ویسکوزیته سینماتیکی و x است. ثوابت از جداول مربوطه قرائت می شوند و اختلاف دما نیز در مسأله معلوم است. لذا Nu_x به راحتی قابل محاسبه است. با معلوم شدن Nu_x، مقدار h_x به دست می آید.

از آنجا که h در حالت کلی تابعی از x است، مرسوم است از مقدار متوسط h برای کل صفحه استفاده می شود. داریم:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx \qquad \textbf{[7-23]}$$

$$\bar{h} = \tfrac{4}{3} h_{x=L} \qquad \textbf{[7-24]}$$

تحلیل ارائه شده در فوق، برای هندسه ساده صفحه تخت عمودی است. برای هندسه ها و شرایط پیچیده تر، مشابه جابجایی اجباری، مراجعه به روابط تجربی اجتناب ناپذیر است.

انجام آزمایشات تجربی برای استخراج روابط تجربی در جابجایی آزاد، معمولاً دشوارتر از جابجایی اجباری است، زیرا به دلیل سرعت کم جریان، اندازه گیری سرعت خیلی مشکل است.

روابط تجربی جابجایی آزاد

در تحلیل صفحه تخت عمودی دیدیم که:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.508\,\mathrm{Pr}^{1/2}(0.952+\mathrm{Pr})^{-1/4}\mathrm{Gr}_x^{1/4} \qquad \textbf{[7-22]}$$

به عبارت دیگر، $Nu_x = f\left(Gr_x, \mathrm{Pr}\right)$. این رابطه در روابط تجربی نیز به دست آمده است. به عبارتی:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_f = C(\mathrm{Gr}_f\,\mathrm{Pr}_f)^m \qquad [7\text{-}25]$$

اندیس f در معادله فوق برگرفته از کلمه film به معنی لایه نازک است. اندیس f نشان می دهد که خواصی از سیال را که در جداول خواهیم خواند، باید در دمای فیلم که به صورت میانگین دمای صفحه و سیال به صورت زیر است، به دست آوریم:

$$T_f = \frac{T_\infty + T_w}{2}$$

یک عدد بی بعد مهم دیگر در جابجایی آزاد، از حاصلضرب دو عدد Gr و Pr به دست می آید و عدد رایلی Ra نام دارد:

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\ \mathrm{Pr} \qquad [7\text{-}26]$$

(به خاطر داریم در جابجایی اجباری، حاصلضرب Re در Pr، عدد بدون بعد پکله Pe است که مقایسه بین انتقال حرارت ناشی از حرکت سیال و انتقال حرارت ناشی از هدایت می باشد.)

ابعاد مشخصه

بعد مشخصه ای که باید در اعداد ناسلت و گراشف به کار گرفته شود، به شکل هندسی مسأله بستگی دارد. مثلاً برای صفحه عمودی، بعد مشخصه همان ارتفاع صفحه L است. برای استوانه افقی، بعد مشخصه، قطر d می باشد.

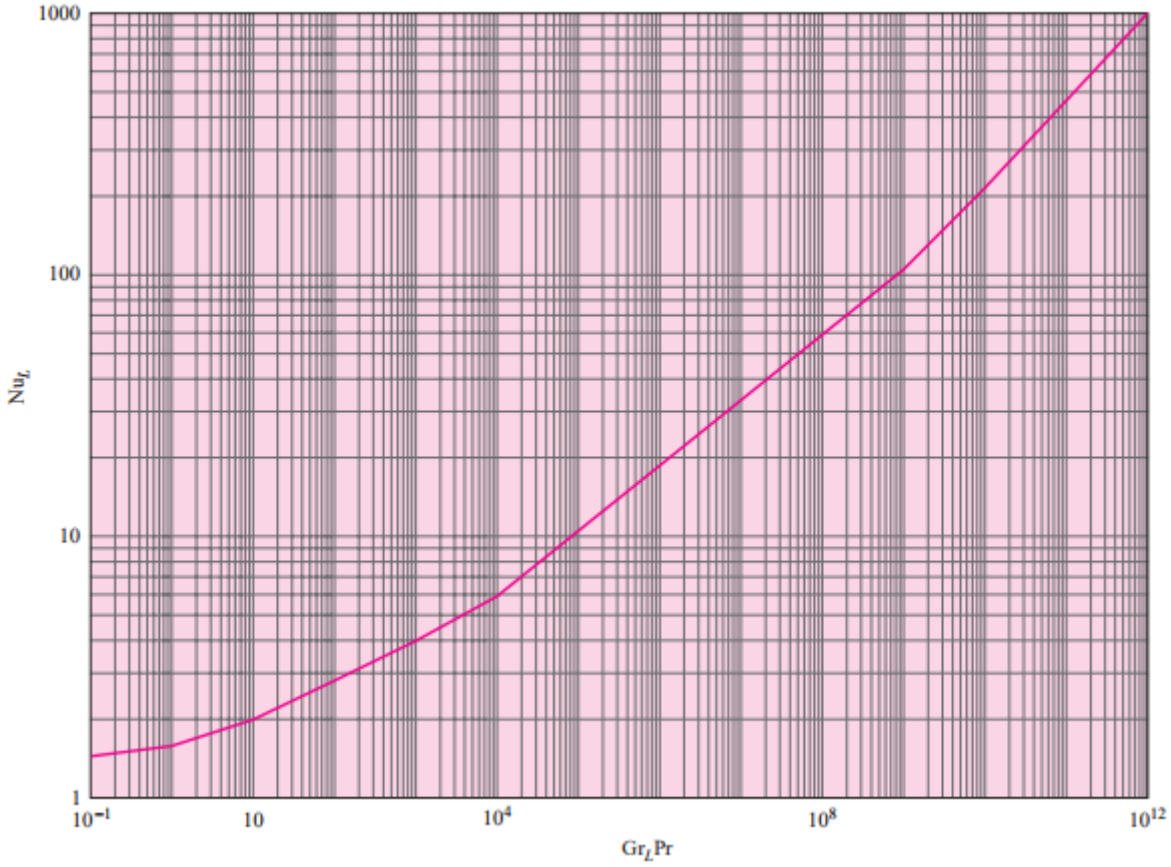
در معادله $\overline{Nu}_f = C\left(Gr_f\,\mathrm{Pr}_f\right)^m$، مقادیر با توجه به شکل هندسی به صورت خلاصه در جدول زیر آمده است:

Table 7-1 | Constants for use with Equation (7-25) for isothermal surfaces.

Geometry	$Gr_f\ Pr_f$	C	m	Reference(s)
Vertical planes and cylinders	10^{-1}–10^{4}	Use Fig. 7-5	Use Fig. 7-5	4
	10^{4}–10^{9}	0.59	$\frac{1}{4}$	4
	10^{9}–10^{13}	0.021	$\frac{2}{5}$	30
	10^{9}–10^{13}	0.10	$\frac{1}{3}$	22, 16†
Horizontal cylinders	0–10^{-5}	0.4	0	4
	10^{-5}–10^{4}	Use Fig. 7-6	Use Fig. 7-6	4
	10^{4}–10^{9}	0.53	$\frac{1}{4}$	4
	10^{9}–10^{12}	0.13	$\frac{1}{3}$	4
	10^{-10}–10^{-2}	0.675	0.058	76†
	10^{-2}–10^{2}	1.02	0.148	76†
	10^{2}–10^{4}	0.850	0.188	76
	10^{4}–10^{7}	0.480	$\frac{1}{4}$	76
	10^{7}–10^{12}	0.125	$\frac{1}{3}$	76
Upper surface of heated plates or lower surface of cooled plates	2×10^{4}–8×10^{6}	0.54	$\frac{1}{4}$	44, 52
Upper surface of heated plates or lower surface of cooled plates	8×10^{6}–10^{11}	0.15	$\frac{1}{3}$	44, 52
Lower surface of heated plates or upper surface of cooled plates	10^{5}–10^{11}	0.27	$\frac{1}{4}$	44, 37, 75
Vertical cylinder, height = diameter characteristic length = diameter	10^{4}–10^{6}	0.775	0.21	77
Irregular solids, characteristic length = distance fluid particle travels in boundary layer	10^{4}–10^{9}	0.52	$\frac{1}{4}$	78

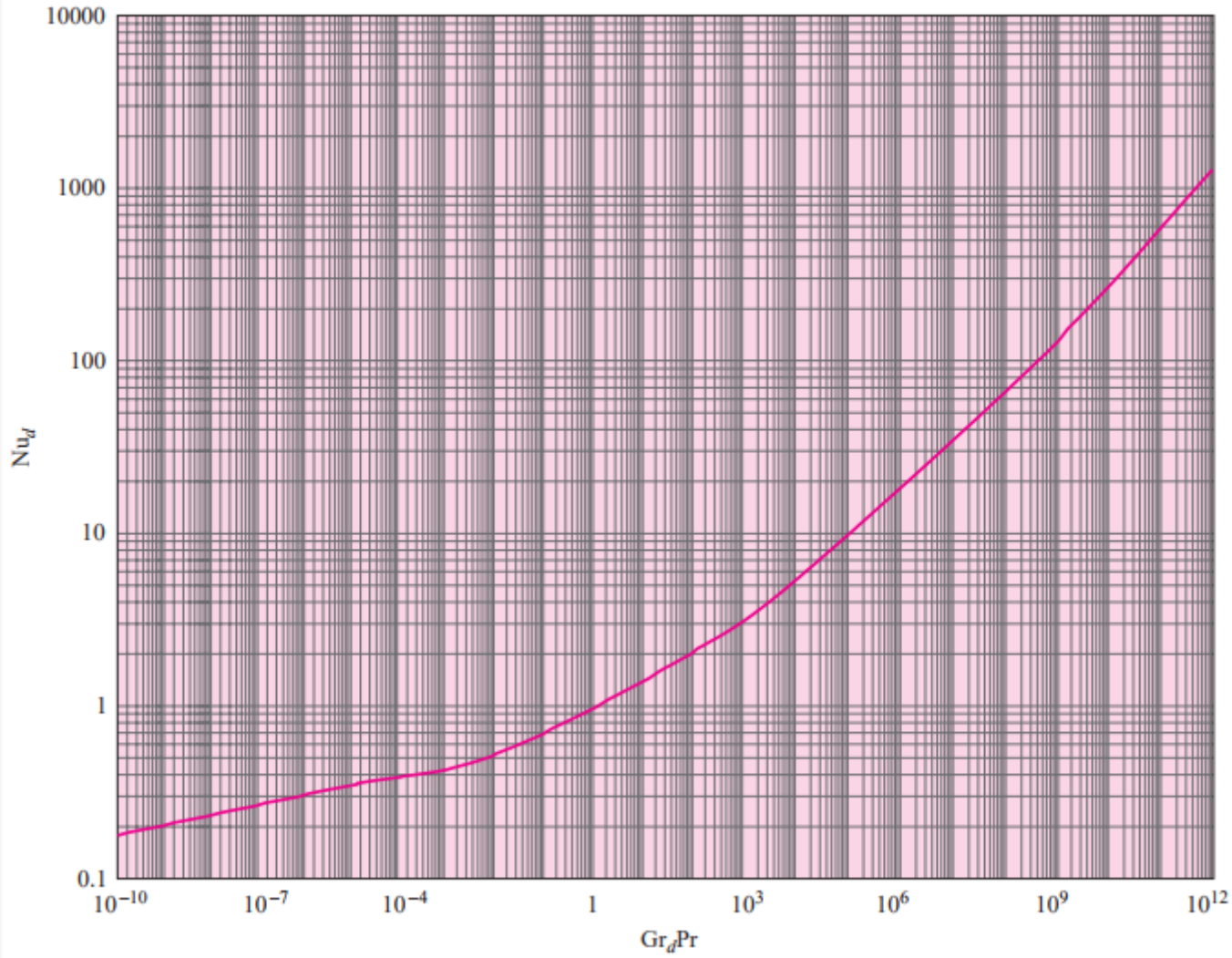
† Preferred.

Figure 7-5 | Free-convection heat transfer from vertical isothermal plates.



جابجایی آزاد از صفحات همدمای عمودی

Figure 7-6 | Free-convection heat transfer from horizontal isothermal cylinders.



جابجایی آزاد از استوانه های همدمای افقی

جابجایی آزاد از صفحات عمودی و استوانه ها

سطوح همدما

گفتیم برای سطوح عمودی، اعداد ناسلت و گراشف بر حسب L به عنوان بعد مشخصه بیان می شود. اگر ضخامت لایه مرزی در مقایسه با قطر استوانه، بزرگ نباشد، می توان انتقال گرما را با همان روابط صفحات عمودی حساب کرد، یعنی اگر:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}} \qquad [7\text{-}27]$$

برقرار باشد، استوانه عمودی را می توان به صورت صفحه تخت عمودی در نظر گرفته می شود.

با دقت در جدول (۷-۱) می بینیم که برای $(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f > 10^9)$ دو سری مقدار m و c وجود دارد که ظاهراً تفاوت زیادی با هم دارند. اما ثابت شده که هر دو مقدار با داده های تجربی سازگاری دارند.

علاوه بر روابط فوق، برخی روابط مبتنی بر روش های تحلیلی نیز وجود دارند از جمله رابطه بیلی:

$$\mathrm{Nu}_f = 0.10(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^{1/3}$$

و همین طور روابط چرچیل و چو که بازه های وسیع تری از عدد رایلی را شامل می شوند:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0.68 + \frac{0.670\,\mathrm{Ra}^{1/4}}{[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \qquad \text{for } \mathrm{Ra}_L < 10^9 \qquad \textbf{[7-28]}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0.825 + \frac{0.387\,\mathrm{Ra}^{1/6}}{[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}} \qquad \text{for } 10^{-1} < \mathrm{Ra}_L < 10^{12} \qquad \textbf{[7-29]}$$

سطوح با شار گرمایی ثابت

آزمایشات بسیار گسترده ای برای محاسبات جابجایی آزاد سطوح عمودی و شیب دار داخل آب تحت شار ثابت صورت گرفته است. در این آزمایشات، نتایج بر حسب گراشف اصلاح شده، Gr^* آمده است.

$$\mathrm{Gr}_x^* = \mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Nu}_x = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2} \qquad \textbf{[7-30]}$$

در رابطه فوق، $q_w = q/A$، شار گرمایی بر واحد سطح است و در سراسر سطح، ثابت فرض می شود.

ضرایب انتقال حرارت موضعی برای جریان آرام در دمای فیلم با رابطه زیر به دست می آید:

$$\mathrm{Nu}_{xf} = \frac{hx}{k_f} = 0.60(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr}_f)^{1/5} \qquad 10^5 < \mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} < 10^{11};\ q_w = \text{const} \qquad \textbf{[7-31]}$$

نکته: معیار جریان آرام بر حسب Gr_x^* با معیار جریان آرام بر حسب Gr_x، یکسان نیست. لایه مرزی انتقالی از محدوده $\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} = 3 \times 10^{12}$ و 4×10^{13} آغاز شده و در محدوده 2×10^{13} و 10^{14} پایان می یابد. جریان آشفته کاملاً توسعه یافته در $\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} = 10^{14}$ خواهد بود. در ناحیه آشفته، ضرایب انتقال حرارت موضعی در دمای فیلم، به صورت زیر است:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.17(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr})^{1/4} \qquad 2\times 10^{13} < \mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} < 10^{16};\ q_w = \mathrm{const} \qquad \textbf{[7-32]}$$

روابط تجربی فوق برای آب استخراج شده اند ولی برای هوا هم قابل استفاده هستند.

در مسائل شار ثابت (و نه دما ثابت)، با استفاده از رابطه (۷-۳۱)، مقدار h به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

$$\bar{h} = \tfrac{5}{4} h_{x=L} \qquad q_w = \mathrm{const}$$

می توانیم طبق روالی که برای دما ثابت داشتیم، $\overline{\mathrm{Nu}}_f = C(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^m$ این کار را برای شار ثابت انجام دهیم:

$$\mathrm{Nu}_x = C(\mathrm{Gr}_x \mathrm{Pr})^m \qquad \textbf{[7-33]}$$

با قرار دادن $\mathrm{Gr}_x = \mathrm{Gr}_x^*/\mathrm{Nu}_x$ داریم:

$$\mathrm{Nu}_x^{1+m} = C(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr})^m$$

$$\mathrm{Nu}_x = C^{1/(1+m)}(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr})^{m/(1+m)} \qquad \textbf{[7-34]}$$

با مقایسه توان های Gr_x^*، با مقادیر مشخصه m در جریان آرام و آشفته، داریم:

$$\textit{Laminar, } m = \frac{1}{4}: \qquad \frac{m}{1+m} = \frac{1}{5}$$

$$\textit{Turbulent, } m = \frac{1}{3}: \qquad \frac{m}{1+m} = \frac{1}{4}$$

با توجه به روابط فوق، برای جریان آرام و استفاده از معادله (۷-۲۵) داریم:

$$h_x \sim \frac{1}{x}(x^3)^{1/4} = x^{-1/4}$$

و برای جریان آشفته:

$$h_x \sim \frac{1}{x}(x^3)^{1/3} = \mathrm{const\ with}\ x$$

مشاهده می کنیم که ضریب انتقال گرمای موضعی در جریان آشفته، نسبت به x مقدار ثابتی است.

چرچیل و چو که برای انتقال حرارت دما ثابت فرمول کلی داشتند، برای شار ثابت نیز رابطه زیر را پیشنهاد نموده اند:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L^{1/4}(\overline{\mathrm{Nu}}_L - 0.68) = \frac{0.67(\mathrm{Gr}_L^* \mathrm{Pr})^{1/4}}{[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \qquad \textbf{[7-35]}$$

در رابطه فوق، $\overline{\mathrm{Nu}}_L = q_w L/(k\overline{\Delta T})$ و $\overline{\Delta T} = T_w - T_\infty$ at $L/2 - T_\infty$. (اختلاف دما در مرکز صفحه) می باشد.

مثال ۷-۱

در یک کارخانه، در مجاورت کوره، یک شار انرژی تابشی به میزان $800\ \mathrm{W/m^2}$، به یک سطح فلزی عمودی به ارتفاع ۳متر و عرض ۲ متر برخورد می کند. صفحه فلزی این صفحه عایق شده و به رنگ سیاه در آمده است. بنابراین، کل انرژی تابشی ورودی از طریق جابجایی آزاد به هوای محیط با دمای 30C انتقال می یابد. دمای میانگین صفحه را بیابید.

حل

ابتدایی ترین گام در حل مسأله، یافتن شرایط عنوان شده و فرمول مربوطه است. یک صفحه قائم داریم که در معرض شار ثابتی قرار گرفته و هوا نیز جریان ندارد. لذا مسأله، جابجایی آزاد از نوع شار ثابت است. پس فرمول مورد نظر، رابطه (۷-۳۰) خواهد بود.

$$\mathrm{Gr}_x^* = \mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Nu}_x = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2} \qquad \textbf{[7-30]}$$

از فرمول فوق اول باید Gr_x^*، را به دست آوریم تا بعد بر اساس اینکه $\mathrm{Gr}_x^*\,\mathrm{Pr}$ چه عددی شد، تشخیص دهیم جریان آرام است یا آشفته و از یکی از دو رابطه (۷-۳۱) و (۷-۳۲) به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\mathrm{Nu}_{xf} = \frac{hx}{k_f} = 0.60(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr}_f)^{1/5} \qquad 10^5 < \mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} < 10^{11};\ q_w = \mathrm{const} \qquad \textbf{[7-31]}$$

$$\mathrm{Nu}_x = 0.17(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr})^{1/4} \qquad 2\times 10^{13} < \mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} < 10^{16};\ q_w = \mathrm{const} \qquad \textbf{[7-32]}$$

پس اول باید $\mathrm{Gr}_x^* = \mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Nu}_x = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2}$ را به دست آوریم. مشاهده می کنیم که پارامترهای k و ν را باید از جدول بخوانیم، اما ورودی به جدول، بر حسب دمای فیلم است و ما فقط دمای هوا را داریم و دمای صفحه را نداریم که بخواهیم دمای فیلم را محاسبه کنیم. پس باید تخمین بزنیم. مقدار تقریبی h در مسائل جابجایی آزاد حدود $10\ \mathrm{W/m^2C}$ است. پس به صورت تقریبی داریم:

$$\Delta T = \frac{q_w}{h} \approx \frac{800}{10} = 80°\mathrm{C}$$

این دمای میانگین صفحه و هوا است. ولی ما نیاز به دمای فیلم داریم تا خواص را از جدول بخوانیم.

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{T_w + (T_\infty - T_\infty) + T_\infty}{2} = \frac{T_w - T_\infty + 2T_\infty}{2} = \frac{T_w - T_\infty}{2} + \frac{2T_\infty}{2} = \frac{\Delta T}{2} + T_\infty$$

$$T_f \approx \frac{80}{2} + 30 = 70°\text{C} = 343\ \text{K}$$

حال با این عدد به جدول هوا مراجعه می کنیم. حتماً دقت کنیم که دما را بر حسب کلوین بنویسیم و در صورت لزوم میانیابی کنیم.

Table A-5 | Properties of air at atmospheric pressure.†

The values of μ, k, c_p, and Pr are not strongly pressure-dependent and may be used over a fairly wide range of pressures

T, K	ρ kg/m^3	c_p kJ/kg · °C	$\mu \times 10^5$ kg/m · s	$\nu \times 10^6$ m^2/s	k W/m · °C	$\alpha \times 10^4$ m^2/s	Pr
100	3.6010	1.0266	0.6924	1.923	0.009246	0.02501	0.770
150	2.3675	1.0099	1.0283	4.343	0.013735	0.05745	0.753
200	1.7684	1.0061	1.3289	7.490	0.01809	0.10165	0.739
250	1.4128	1.0053	1.5990	11.31	0.02227	0.15675	0.722
300	1.1774	1.0057	1.8462	15.69	0.02624	0.22160	0.708
350	0.9980	1.0090	2.075	20.76	0.03003	0.2983	0.697
400	0.8826	1.0140	2.286	25.90	0.03365	0.3760	0.689
450	0.7833	1.0207	2.484	31.71	0.03707	0.4222	0.683
500	0.7048	1.0295	2.671	37.90	0.04038	0.5564	0.680
550	0.6423	1.0392	2.848	44.34	0.04360	0.6532	0.680
600	0.5879	1.0551	3.018	51.34	0.04659	0.7512	0.680
650	0.5430	1.0635	3.177	58.51	0.04953	0.8578	0.682
700	0.5030	1.0752	3.332	66.25	0.05230	0.9672	0.684
750	0.4709	1.0856	3.481	73.91	0.05509	1.0774	0.686
800	0.4405	1.0978	3.625	82.29	0.05779	1.1951	0.689
850	0.4149	1.1095	3.765	90.75	0.06028	1.3097	0.692
900	0.3925	1.1212	3.899	99.3	0.06279	1.4271	0.696
950	0.3716	1.1321	4.023	108.2	0.06525	1.5510	0.699
1000	0.3524	1.1417	4.152	117.8	0.06752	1.6779	0.702
1100	0.3204	1.160	4.44	138.6	0.0732	1.969	0.704
1200	0.2947	1.179	4.69	159.1	0.0782	2.251	0.707
1300	0.2707	1.197	4.93	182.1	0.0837	2.583	0.705
1400	0.2515	1.214	5.17	205.5	0.0891	2.920	0.705
1500	0.2355	1.230	5.40	229.1	0.0946	3.262	0.705
1600	0.2211	1.248	5.63	254.5	0.100	3.609	0.705
1700	0.2082	1.267	5.85	280.5	0.105	3.977	0.705
1800	0.1970	1.287	6.07	308.1	0.111	4.379	0.704
1900	0.1858	1.309	6.29	338.5	0.117	4.811	0.704
2000	0.1762	1.338	6.50	369.0	0.124	5.260	0.702
2100	0.1682	1.372	6.72	399.6	0.131	5.715	0.700
2200	0.1602	1.419	6.93	432.6	0.139	6.120	0.707
2300	0.1538	1.482	7.14	464.0	0.149	6.540	0.710
2400	0.1458	1.574	7.35	504.0	0.161	7.020	0.718
2500	0.1394	1.688	7.57	543.5	0.175	7.441	0.730

†From *Natl. Bur. Stand. (U.S.) Circ.* 564, 1955.

$$\nu = 2.043 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = 2.92 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$

$$k = 0.0295\ \text{W/m} \cdot °\text{C} \qquad \text{Pr} = 0.7$$

در رابطه $\text{Gr}_x^* = \text{Gr}_x\ \text{Nu}_x = \dfrac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2}$ به ازای بیشترین طول (x=3.5m)، Gr_x^* را حساب می کنیم. داریم:

$$\mathrm{Gr}_x^* = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2} = \frac{(9.8)(2.92\times10^{-3})(800)(3.5)^4}{(0.0295)(2.043\times10^{-5})^2} = 2.79\times10^{14}$$

پس $Gr_x^* \Pr = 2.79\times10^{14}\times0.7 = 1.953\times10^{14}$ و لذا جریان آشفته است و باید از فرمول دوم استفاده شود. داریم:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.17\left(Gr_x^* \Pr\right)^{1/4} \rightarrow h_x = \frac{k}{x}(0.17)\left(Gr_x^* \Pr\right)^{1/4}$$

$$= \frac{0.0295}{3.5}(0.17)(2.79\times10^{14}\times0.7)^{1/4}$$
$$= 5.36\ \mathrm{W/m^2\cdot{}^\circ C}\ [0.944\ \mathrm{Btu/h\cdot ft^2\cdot{}^\circ F}]$$

در بخش قبل عنوان شد که در جریان آشفته، h با x تغییر نمی کند و می توان این عدد را به صورت مقدار متوسط در نظر گرفت. چون $h=5.36\ \mathrm{W/m^2}$ از مقدار تخمینی 10 که برای محاسبه دمای فیلم از آن استفاده شد، کمتر است، پس باید محاسبات را بر اساس h جدید تکرار نماییم.

$$\Delta T = \frac{q_w}{h} = \frac{800}{5.36} = 149^\circ\mathrm{C}$$

$$T_f = 30 + \frac{149}{2} = 104.5^\circ\mathrm{C}$$

$$\nu = 2.354\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = 2.65\times10^{-3}/\mathrm{K}$$
$$k = 0.0320\ \mathrm{W/m\cdot{}^\circ C} \qquad \Pr = 0.695$$

$$\mathrm{Gr}_x^* = \frac{(9.8)(2.65\times10^{-3})(800)(3.5)^4}{(0.0320)(2.354\times10^{-5})^2} = 1.75\times10^{14}$$

$$h_x = \frac{k}{x}(0.17)(\mathrm{Gr}_x^*\Pr)^{1/4}$$
$$= \frac{(0.0320)(0.17)}{3.5}[(1.758\times10^{14})(0.695)]^{1/4}$$
$$= 5.17\ \mathrm{W/m^2\cdot{}^\circ C}\ [-0.91\ \mathrm{Btu/h\cdot ft^2\cdot{}^\circ F}]$$

اختلاف دمای جدید از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\Delta T = (T_w - T_\infty)_{\mathrm{av}} = \frac{q_w}{h} = \frac{800}{5.17} = 155^\circ\mathrm{C}$$

پس دمای میانگین دیواره به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{w,\text{av}} = 155 + 30 = 185°\text{C}$$

مثال ۷-۲

صفحه عمودی بزرگی به ارتفاع 4m در دمای ثابت 60C قرار دارد و در معرض هوایی با دمای 10C است. اگر عرض صفحه 10m باشد، انتقال گرما را حساب کنید.

حل

چون دمای صفحه ثابت است، پس محاسبه دمای فیلم، دقیق خواهد بود.

$$T_f = \frac{60 + 10}{2} = 35°\text{C} = 308\ \text{K}$$

با مراجعه به جدول هوا و میانیابی، داریم:

$$\beta = \frac{1}{308} = 3.25 \times 10^{-3} \qquad k = 0.02685$$
$$\nu = 16.5 \times 10^{-6} \qquad \text{Pr} = 0.7$$

با این اعداد، GrPr را حساب می کنیم. داریم:

$$\text{Gr Pr} = \frac{(9.8)(3.25 \times 10^{-3})(60 - 10)(4)^3}{(16.5 \times 10^{-6})^2} 0.7$$
$$= 2.62 \times 10^{11}$$

در این مرحله هم می توان از جداول و نمودارهای ذکر شده و هم روابط تجربی استفاده کرد.

روش ۱) استفاده از رابطه چرچیل

$$\overline{\text{Nu}}^{1/2} = 0.825 + \frac{0.387\ \text{Ra}^{1/6}}{[1 + (0.492/\text{Pr})^{9/16}]^{8/27}} \qquad \text{for } 10^{-1} < \text{Ra}_L < 10^{12} \qquad \textbf{[7-29]}$$

$$\overline{\text{Nu}}^{1/2} = 0.825 + \frac{(0.387)(2.62 \times 10^{11})^{1/6}}{[1 + (0.492/0.7)^{9/16}]^{8/27}}$$
$$= 26.75$$
$$\overline{\text{Nu}} = 716$$

بنابراین، ضریب انتقال حرارت متوسط به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\bar{h} = \frac{(716)(0.02685)}{4.0} = 4.80\ \text{W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

لذا میزان انتقال حرارت به صورت زیر است:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty)$$
$$= (4.80)(4)(10)(60-10) = 9606 \text{ W}$$

روش ۲) استفاده از جدول و نمودار

$$\text{Nu} = 0.10(\text{Gr Pr})^{1/3}$$
$$= (0.10)(2.62 \times 10^{11})^{1/3} = 639.9$$

$$\bar{h} = \frac{(639.9)(0.02685)}{4.0} = 4.29\, W/m^2C$$
$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (4.29)(4)(10)(60-10) = 8591W$$

جابجایی آزاد از استوانه های افقی

برای استوانه های افقی نیز مقادیر C و m در جدول (۷-۱) برای بازه های مختلف GrPr آمده است. با این حال روابط تجربی نیز در این استوانه های افقی استخراج شده است. از جمله رابطه چرچیل و چو:

$$\overline{\text{Nu}}^{1/2} = 0.60 + 0.387\left\{\frac{\text{Gr Pr}}{[1+(0.559/\text{Pr})^{9/16}]^{16/9}}\right\}^{1/6} \quad \text{for } 10^{-5} < \text{Gr Pr} < 10^{12} \qquad \textbf{[7-36]}$$

رابطه دیگر که مربوط به ناحیه آرام ($10^{-6} < Gr\,\text{Pr} < 10^{9}$) است:

$$\text{Nu}_d = 0.36 + \frac{0.518(\text{Gr}_d\,\text{Pr})^{1/4}}{[1+(0.559/\text{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \qquad \textbf{[7-37]}$$

کماکان خواص در دمای فیلم محاسبه می شود.

انتقال حرارت از استوانه افقی به فلزات مایع از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\text{Nu}_d = 0.53(\text{Gr}_d\,\text{Pr}^2)^{1/4} \qquad \textbf{[7-38]}$$

مثال ۷-۳

دمای لوله افقی به قطر 1ft، در اتاقی با دمای هوای 15C، برابر 250C می باشد. اتلاف حرارت جابجایی آزاد به ازای متر طول لوله چقدر است؟

حل

ابتدا دمای فیلم را محاسبه می کنیم.

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{250+15}{2} = 132.5°\text{C} = 405.5\ \text{K}$$

در این دما، خواص را از جدول هوا قرائت می کنیم:

$$k = 0.03406\ \text{W/m}\cdot°\text{C} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{405.5} = 2.47\times10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$
$$\nu = 26.54\times10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0.687$$

روش اول)

حاصل GrPr را به دست می آوریم تا بدانیم از کدام سطر جدول (۷-۱) باید استفاده نماییم:

$$\begin{aligned}\text{Gr}_d\,\text{Pr} &= \frac{g\beta(T_w - T_\infty)d^3}{\nu^2}\text{Pr}\\ &= \frac{(9.8)(2.47\times10^{-3})(250-15)(0.3048)^3(0.687)}{(26.54\times10^{-6})^2}\\ &= 1.571\times10^8\end{aligned}$$

با این عدد، C=0.53 و m=1/4 از جدول به دست می آید. بنابراین عدد ناسلت برابر خواهد بود با:

$$\text{Nu}_d = 0.53(\text{Gr}_d\,\text{Pr})^{1/4} = (0.53)(1.571\times10^8)^{1/4} = 59.4$$
$$h = \frac{k\text{Nu}_d}{d} = \frac{(0.03406)(59.4)}{0.3048} = 6.63\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C} \quad [1.175\ \text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot°\text{F}]$$

بنابراین انتقال حرارت بر واحد طول لوله به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_w - T_\infty) = 6.63\pi(0.3048)(250-15) = 1.49\ \text{kW/m} \quad [1560\ \text{Btu/h}\cdot\text{ft}]$$

روش دوم)

از رابطه چرچیل استفاده می کنیم.

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0.60 + 0.387 \left\{ \frac{1.571 \times 10^8}{[1 + (0.559/0.687)^{9/16}]^{16/9}} \right\}^{1/6}$$

$$\mathrm{Nu} = 64.7$$

این مقدار ناسلت، از مقدار ناسلت روش جدول، حدود ۸ درصد بیشتر است.

جابجایی آزاد از صفحات افقی

سطوح همدما

برای این هندسه نیز می توان از جدول (۷-۱) بهره جست. تنها نکته این است که طول مشخصه L برای هندسه های زیر، سازگاری بیشتری با داده های تجربی در پی خواهد داشت:

مربع: طول ضلع

مستطیل: میانگین طول و عرض

دایره: 0.9d

حالت کلی: $L = \frac{A}{P}$ که A مساحت و P محیط سطح است.

شار گرمایی ثابت

برای شار گرمایی ثابت، با توجه به جهت حرارت دهی و صفحه، دو حالت داریم:

برای سطح گرم شده رو به بالا:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.13(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad \text{for } \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 2 \times 10^8 \qquad \textbf{[7-40]}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.16(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad \text{for } 2\times10^8 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 10^{11} \qquad \textbf{[7-41]}$$

برای سطح گرم شده رو به پایین:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.58(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/5} \qquad \text{for } 10^6 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 10^{11} \qquad \textbf{[7-42]}$$

در معادلات فوق، کلیه خواص به جز β، در دمای T_e که به صورت زیر تعریف می شود، محاسبه می گردند. T_w نیز دمای متوسط دیواره است.

$$T_e = T_w - 0.25(T_w - T_\infty)$$

$$\bar{h} = \frac{q_w}{T_w - T_\infty}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{q_w L}{(T_w - T_\infty)k}$$

اشکال هندسی نامنظم

برای اشکال هندسی نامنظم، رابطه کلی وجود ندارد. در حالات خاص، مثلاً برای استوانه عمودی با ارتفاع برابر با قطر، می توان از C=0.775 و m=0.208 استفاده کرد.

لینهارد پیشنهاد می کند اگر طول مشخصه برابر با فاصله ای که ذره سیال در لایه مرزی طی می کند، در نظر گرفته شود، مقادیر C=0.52 و m=1/4 قابل استفاده است. (انتهای جدول ۷-۱).

اگر اطلاعات خاصی در مورد شکل هندسی وجود نداشته باشد، می توان از تخمین فوق بهره جست.

مثال ۷-۴

دمای مکعبی به ضلع 20cm برابر با 60C است و در معرض هوای ساکن به دمای 10C قرار دارد. انتقال حرارت را محاسبه کنید.

حل

چون این جسم نامنظم است، از اطلاعات انتهای جدول (۷-۱) استفاده می کنیم. دمای فیلم 35C است. داریم:

$$\beta = 3.25 \times 10^{-3} \quad k = 0.02685$$
$$\nu = 17.47 \times 10^{-6} \quad \mathrm{Pr} = 0.7$$

نکته مهم این مثال، محاسبه طول مشخصه است. طول مشخصه با توجه به توضیحات قبلی، مسافتی است که ذره سیال در لایه مرزی می پیماید. در این مسأله، لایه مرزی L/2 در وجه پایینی، L در وجه جانبی و L/2 در وجه فوقانی است. پس طول کل برابر با 2L خواهد بود.

$$\mathrm{Gr\,Pr} = \frac{(9.8)(3.25 \times 10^{-3})(60-10)(0.4)^3}{(17.47 \times 10^{-6})^2}(0.7) = 2.34 \times 10^8$$

با مراجعه به انتهای جدول (۷-۱)، C=0.52 و m=1/4 بوده و داریم:

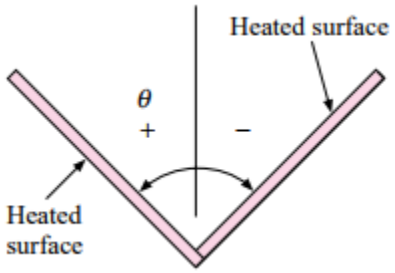
$$\mathrm{Nu} = (0.52)(2.34 \times 10^8)^{1/4} = 64.3$$

$$\bar{h} = \mathrm{Nu}\frac{k}{L} = \frac{(64.3)(0.02685)}{(0.4)} = 4.32\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$$

مساحت کل، برابر با مجموع هر کدام از ۶ وجه مکعب است. داریم:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (4.32)(0.24)(60-10) = 51.8\ \mathrm{W}$$

جابجایی آزاد از سطوح شیبدار



سطح شیبداری مطابق شکل فوق در نظر بگیرید. θ زاویه با خط قائم است. علامت مثبت زاویه مربوط به زمانی است که گرم کننده صفحه در زیر قرار گرفته است. برای این هندسه و با فرض شار گرمایی ثابت، روابط زیر را برای ناسلت متوسط داریم:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = 0.56(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta)^{1/4} \qquad \theta < 88^\circ;\ 10^5 < \mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta < 10^{11} \qquad \textbf{[7-43]}$$

در معادله فوق، (مشابه مسأله شار ثابت در صفحه افقی که قبلاً اشاره شد)، کلیه خواص به جز β، در دمای T_e که به صورت زیر تعریف می شود، محاسبه می گردند. T_w نیز دمای متوسط دیواره است.

$$T_e = T_w - 0.25(T_w - T_\infty)$$

کمیت β در دمای زیر محاسبه می شود:

$$T_\infty + 0.50(T_w - T_\infty)$$

برای صفحات تقریباً افقی رو به پایین، یعنی $88° < \theta < 90°$، رابطه دیگری وجود دارد:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = 0.58(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e)^{1/5} \qquad 10^6 < \mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e < 10^{11} \qquad \textbf{[7-45]}$$

برای صفحه شیبدار با سطح گرم شده رو به بالا و زوایای بین 15- و 75-، و در بازه $10^5 < \mathrm{Gr}_e\ \mathrm{Pr}_e \cos\theta < 10^{11}$ رابطه زیر را داریم:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = 0.14[(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e)^{1/3} - (\mathrm{Gr}_c\,\mathrm{Pr}_e)^{1/3}] + 0.56(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta)^{1/4} \qquad \textbf{[7-46]}$$

در رابطه فوق، Gr_c ، گراشف بحرانی است و تعبیر فیزیکی آن، لحظه جدایش عدد ناسلت از جریان آرام در معادله (۷-۴۳) است و از جدول زیر به دست می آید:

θ, degrees	Gr_c
−15	5×10^9
−30	2×10^9
−60	10^8
−75	10^6

اگر گراشف کمتر از گراشف بحرانی باشد، ترم اول معادله (۷-۴۶) حذف می شود. روابط فوق را برای مسائل دما ثابت هم می توان به کار برد.

به خاطر داریم برای صفحات عمودی با شار ثابت و جریان آرام، رابطه زیر را داشتیم:

$$\mathrm{Nu}_{xf} = \frac{hx}{k_f} = 0.60(\mathrm{Gr}_x^*\,\mathrm{Pr}_f)^{1/5} \qquad 10^5 < \mathrm{Gr}_x^*\,\mathrm{Pr} < 10^{11};\ q_w = \text{const} \qquad \textbf{[7-31]}$$

نشان داده شده که برای هوا در حالت شار ثابت و جریان آرام، هم برای سطوح گرما دیده رو به بالا و هم برای سطوح گرما دیده رو به پایین، کافی است در رابطه فوق به جای Gr_x^* ، $\mathrm{Gr}_x^* \cos\theta$ قرار دهیم.

برای حالت آشفته، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.17(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr})^{1/4} \qquad 10^{10} < \mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr} < 10^{15} \qquad \textbf{[7-47]}$$

در رابطه فوق، اگر صفحه گرما دیده رو به بالا باشد، Gr_x^* با صفحه عمودی یکی است ولی اگر صفحه گرما دیده رو به پایین باشد، Gr_x^* با $\mathrm{Gr}^* \cos^2\theta$ جایگزین خواهد شد.

برای استوانه های شیب دار، انتقال حرارت جریان آرام در حالت شار ثابت، از رابطه زیر قابل بیان است:

$$\mathrm{Nu}_L = [0.60 - 0.488(\sin\theta)^{1.03}](\mathrm{Gr}_L \mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}(\sin\theta)^{1.75}} \qquad \text{for } \mathrm{Gr}_L \mathrm{Pr} < 2\times 10^8 \qquad \textbf{[7-48]}$$

در رابطه فوق، θ زاویه با راستای قائم است و کل خواص به جز β (که در شرایط محیط ارزیابی می شود)، در شرایط فیلم به دست می آیند.

معادلات ساده شده برای هوا

معادلات ساده شده برای ضریب انتقال حرارت از سطوح مختلف به هوا در فشار اتمسفر و دماهای متعادل در جدول (۷-۲) آمده است. برای استفاده از جدول، می بایست GrPr را بدانیم. چنانچه فشار در مسأله، فشار اتمسفر نباشد، می توان اعداد استخراج شده از جدول را در ضرایب زیر ضرب نمود:

$$\left(\frac{p}{101.32}\right)^{1/2} \qquad \text{for laminar cases}$$

$$\left(\frac{p}{101.32}\right)^{2/3} \qquad \text{for turbulent cases}$$

در رابطه فوق، p فشار بر حسب کیلو پاسکال است.

Table 7-2 | Simplified equations for free convection from various surfaces to air at atmospheric pressure, adapted from Table 7-1.

Surface	Laminar, $10^4 < Gr_f Pr_f < 10^9$	Turbulent, $Gr_f Pr_f > 10^9$
Vertical plane or cylinder	$h = 1.42\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1.31(\Delta T)^{1/3}$
Horizontal cylinder	$h = 1.32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4}$	$h = 1.24(\Delta T)^{1/3}$
Horizontal plate:		
Heated plate facing upward or cooled plate facing downward	$h = 1.32\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1.52(\Delta T)^{1/3}$
Heated plate facing downward or cooled plate facing upward	$h = 0.59\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	
Heated cube; L = length of side, Area $= 6L^2$	$h = 1.052\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	

where h = heat-transfer coefficient, $W/m^2 \cdot °C$
$\Delta T = T_w - T_\infty$, °C
L = vertical or horizontal dimension, m
d = diameter, m

مثال ۷-۵ (تکرار مسأله ۷-۳)

دمای لوله افقی به قطر 1ft، در اتاقی با دمای هوای 15C، برابر 250C می باشد. اتلاف حرارت جابجایی آزاد به ازای متر طول لوله چقدر است؟

حل

مشابه بخش قبل، در ابتدا می بایست دمای فیلم و خواص در دمای فیلم را بیابیم و بر اساس آن GrPr را محاسبه کنیم تا معلوم شود جریان آرام است یا آشفته.

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{250 + 15}{2} = 132.5°C = 405.5\ K$$

$$k = 0.03406\ W/m \cdot °C \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{405.5} = 2.47 \times 10^{-3}\ K^{-1}$$

$$\nu = 26.54 \times 10^{-6}\ m^2/s \qquad Pr = 0.687$$

$$\mathrm{Gr}_d\,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)d^3}{\nu^2}\mathrm{Pr}$$
$$= \frac{(9.8)(2.47\times10^{-3})(250-15)(0.3048)^3(0.687)}{(26.54\times10^{-6})^2}$$
$$= 1.571\times10^8$$

تا اینجا، راه حل دقیقاً مشابه مثال (۳-۷) است. حال با مراجعه جدول (۷-۲) چون جریان آرام است، از رابطه استوانه افقی در جریان آرام استفاده می کنیم.

$$h = 1.32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4} = 1.32\left(\frac{250-15}{0.3048}\right)^{1/4}$$
$$= 6.96\ \mathrm{W/m^2\cdot{}^\circ C}$$

$$\frac{q}{L} = (6.96)\pi(0.3048)(250-15) = 1.57\ \mathrm{kW/m}$$

این عدد، در مقایسه با حل قبلی حدود ۴ درصد بیشتر است.

سوال: اگر قرار به محاسبه GrPr بر اساس اعداد دمای فیلم بود، این روش ساده شده، عملاً چه مزیتی دارد؟

جابجایی آزاد در کره ها

یوگ، رابطه تجربی زیر را برای انتقال حرارت کره به هوا پیشنهاد نموده است:

$$\mathrm{Nu}_f = \frac{\bar{h}d}{k_f} = 2 + 0.392\,\mathrm{Gr}_f^{1/4} \qquad \text{for } 1 < \mathrm{Gr}_f < 10^5 \qquad \textbf{[7-49]}$$

با وارد کردن عدد پرانتل، معادله به فرم زیر در خواهد آمد:

$$\mathrm{Nu}_f = 2 + 0.43(\mathrm{Gr}_f\,\mathrm{Pr}_f)^{1/4} \qquad \textbf{[7-50]}$$

رابطه فوق برای دمای فیلم و برای هوا معتبر است، لیکن در صورت عدم وجود اطلاعات اضافی، برای مایعات نیز می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

برای بازه های بزرگتری از عدد رایلی، آماتو و تین، رابطه زیر را برای آب پیشنهاد می کنند:

$$\mathrm{Nu}_f = 2 + 0.50(\mathrm{Gr}_f\,\mathrm{Pr}_f)^{1/4} \qquad \textbf{[7-51]}$$

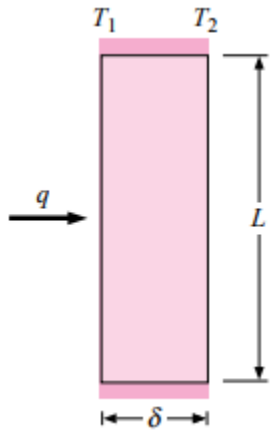
این رابطه برای $3 \times 10^5 < \mathrm{Gr\,Pr} < 8 \times 10^8$. معتبر است.

چرچیل، رابطه دیگری را با محدوده وسیعتر عدد رایلی پیشنهاد می کند:

$$\mathrm{Nu} = 2 + \frac{0.589\mathrm{Ra}_d{}^{1/4}}{[1 + (0.469/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \qquad \textbf{[7-52]}$$

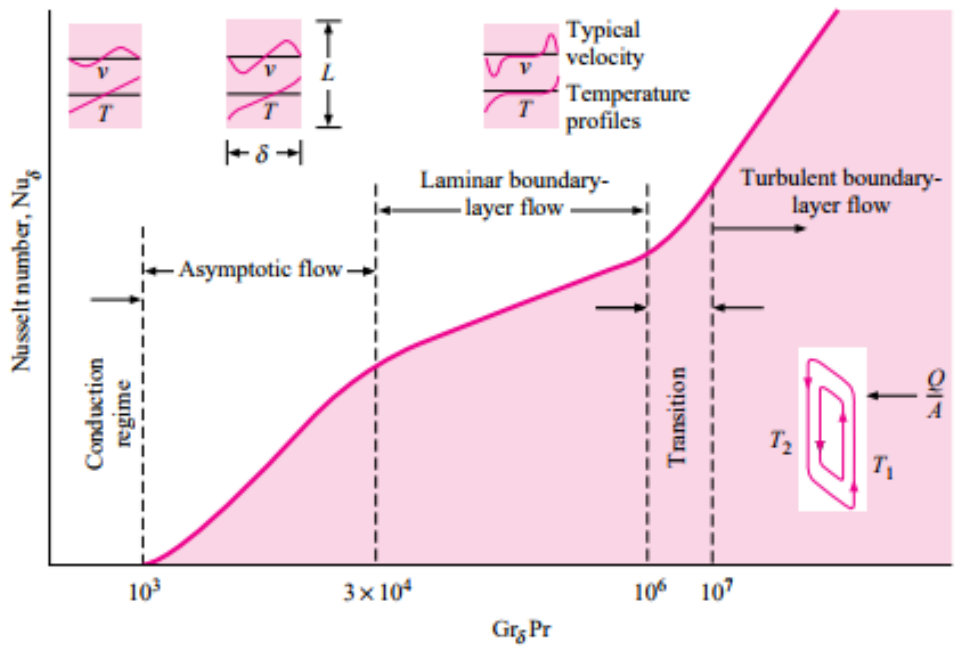
رابطه فوق برای Pr>0.5 و $\mathrm{Ra}_d < 10^{11}$. معتبر است.

جابجایی آزاد در فضاهای بسته



شکل فوق را در نظر بگیرید که سیالی بین دو صفحه عمودی به ارتفاع L که از یکدیگر به اندازه δ فاصله دارند، محصور شده است. اگر در اثر اعمال شار q به یک صفحه، یک اختلاف دمای $\Delta T_w = T_1 - T_2$ روی سیال اعمال شود، انتقال حرارت با رژیم جریان نشان داده شده در شکل (۷-۹) پدیدار خواهد شد.

Figure 7-9 | Schematic diagram and flow regimes for the vertical convection layer, according to Reference 18.



در این حالت، عدد گراشف از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Gr_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2} \qquad \textbf{[7-53]}$$

مقدار عدد گراشف، تعیین کننده رفتار انتقال حرارت خواهد بود. اگر گراشف خیلی کم باشد (به دلیل اختلاف دمای خیلی کم، یا فاصله خیلی کم دو صفحه قائم، یا ویسکوزیته سینماتیکی خیلی کم سیال محصور، یا تراکم پذیری خیلی کم سیال)، در آن صورت، انتقال حرارت عملاً از نوع هدایت خواهد بود.

با افزایش عدد گراشف، مطابق نمودار، عدد ناسلت افزایش یافته و لذا انتقال حرارت بیشتر خواهد شد.

در محدوده های مختلف GrPr، می توان روابط تجربی زیر را نوشت:

$$Nu_\delta = 0.42(Gr_\delta\, Pr)^{1/4} Pr^{0.012} \left(\frac{L}{\delta}\right)^{-0.30} \qquad q_w = \text{const} \qquad \textbf{[7-54]}$$

$$10^4 < Gr_\delta\, Pr < 10^7$$
$$1 < Pr < 20{,}000$$
$$10 < L/\delta < 40$$

$$Nu_\delta = 0.46\,(Gr_\delta\, Pr)^{1/3} \qquad q_w = \text{const} \qquad \textbf{[7-55]}$$

$$10^6 < Gr_\delta\, Pr < 10^9$$
$$1 < Pr < 20$$
$$1 < L/\delta < 40$$

شار حرارتی از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\frac{q}{A} = q_w = h(T_1 - T_2) = Nu_\delta \frac{k}{\delta}(T_1 - T_2) \qquad [7\text{-}56]$$

گاهی اوقات از واژه "ضریب هدایت حرارتی مؤثر یا ظاهری k_e" استفاده می شود که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\frac{q}{A} = k_e \frac{T_1 - T_2}{\delta} \qquad [7\text{-}57]$$

با مقایسه دو رابطه فوق، می توان این ضریب را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\mathrm{Nu}_\delta \equiv \frac{k_e}{k} \qquad [7\text{-}58]$$

اگر از مفهوم مقاومت حرارتی که در درس انتقال حرارت ۱ با آن آشنا شدیم، بهره بگیریم، خواهیم داشت:

$$R = \frac{\delta}{k_e} \qquad [7\text{-}59]$$

سوال: انتقال حرارت در پنجره های دو جداره را با توجه به روابط فوق، چگونه ارزیابی می کنید؟

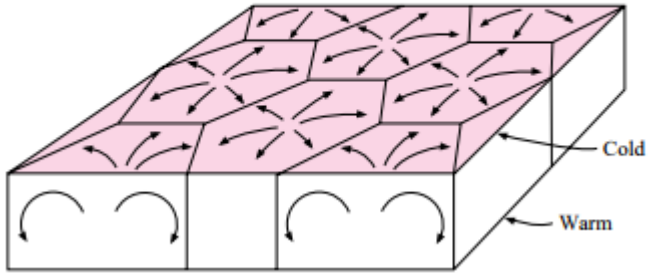
در فضاهای بسته افقی، انتقال حرارت دو حالت دارد:

الف) دمای صفحه بالایی بیشتر از دمای صفحه پایینی است: در این حالت، سیال با چگالی کمتر، بالای سیال با چگالی بیشتر قرار گرفته و لذا جابجایی اتفاق نمی افتد. در این حالت، انتقال حرارت از نوع هدایت خواهد بود و $\mathrm{Nu}_\delta = 1.0$.

ب) دمای صفحه پایینی بیشتر از دمای صفحه بالایی است: در این حالت، بسته به مقدار عدد گراشف، رفتار متفاوتی مشاهده خواهد گردید.

- اگر گراشف کمتر از حدود ۱۷۰۰ باشد، هدایت خالص برقرار بوده و ناسلت برابر ۱ است.
- با بزرگتر شدن گراشف، جابجایی شروع می شود و یک سلسله سلول های شش ضلعی موسوم به سلول های بنارد (Benard cells) مطابق شکل (۷-۱۰) تشکیل می گردد. با رسیدن $\mathrm{Gr}_\delta = 50{,}000$، این الگو از بین می رود.

Figure 7-10 | Benard-cell pattern in enclosed fluid layer heated from below, from Reference 33.



در فضاهای استوانه ای بسته افقی یا عمودی، عدد ناسلت برای محدوده $0.75 < L/d < 2.0$ که L طول استوانه است، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\mathrm{Nu}_f = 0.55(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^{1/4} \qquad \textbf{[7-60]}$$

ضریب هدایت گرمایی مؤثر یا ظاهری k_e، برای سیالات محصور در دو کره هم مرکز، برای $0.25 \le \delta/r_i \le 1.5$ و $0.7 < \mathrm{Pr} < 4150$ $1.2 \times 10^2 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} < 1.1 \times 10^9$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{k_e}{k} = 0.228(\mathrm{Gr}_\delta \mathrm{Pr})^{0.226} \qquad \textbf{[7-61]}$$

در رابطه فوق، $\delta = r_o - r_i$. است. در این حالت، با ضریب هدایت گرمایی مؤثر یا ظاهری k_e مندرج در معادله قبل، هدایت حالت دائم در پوسته کروی از رابطه زیر محاسبه خواهد گردید:

$$q = \frac{4\pi k_e r_i r_o \Delta T}{r_o - r_i} \qquad \textbf{[7-62]}$$

در این حالت، خواص در دمای میانگین T_m که به صورت زیر تعریف می شود، محاسبه می شود:

$$T_m = \frac{(r_m^3 - r_i^3)T_i + (r_o^3 - r_m^3)T_o}{r_o^3 - r_i^3} \qquad \textbf{[7-63]}$$

که در رابطه فوق، $r_m = (r_i + r_o)/2$. است.

در حالت کلی، می توان جابجایی آزاد را در فضاهای بسته و استفاده از جدول (۷-۳) با فرمول زیر بیان نمود:

$$\frac{k_e}{k} = C(\mathrm{Gr}_\delta \mathrm{Pr})^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^m \qquad \textbf{[7-64]}$$

Table 7-3 | Summary of empirical relations for free convection in enclosures in the form of Equation (7-61), correlation constants adjusted by Holman [74].

Fluid	Geometry	$Gr_\delta Pr$	Pr	$\frac{L}{\delta}$	C	n	m	Reference(s)
Gas	Vertical plate,	< 2000	$k_e/k = 1.0$					6, 7, 55, 59
	isothermal	6000–200,000	0.5–2	11–42	0.197	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	
		200,000–1.1×10^7	0.5–2	11–42	0.073	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	
	Horizontal plate,	< 1700	$k_e/k = 1.0$					
	isothermal	1700–7000	0.5–2	—	0.059	0.4	0	6, 7, 55, 59, 62, 63
	heated from							
	below	7000–3.2×10^5	0.5–2	—	0.212	$\frac{1}{4}$	0	66
		$> 3.2 \times 10^5$	0.5–2	—	0.061	$\frac{1}{3}$	0	
Liquid	Vertical plate,	< 2000	$k_e/k = 1.0$					
	constant heat	10^4–10^7	1–20,000	10–40	Eq. 7-52	—	—	18, 61
	flux or isothermal	10^6–10^9	1–20	1–40	0.046	$\frac{1}{3}$	0	
	Horizontal plate,	< 1700	$k_e/k = 1.0$	—				7, 8, 58, 63, 66
	isothermal,	1700–6000	1–5000	—	0.012	0.6	0	
	heated from	6000–37,000	1–5000	—	0.375	0.2	0	
	below	37,000–10^8	1–20		0.13	0.3	0	
		$> 10^8$	1–20		0.057	$\frac{1}{3}$	0	
Gas or liquid	Vertical annulus	Same as vertical plates						
	Horizontal annulus,	6000–10^6	1–5000	—	0.11	0.29	0	56, 57, 60
	isothermal	10^6–10^8	1–5000	—	0.40	0.20	0	
	Spherical annulus	120–1.1×10^9	0.7–4000	—	0.228	0.226	0	43

مثال ۷-۶

دو صفحه افقی مربعی به ضلع 20cm و به فاصله 1cm از هم قرار گرفته و فضای بین آنها را هوا با فشار 1atm پر می کند. دمای صفحه پایینی 100C و دمای صفحه بالایی 40C است. انتقال گرما از فاصله هوایی را بیابید.

حل

ابتدا دمای فیلم را یافته و مشخصات هوا را در دمای فیلم تعیین می کنیم.

$$T_f = \frac{100+40}{2} = 70°C = 343\ K$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(343)} = 1.029\ kg/m^3$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{343} = 2.915 \times 10^{-3}\ K^{-1}$$

$$\mu = 2.043 \times 10^{-5}\ kg/m \cdot s \qquad k = 0.0295\ W/m \cdot °C \qquad Pr = 0.7$$

حاصل GrPr را بر اساس فاصله بین دو صفحه مشخص می کنیم.

$$\mathrm{Gr\ Pr} = \frac{(9.8)(1.029)^2(2.915\times10^{-3})(100-40)(0.01)^3}{(2.043\times10^{-5})^2}(0.7) = 3043$$

حال به جدول (۷-۳) مراجعه می کنیم. از جدول مربوطه، C=0.059، n=0.4 و m=0 قرائت می شود. با استفاده از فرمول (۷-۶۴) داریم:

$$\frac{k_e}{k} = (0.059)(3043)^{0.4}\left(\frac{0.2}{0.01}\right)^0 = 1.46$$

$$q = \frac{k_e A(T_1 - T_2)}{\delta} = \frac{(1.460)(0.0295)(0.2)^2(100-40)}{0.01} = 10.34\ \mathrm{W}$$

ترکیب جابجایی آزاد و اجباری

در برخی موقعیت های واقعی که سیال گرما دیده، در مجاورت سطح جامد را با سرعت نسبتاً کم به حرکت در می آورند، انتقال گرمای جابجایی نه اجباری است و نه آزاد.

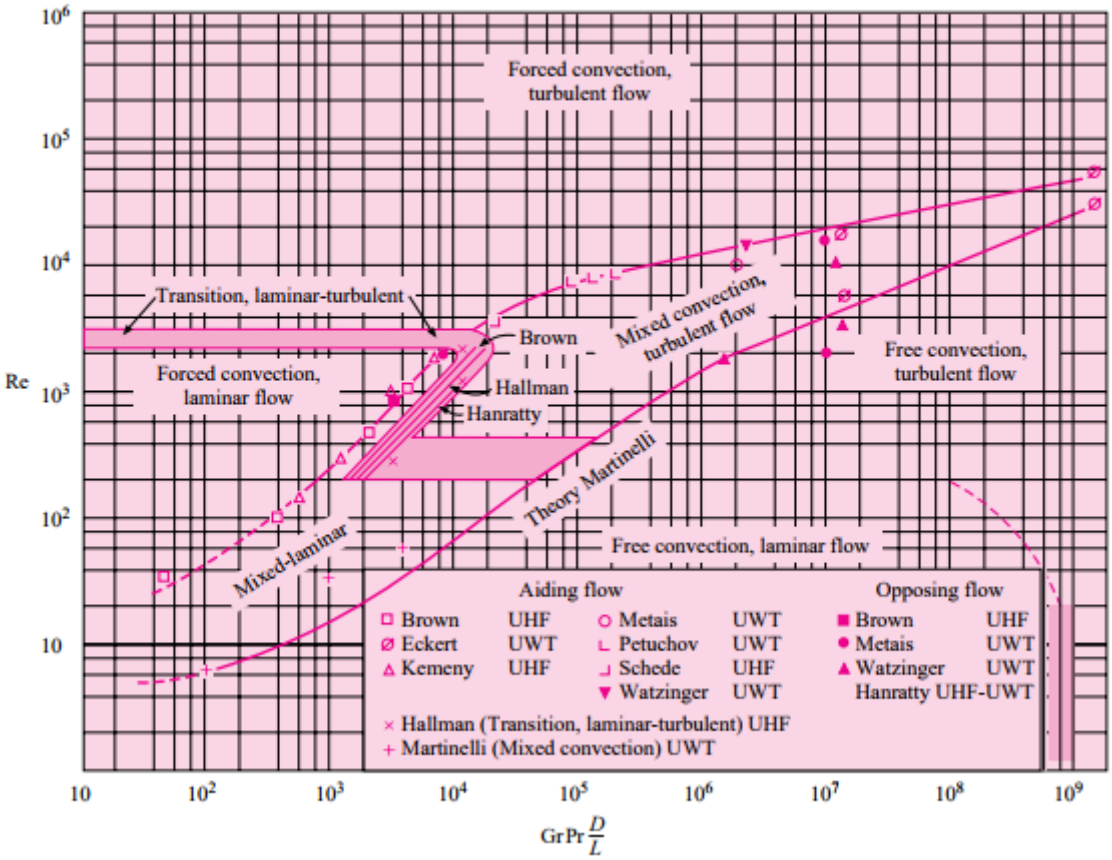
برای این مسائل ترکیبی در داخل لوله ها، رژیم هایی از جریان داخل لوله های عمودی، به صورت تجربی بررسی شده و در شکل (۷-۱۳) دیده می شود. در این شکل، دو ترکیب مختلف از جریان وجود دارد:

- جریان کمکی (Aidin flow): یعنی جریان جابجایی اجباری و جابجایی آزاد هم جهت هستند.
- جریان مخالف (Opposing flow): یعنی جریان جابجایی اجباری و جابجایی آزاد خلاف جهت هم هستند.

در اینجا دو اصطلاح هم وجود دارد:

- UWT (uniform wall temperature): دمای یکنواخت دیواره
- UHF (uniform heat flux): شار گرمایی یکنواخت

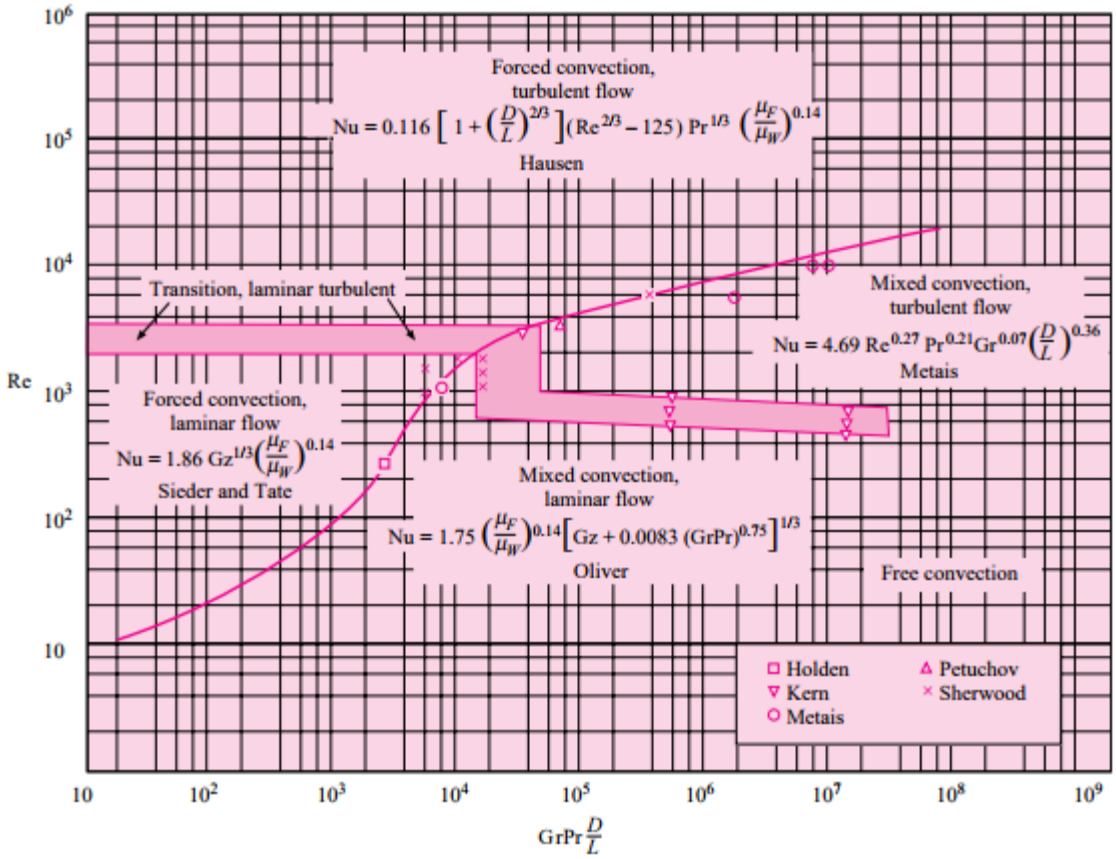
Figure 7-13 | Regimes of free, forced, and mixed convection for flow through vertical tubes, according to Reference 10.



در نمودار فوق که برای لوله های قائم است، محور افقی GrPrD/L و محور عمودی Re می باشد. در وسط دیاگرام یک باریکه وجود دارد که مربوط به جریان ترکیبی اجباری-آزاد است. پایین باریکه جریان آزاد و بالای باریکه جریان اجباری برقرار است. در هر کدام از این سه ناحیه نیز تقسیم بندی آرام و آشفته وجود دارد. بدیهی است عدد Re بزرگ نشانه سرعت جریان اجباری بیشتر و درنتیجه غالب بودن جابجایی اجباری است. در مقابل، GrPr بزرگتر، نشان دهنده غالب بودن جابجایی آزاد است. در نمودار فوق، $10^{-2} < \mathrm{Pr}\left(\frac{d}{L}\right) < 1$ اسامی Metais، Eckert و ... نام پژوهشگران مربوطه را بیان می کند. محدوده کاربردی در این نمودار، است.

مشابه تحلیل فوق را می توان برای لوله های افقی در نظر گرفت و شکل (۷-۱۴) این موضوع را نشان می دهد.

Figure 7-14 | Regimes of free, forced, and mixed convection for flow through horizontal tubes, according to Metais and Eckert [10].



این نمودار نیز مانند نمودار قبلی، در محدوده $10^{-2} < Pr\left(\frac{d}{L}\right) < 1$ معتبر است. در نمودار مشاهده می کنیم که پارامتری به نام Gz وجود دارد. این عدد بدون بعد گراتز (Graetz) نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$Gz = Re\,Pr\frac{d}{L} \qquad [7\text{-}76]$$

در این نمودار نیز نواحی جابجایی اجباری، جابجایی مرکب اجباری-آزاد، و جابجایی آزاد با اندکی تفاوت نسبت به نمودار قبلی دیده می شود. برای نمودار فوق، در بخش جریان آرام، می توان فرمول زیر را در نظر گرفت:

$$Nu = 1.75\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}[Gz + 0.012(Gz\,Gr^{1/3})^{4/3}]^{1/3} \qquad [7\text{-}77]$$

لزجت μ_b در دمای بالک (دمای توده سیال) اندازه گرفته می شود.

همان طور که قبلاً گفته شد، هرچه سرعت جریان بیشتر باشد، انتظار داریم جابجایی اجباری غالب باشد و بالعکس هرچه سرعت جریان کمتر باشد، جابجایی آزاد غلبه داشته باشد. در حالت کلی می توان معیار زیر را در نظر گرفت:

$$Gr/Re^2 > 10 \qquad [7\text{-}78]$$

اگر رابطه فوق برقرار باشد، جابجایی آزاد غالب خواهد بود.

مثال ۷-۷

هوا در فشار 1atm و دمای 27C در لوله ای افقی به قطر 25mm و طول 40cm با سرعت متوسط 30cm/s به طور اجباری جریان می یابد. دمای ثابت دیواره 140C است. ضریب انتقال گرما راتعیین کنید.

حل

با توجه به اینکه سرعت هوا نسبتاً کم است، به نظر می رسد مسأله به صورت ترکیبی جابجایی اجباری و جابجایی آزاد باشد. دمای فیلم و خواص را در دمای فیلم محاسبه می کنیم:

$$T_f = \frac{140+27}{2} = 83.5°\text{C} = 356.5\ \text{K}$$

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(356.5)} = 0.99\ \text{kg/m}^3$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = 2.805 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1} \qquad \mu_w = 2.337 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s}$$

$$\mu_f = 2.102 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s} \qquad k_f = 0.0305\ \text{W/m}\cdot°\text{C} \qquad \text{Pr} = 0.695$$

با در نظر گرفتن دمای بالک (توده ای) به میزان 27C، لزجت را حساب می کنیم:

$$\mu_b = 1.8462 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s}$$

سایر پارامترهای مهم برای نمودار (۷-۱۴) یا فرمول (۷-۷۷)، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{Re}_f = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(0.99)(0.3)(0.025)}{2.102 \times 10^{-5}} = 3.53$$

$$\text{Gr} = \frac{\rho^2 g\beta(T_w - T_b)d^3}{\mu^2} = \frac{(0.99)^2(9.8)(2.805 \times 10^{-3})(140-27)(0.025)^3}{(2.102 \times 10^{-5})^2}$$

$$= 1.007 \times 10^5$$

$$\text{Gr}\,\text{Pr}\frac{d}{L} = (1.077 \times 10^5)(0.695)\frac{0.025}{0.4} = 4677$$

عدد گراتز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{Gz} = \text{Re}\,\text{Pr}\frac{d}{L} = \frac{(353)(0.695)(0.025)}{0.4} = 15.33$$

با توجه به رابطه (۷-۷۷) داریم:

$$\mathrm{Nu} = 1.75\left(\frac{1.8462}{2.337}\right)^{0.14}\{15.33 + (0.012)[(15.33)(1.077\times 10^5)^{1/3}]^{4/3}\}^{1/3}$$
$$= 7.70$$

$$\bar{h} = \frac{k}{d}\mathrm{Nu} = \frac{(0.0305)(7.70)}{0.025} = 9.40\ \mathrm{W/m^2\cdot{}^\circ C}\quad [1.67\ \mathrm{Btu/h\cdot ft^2\cdot{}^\circ F}]$$

در جدول (۵-۷)، خلاصه ای از روابط تجربی انتقال گرمای جابجایی آزاد آمده است.

Table 7-5 | Summary of free-convection heat-transfer relations T. For most cases, properties are evaluated at $T_f = (T_w + T_\infty)/2$.

Geometry	Equation	Restrictions	Equation number
A variety of isothermal surfaces	$\mathrm{Nu}_f = C(\mathrm{Gr}_f\,\mathrm{Pr}_f)^m$ C and m from Table 7-1	See Table 7-1	(7-25)
Vertical isothermal surface	$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0.825 + \frac{0.387\,\mathrm{Ra}^{1/6}}{[1+(0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}}$	$10^{-1} < \mathrm{Ra}_L < 10^{12}$ Also see Fig. 7-5	(7-29)
Vertical surface, constant heat flux, local h	$\mathrm{Nu}_{xf} = C(\mathrm{Gr}_x^*\mathrm{Pr}_f)^m$	$C = 0.60,\ m = \frac{1}{5}$ for $10^5 < \mathrm{Gr}_x^*\mathrm{Pr} < 10^{11}$ $C = 0.17,\ m = \frac{1}{4}$ for $2\times 10^{13} < \mathrm{Gr}^*\mathrm{Pr} < 10^{16}$	(7-31) (7-32)
Isothermal horizontal cylinders	$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0.60 + 0.387\left\{\frac{\mathrm{Gr\,Pr}}{[1+(0.559/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{16/9}}\right\}^{1/6}$	$10^{-5} < \mathrm{Gr\,Pr} < 10^{13}$ Also see Fig. 7-6	(7-36)
Horizontal surface, constant heat flux		See text	(7-39) to (7-42)
Inclined surfaces	Section 7-7	See text	
Spheres	$\mathrm{Nu} = 2 + 0.43(\mathrm{Gr\,Pr})^{1/4}$ $\mathrm{Nu} = 2 + 0.5(\mathrm{Gr\,Pr})^{1/4}$ $\mathrm{Nu} = 2 + \frac{0.589(\mathrm{Gr\,Pr})^{1/4}}{[1+(0.469/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}}$	$1 < \mathrm{Gr\,Pr} < 10^5$ water, $3\times 10^5 < \mathrm{Gr\,Pr} < 8\times 10^8$ $0.5 < \mathrm{Pr}$ $\mathrm{Gr\,Pr} < 10^{11}$	(7-50) (7-51) (7-52)
Enclosed spaces	$q = k_e A(\Delta T/\delta)$ $\frac{k_e}{k} = C(\mathrm{Gr}_\delta\,\mathrm{Pr})^n\,(L/\delta)^m$	Constants C, m, and n from Table 7-3 Pure conduction for $\mathrm{Gr}_\delta\,\mathrm{Pr} < 2000$	(7-57) (7-64)
Across evacuated spaces	Most transfer is by radiation		