ویرایش هشتم

انتقال گرما

جی. پی. هولمن

ترجمهٔ حسن حقیقی تاجور

ویرایش هشتم

انتقال گرما

جی. پی هولمن

ترجمهٔ حسن حقیقی تاجور

هولمن، جک فیلیپ Holman, Jack Philip
انتقال گرما / جی پی.هولمن؛ مترجم حسن حقیقی تاجور - [تهران]:
شرکتاب دانشگاهی: مرکز خدمات فرهنگی سالکان، ۱۳۷۷.
۳۹۶ ص.: مصور، جدول، نمودار
ISBN 964-90861-4-5
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرست‌نویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی.
Heat transfer, 8th ed., 1997.
کتابنامه
چاپ دوم: ۱۳۸۱
۱. گرما -- انتقال. الف. حقیقی تاجور، حسن ۱۳۳۰ - ، مترجم. ب. عنوان. ج.
عنوان: انتقال حرارت.
۸ الف ۹ ه / QC ۳۲۰ ۶۲۱ / ۴۰۲۲
۱۳۷۷
کتابخانه ملی ایران ۷۷ م - ۱۱۵۰۹

نشر کتاب دانشگاهی

انتقال گرما

مؤلف چی. پی. هولمن
مترجم حسن حقیقی‌تاجور
ویراستار انسیه مستغنی یزدی
چاپ حیدری
صحافی مینو
چاپ دوم پاییز ۱۳۸۱
شمارگان ۲۲۰۰ نسخه
تعداد و قطع صفحات ۴۰۰ صفحهٔ رحلی
بها ۳۵۰۰ تومان
شابک ۵-۴-۹۰۸۶۱-۹۶۴ ISBN 964-90861-4-5

تهران، خیابان بزرگمهر غربی، بین قدس و وصال، شمارهٔ ۱۰۳، همکف. تلفکس ۶۴۶۷۲۲۶

حقوق چاپ و نشر برای ناشر محفوظ است.

فهرست مطالب

۱ - مقدمه ۱۳
۱-۱ انتقال گرمای هدایتی ۱۳
۱-۲ ضریب هدایت گرمایی ۱۶
۱-۳ انتقال گرمای جابه‌جایی ۱۸
۱-۴ انتقال گرمای تابشی ۱۹
۱-۵ ابعاد و واحدها ۲۰
۱-۶ خلاصه ۲۳
سؤالات مرور فصل ۲۳
فهرست مثال‌های حل شده ۲۴
مسائل ۲۴
مسائل طراحی ۲۵
مراجع ۲۶

۲- هدایت حالت پایدار - یک بعدی ۲۷
۲-۱ مقدمه ۲۷
۲-۲ دیواره تخت ۲۷
۲-۳ نارسانایی و مقادیر R ۲۸
۲-۴ سیستم‌های شعاعی - استوانه‌ها ۲۸
۲-۵ ضریب انتقال گرمای کل ۳۱
۲-۶ ضخامت بحرانی عایق ۳۳
۲-۷ سیستم‌های با چشمه گرمایی ۳۴
۲-۸ استوانه با چشمه‌های گرمایی ۳۵
۲-۹ سیستم‌های هدایت - جابه‌جایی ۳۶
۲-۱۰ پره‌ها ۳۸
۲-۱۱ مقاومت تماس گرمایی ۴۲
سؤالات مرور فصل ۴۴
فهرست مثال‌های حل شده ۴۴
مسائل ۴۴
مسائل طراحی ۵۱
مراجع ۵۳

۳- هدایت حالت پایدار - چندبعدی ۵۵
۳-۱ مقدمه ۵۵
۳-۲ تحلیل ریاضی هدایت گرمای دوبعدی ۵۵
۳-۳ تحلیل ترسیمی ۵۷
۳-۴ ضریب شکل در هدایت ۵۸
۳-۵ روش تحلیل عددی ۶۲
۳-۶ فرمول‌بندی عددی برحسب اجزای مقاومت ۶۷
۳-۷ تکرار گوس - سایدل *Gauss - Seidel iteration* ۷۰
۳-۸ ملاحظات مربوط به دقت ۷۱
۳-۹ تشابه الکتریکی برای هدایت دو بعدی ۷۸
۳-۱۰ خلاصه ۷۹
سؤالات مرور فصل ۷۹
فهرست مسائل حل شده ۷۹
مسائل ۷۹
مسائل طراحی ۸۷
مراجع ۸۸

۴- هدایت حالت ناپایدار ۸۹
۴-۱ مقدمه ۸۹
۴-۲ سیستم ظرفیت گرمایی فشرده ۹۰
۴-۳ جریان گرمای گذرا در جسم یک طرف نامحدود ۹۲
۴-۴ شرایط مرزی جابه‌جایی ۹۳
۴-۵ سیستم‌های چند بعدی ۱۰۰
۴-۶ روش عددی گذرا ۱۰۳
۴-۷ مقاومت گرمایی و فرمول‌بندی ظرفیت ۱۰۹
۴-۸ خلاصه درس ۱۱۸
سؤالات مرور فصل ۱۱۸
فهرست مثال‌های حل شده ۱۱۸
مسائل ۱۱۹
مسائل طراحی ۱۲۷
مراجع ۱۲۹

۵- اصول جابه‌جایی ۱۳۱
۵-۱ مقدمه ۱۳۱
۵-۲ جریان لزج ۱۳۱
۵-۳ جریان غیر لزج ۱۳۳
۵-۴ لایه مرزی آرام روی صفحه تخت ۱۳۵
۵-۵ معادلهٔ انرژی لایه مرزی ۱۳۸
۵-۶ لایه مرزی گرمایی ۱۳۹
۵-۷ رابطه اصطکاک سیال و انتقال گرما ۱۴۴
۵-۸ انتقال گرمای لایهٔ مرزی ناآرام ۱۴۵
۵-۹ ضخامت لایه مرزی ناآرام ۱۴۹
۵-۱۰ انتقال گرما در جریان آرام لوله ۱۵۰
۵-۱۱ جریان ناآرام در لوله ۱۵۲
۵-۱۲ انتقال گرما در جریان خیلی سریع ۱۵۳
۵-۱۳ خلاصه ۱۵۶
سؤالات مرور فصل ۱۵۸
فهرست مثال‌های حل شده ۱۵۸
مسائل ۱۵۸
مسائل طراحی ۱۶۲
مراجع ۱۶۳

۶- روابط تجربی وعملی درانتقال‌گرمای جابه‌جایی اجباری ۱۶۵
۶-۱ مقدمه ۱۶۵
۶-۲ روابط تجربی برای جریان در لوله و مجرای گرد ۱۶۶
۶-۳ جریان در عرض استوانه‌ها و کره‌ها ۱۷۳
۶-۴ جریان در عرض ردیف لوله‌ها ۱۷۹
۶-۵ انتقال گرمای فلز مایع ۱۸۲
۶-۶ خلاصه درس ۱۸۴
سؤالات مرور فصل ۱۸۴
فهرست مثال‌های حل شده ۱۸۶
مسائل ۱۸۶
مسائل طراحی ۱۹۱
مراجع ۱۹۲

۷- سیستم‌های جابه‌جایی طبیعی ۱۹۵
۷-۱ مقدمه ۱۹۵
۷-۲ انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد روی صفحهٔ تخت عمودی ۱۹۵
۷-۳ روابط تجربی جابه‌جایی آزاد ۱۹۹
۷-۴ جابه‌جایی آزاد از صفحات عمودی و استوانه‌ها ۲۰۰
۷-۵ جابه‌جایی آزاد از استوانه‌های افقی ۲۰۳
۷-۶ جابه‌جایی آزاد از صفحات افقی ۲۰۴
۷-۷ جابه‌جایی آزاد از سطوح شیب‌دار ۲۰۵
۷-۸ سیالات غیر نیوتنی ۲۰۶
۷-۹ معادلات ساده شده برای هوا ۲۰۶
۷-۱۰ جابه‌جایی آزاد از کره‌ها ۲۰۷
۷-۱۱ جابه‌جایی آزاد در فضاهای بسته ۲۰۷
۷-۱۲ ترکیب جابه‌جایی آزاد و اجباری ۲۱۳
۷-۱۳ خلاصه ۲۱۶
سؤالات مرور فصل ۲۱۷
فهرست مثال‌های حل شده ۲۱۷
مسائل ۲۱۷
مسائل طراحی ۲۲۲
مراجع ۲۲۳

۸- انتقال گرمای تابشی ۲۲۷
۸-۱ مقدمه ۲۲۷
۸-۲ سازوکار فیزیکی ۲۲۷
۸-۳ خواص تابش ۲۲۸
۸-۴ ضریب شکل در تابش ۲۳۳
۸-۵ روابط میان ضرایب شکل ۲۳۷
۸-۶ مبادله گرما میان اجسام غیرسیاه ۲۴۰
۸-۷ صفحات موازی نامحدود ۲۴۵
۸-۸ سپرهای تابشی ۲۴۶
۸-۹ تابش گاز ۲۴۸
۸-۱۰ شبکه تابشی برای محیط جاذب و تراگسیلنده ۲۵۲
۸-۱۱ مبادله تابش با سطوح آیینه‌ای ۲۵۶
۸-۱۲ مبادله‌تابش با محیط‌های تراگسیلنده، بازتابنده و جاذب ۲۵۹
۸-۱۳ فرمول‌بندی راه‌حل عددی ۲۶۱
۸-۱۴ تابش خورشیدی ۲۷۰
۸-۱۵ خواص تابشی محیط ۲۷۲
۸-۱۶ اثر تابش بر اندازه‌گیری دما ۲۷۴
۸-۱۷ ضریب انتقال گرمای تابشی ۲۷۴
۸-۱۸ خلاصه ۲۷۵
سؤالات مرور فصل ۲۷۵
فهرست مثال‌های حل شده ۲۷۵
مسائل ۲۷۶
مسائل طراحی ۲۸۵
مراجع ۲۸۹

۹- انتقال گرما در جگالش و جوش ۲۹۱
۹-۱ مقدمه ۲۹۱

۹-۲ پدیده‌های انتقال گرمای جگالشی ۲۹۱
۹-۳ عدد جگالش ۲۹۴
۹-۴ جگالش فیلمی داخل لوله‌های افقی ۲۹۴
۹-۵ انتقال گرما در جوش ۲۹۶
۹-۶ روابط ساده شده برای انتقال گرمای جوش آب ۳۰۲
۹-۷ لولهٔ گرمایی ۳۰۳
۹-۸ خلاصه و اطلاعات طرح ۳۰۵
سؤالات مرور فصل ۳۰۵
فهرست مثال‌های حل شده ۳۰۵
مسائل ۳۰۵
مسائل طراحی ۳۰۸
مراجع ۳۰۹

۱۰- مبدل‌های گرمایی ۳۱۱
۱۰-۱ مقدمه ۳۱۱
۱۰-۲ ضریب انتقال گرمای کلی ۳۱۱
۱۰-۳ ضریب فولینگ ۳۱۴
۱۰-۴ انواع مبدل‌های گرمایی ۳۱۵
۱۰-۵ اختلاف دمای متوسط لگاریتمی ۳۱۶
۱۰-۶ روش NTU – ضریب تاثیر ۳۲۰
۱۰-۷ مبدل‌های گرمایی فشرده ۳۲۷
۱۰-۸ تحلیل حالت خواص متغیر ۳۲۸
۱۰-۹ ملاحظات مربوط به طراحی مبدل گرمایی ۳۳۲
سؤالات مرور فصل ۳۳۲
فهرست مثال‌های حل شده ۳۳۳
مسائل ۳۳۳
مسائل طراحی ۳۴۰
مراجع ۳۴۳

۱۱- انتقال جرم ۳۴۵
۱۱-۱ مقدمه ۳۴۵
۱۱-۲ قانون پخش فیک ۳۴۵
۱۱-۳ پخش در گازها ۳۴۶
۱۱-۴ پخش در مایعات و جامدات ۳۴۹
۱۱-۵ ضریب انتقال جرم ۳۴۹
۱۱-۶ فرآیندهای تبخیر در جو ۳۵۱
سؤالات مرور فصل ۳۵۳
فهرست مثال‌های حل شده ۳۵۳
مسائل ۳۵۳
مراجع ۳۵۴

پیوست‌ها
A جداول ۳۵۵
جدول *A*-۱ تابع خطا / جدول *A*-۲ مقادیر خواص فیزیکی فلزات / جدول *A*-۳ خواص فیزیکی غیر فلزات / جدول *A*-۴ خواص فیزیکی مایعات اشباع / جدول *A*-۵ خواص فیزیکی هوا در فشار جو / جدول *A*-۶ خواص فیزیکی گازها در فشار جو / جدول *A*-۷ خواص بعضی از فلزات با نقطهٔ ذوب پایین / جدول *A*-۸ ضرایب پخش گازها و بخارات در هوا $25^{\circ}C$ و $1\,atm$ / جدول *A*-۹ خواص فیزیکی آب (مایع اشباع) / جدول *A*-۱۰ ضریب گسیل به هنجار سطوح مختلف / جدول *A*-۱۱ ابعاد لوله‌های فولادی / جدول *A*-۱۲ ضرایب تبدیل
B حل دقیق معادلات لایه مرزی آرام ۳۷۸
C روابط تحلیلی برای نمودارهای هیسلر ۳۸۱
D نرم افزار انتقال گرما ۳۸۵
D-۱ مقدمه / *D*-۲ برپاکردن برنامه / *D*-۳ مستند سازی دوازده برنامه / مسائل با استفاده از نرم افزار انتقال گرما
فهرست اعلام ۳۹۷

فهرست نمادها

a	سرعت موضعی صوت
a	ضریب تضعیف (فصل ۸)
A	مساحت
A	آلبدو (فصل ۸)
A_m	مساحت نیم‌رخ پره (فصل ۲)
c	گرمای ویژه، معمولاً kJ/kg°.C
C	غلظت (فصل ۱۱)
C_D	ضریب کششی، تعریف شده با معادلهٔ (۶-۱۳)
C_f	ضریب اصطکاک، تعریف شده با معادلهٔ (۵-۵۲)
c_p	گرمای ویژه در فشار ثابت، معمولا kJ/kg°.C
c_v	گرمای ویژه در حجم ثابت، معمولا kJ/kg°.C
d	قطر
D	عمق یا قطر
D	ضریب پخش (فصل ۱۱)
D_H	قطر هیدرولیک، تعریف شده با معادلهٔ (۶-۱۴)
e	انرژی داخلی واحد جرم، معمولاً kJ/kg
E	انرژی داخلی، معمولاً kJ
E	توان گسیل، معمولاً W/m² (فصل ۸)
E_{bo}	ثابت خورشیدی (فصل ۸)
$E_{b\lambda}$	توان گسیل جسم سیاه به ازای طول‌موج واحد تعریف شده با معادلهٔ (۸-۱۲)
f	ضریب اصطکاک
F	نیرو، معمولاً N
F_{m-n} یا F_{mn}	ضریب شکل تابش برای تابش از سطح m به سطح n
g	شتاب ثقل
g_c	ضریب تبدیل، تعریف شده با معادلهٔ (۱-۱۴)
$G = \frac{\dot{m}}{A}$	سرعت جرمی
G	تابش دهی (فصل ۸)
h	ضریب انتقال گرما، معمولاً W/m².C°
$\bar{h}$	ضریب انتقال گرمای متوسط
h_{fg}	آنتالپی تبخیر،
h_r	ضریب انتقال گرمای تابشی (فصل ۸)
K	ضریب انتقال جرم m/h
i	آنتالپی، معمولاً kJ/kg
I	شدت تابش
I	عایق خورشیدی (فصل ۸)
I_o	عایق خورشیدی در لبهٔ بیرونی جو
J	رادیوسیتی (فصل ۸)
k	ضریب انتقال جرم، m/h
k	ضریب هدایت گرمایی، W/m°.C
k_e	ضریب هدایت گرمایی مؤثر فضاهای بسته (فصل ۷)
k_i	ضریب پراکندگی
L	طول
L_c	طول اصلاحی پره (فصل ۲)
m	جرم
$\dot{m}$	آهنگ جرمی جریان
M	وزن مولکولی (فصل ۱۱)
n	چگالی مولکولی
N	آهنگ پخش مولال، مول بر واحد زمان (فصل ۱۱)
p	فشار، معمولاً N/m²، Pa
P	محیط
q	آهنگ انتقال گرما، kJ در واحد زمان
q''	شار گرمایی، kJ در واحد زمان در واحد مساحت
$\dot{q}$	گرمای تولید شده در واحد حجم
Q	گرما، kJ
r	شعاع یا فاصلهٔ شعاعی
r	ضریب بازیابی، تعریف شده با معادلهٔ (۵-۱۲۰)
R	شعاع ثابت
R	ثابت گازها
R_{th}	مقاومت گرمایی، معمولاً °C/W
s	یک بعد مشخصه (فصل ۴)
S	ضریب شکل هدایت، معمولاً m
t	ضخامت، به کار رفته در مسائل مربوط به پره (فصل ۲)
T , t	دما
u	سرعت
v	سرعت
v	حجم مخصوص، معمولاً m³/kg
V	سرعت
V	حجم مولکولی (فصل ۱۱)
W	وزن معمولاً N
x, y, z	مختصات مکانی در دستگاه قائم
$\alpha = \frac{k}{\rho c}$	ضریب پخش گرمایی، معمولاً m^2/s
α	ضریب جذب (فصل ۸)
α	ضریب تطابق (فصل ۱۲)

α زاویهٔ ارتفاع خورشیدی، درجه (فصل ۸)

β ضریب انبساط حجمی، ۱/K

β ضریب دمایی ضریب هدایت گرمایی، ۱/°C

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ نمای هم‌آنتروپی، بی‌بعد

Γ جریان جرم‌چگالیده به‌ازای واحد عمق صفحه (فصل ۹)

δ ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی

δ_t ضخامت لایه مرزی گرمایی

ε ضریب تأثیر مبدل گرمایی

ϵ ضریب گسل

ϵ_H ، ϵ_M ضریب پخش گردابی گرما و اندازهٔ حرکت (فصل ۵)

$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta}$ نسبت ضخامت لایه مرزی گرمایی به ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی

η متغیر تشابه، تعریف شده با معادلهٔ (B - ۶)

η_f بازده پره، بی‌بعد

θ زاویه در دستگاه مختصات کروی یا استوانه‌ای

θ اختلاف دما، $T - T_{\text{مرجع}}$ برای سیستم‌های مختلف، دمای مرجع متفاوت انتخاب می‌شود (فصول ۲ تا ۴ را ملاحظه کنید)

λ طول‌موج

λ پویش آزاد متوسط (فصل ۷)

μ لزجت دینامیکی

ν لزجت سینماتیکی، m^2/s

ν بسامد تابش (فصل ۸)

ρ چگالی، معمولاً kg/m^3

ρ ضریب بازتاب (فصل ۸)

σ ثابت استفان بولتزمن

σ کشش سطحی، میان‌سطح مایع - بخار (فصل ۹)

τ زمان

τ تنش برشی میان لایه‌های سیال

τ ضریب تراگسیل (فصل ۸)

ϕ زاویه در دستگاه مختصات کروی یا استوانه‌ای

ψ تابع جریان

گروه‌های بی‌بعد

$Bi = \frac{hs}{k}$ عدد بیو

$FO = \frac{\alpha\tau}{s^2}$ عدد فوریه

$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$ عدد گراشف

$Gr^* = Gr\,Nu$ عدد گراشف پیراسته برای شار گرمایی ثابت

$Gz = Re\,Pr\,\frac{d}{L}$ عدد گراتز

$Kn = \frac{\lambda}{L}$ عدد نودسن

$Le = \frac{\alpha}{D}$ عدد لویس (فصل ۱۱)

$M = \frac{u}{a}$ عدد ماخ

$Nu = \frac{hx}{k}$ عدد نوسلت

$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}x}{k}$ عدد نوسلت متوسط

$Pe = Re\,Pr$ عدد پکلت

$Pr = \frac{c_p\mu}{k}$ عدد پر اندل

$Ra = Gr\,Pr$ عدد ری لی

$Re = \frac{\rho u x}{\mu}$ عدد رینولدز

$Sc = \frac{\nu}{D}$ عدد اشمیت (فصل ۱۱)

$Sh = \frac{Kx}{D}$ عدد شروود (فصل ۱۱)

$St = \frac{h}{\rho c_p u}$ عدد استانتون

$St = \frac{\bar{h}}{\rho c_p u}$ عدد استانتول متوسط

پانویس‌ها

aw شرایط دیوار بی‌دررو

b مربوط به شرایط جسم سیاه (فصل ۸)

b ارزیابی شده در شرایط کپه‌ای

d بر اساس قطر

f ارزیابی شده در شرایط فیلم

g شرایط بخار اشباع (فصل ۹)

i شرایط اولیه یا ورودی

L بر اساس طول صفحه

m شرایط جریان متوسط

n و m موقعیتهای گرهی در راه حل عددی را نشان می‌دهد (فصل‌های ۳ و ۴ را ببینید)

o شرایط جریان رکود (فصل ۵) یا حالت اولیه در لحظهٔ صفر را نشان می‌دهد

r در موقعیت شعاعی مشخص

s ارزیابی شده در حالت محیط

w ارزیابی شده در شرایط دیوار

x موقعیت موضعی را نسبت به مختص x نشان می‌دهد

* (بالانویس) خاصه‌های ارزیابی شده در دمای مرجع که با معادله (۵-۱۲۴) داده می‌شود

∞ ارزیابی شده در شرایط جریان آزاد

پیش‌گفتار

در این کتاب اصول انتقال گرما به طور مقدماتی بررسی می‌شود و مفاد کافی برای یک ترم را داراست و می‌توان آن را در سطح سوم دانشکده یا بالاتر، بسته به هدف آن دوره، تدریس کرد. زمینه‌ای در معادلات دیفرانسیل عادی به درک صحیح مطالب آن کمک می‌کند. آشنایی کلی با مکانیک سیالات برای درک بحث‌های مربوط به جابه‌جایی مفیدست ولیکن ضروری نیست. مفاهیم توازن انرژی ترمودینامیکی نیز در بسط‌های تحلیلی مختلف سودمند است.

مطالب به همان صورت کلاسیک و به شکل بحث‌های جداگانه برای هدایت، جابه‌جایی و تابش عرضه می‌شود و تأکید می‌شود که سازوکار فیزیکی انتقال گرمای جابه‌جایی، نوعی هدایت از لایهٔ ساکن سیال در نزدیکی سطح انتقال گرما می‌باشد. در سراسر کتاب بر درک فیزیکی تأکید شده است، گرچه هم‌زمان برای حالاتی که استفاده از راه حل تحلیلی ساده در موردشان امکان ندارد به داده‌های تجربی با معنی تکیه شده است.

هدایت را از نظر تحلیلی و عددی بررسی کرده‌ایم به طوری که خواننده از طریق راه حل‌های تحلیلی و نیز ابزارهای مهم تحلیل عددی که باید اغلب در عمل به کار رود، بر موضوع بصیرت می‌یابد. در ارائه انتقال گرمای جابه‌جایی نیز روش مشابهی دنبال می‌شود. برای ارائه تصویر فیزیکی فرآیند جابه‌جایی از تحلیل انتگرالی لایه‌های مرزی جابه‌جایی آزاد و اجباری استفاده می‌شود. از این بیان فیزیکی می‌توان به نتایجی رسید که طبیعتاً به نمایش روابط تجربی و عملی در محاسبهٔ ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی منجر می‌شود. از آنجا که روش شبکه‌ای تابش وسیلهٔ تدریس ساده‌تری است، در معرفی تحلیل سیستم‌های تابش وسیعاً از آن استفاده شده و بعداً فرمول‌بندی عمومی‌تر آن ارائه می‌شود.

دستگاه معادلات غیرخطی که به راه حل‌های تکراری نیاز دارد نیز در فصول مربوط به هدایت و تابش بحث می‌شود.

روش‌های "لگاریتم اختلاف دمای متوسط" و "ضریب تأثیر" در تحلیل مبدل گرمایی ارائه می‌شود زیرا هر دو کاربرد زیادی داشته و هر کدام برای طراح دارای مزیّت مربوط به خود است. معرفی مختصری از پخش و انتقال جرم برای آشنایی خواننده با این فرآیندها و تأیید مؤکد تشابه مهم بین انتقال گرما، جرم و اندازهٔ حرکت، ارائه شده است.

مسائل در انتهای هر فصل آورده شده‌اند. بعضی از این مسائل عادی بوده و برای آشنایی دانشجو با عملیات عددی و مرتبهٔ بزرگی سنجه‌های انتقال گرما است. در سایر مسائل نیاز به آن است که دانشجو اصول اساسی را در موقعیت‌های جدید به‌کار برده، معادلات مربوطه را به‌دست آورده، بدین ترتیب موضوع را بسط دهد. هر دو نوع مسائل مهم‌اند.

در پایان هر مجموعه از مسائل، بخشی به عنوان «مسائل طراحی» آورده شده است. مسائل این بخش‌ها انتها باز بوده، یک جواب منحصر به فرد ندارند. در بعضی موارد صورت این مسائل اندکی طولانی‌تر شده و فرایند حل آن نیاز به تصمیم گیری معقول دارد . حدود ۱۰۰ مسأله از این نوع را در این کتاب آورده‌ایم.

موضوع انتقال گرما "ایستا" نیست. پیشرفت‌های جدید کاملاً منظم حاصل می‌شوند و مرتباً راه حل‌های تحلیلی و داده‌های تجربی بهتری به طور مرتّب در اختیار اشخاص حرفه‌ای انجام می‌گیرند. به دلیل فراوانی اطلاعات موجود در ادبیات تحقیقی، چنان‌چه بسیاری از اختلافات جزئی، نشان داده شده، بسط یابند دانشجوی مبتدی را گیج می‌کند. این کتاب به عنوان کتاب درسی مقدماتی طراحی شده است و از این رو مؤلف ، این ادبیات را به کمک یافته‌ها و معادلات عرضه شده که می‌توانند سریعاً مورد استفادهٔ خواننده قرار گیرد، تفسیر می‌کند. امیدوارم که توجه دانشجو به آثار جامع‌تری جلب شود که به دفعات کافی از آنها به منظور تاکید بر عمق بیش‌تر موجود در بسیاری از جنبه‌های انتقال گرما یاد شده است. در انتهای هر فصل مراجعی آمده است که دانشجوی جدّی را به ادبیات انتقال گرمایی که از طریق آن می‌توانند بررسی‌های بیش‌تری را انجام دهد رهنمون می‌شود.

روشن است که یک کتاب درسی در هشتمین ویرایش خود توافق‌ها و فرآیندهای تکاملی که طی سال‌های گذشته را منعکس می‌کند، این کتاب مستثنی نیست. با وجودی که سازو کارهای فیزیکی اساسی انتقال گرما تغییر نکرده‌اند، روش‌های تحلیلی و داده‌های تجربی مرتباً بازنگری شده و بهبود یافته‌اند. یک هدف ویرایش جدید این است که در عین حفظ روش ساده قابل درک برای

دانشجوی مبتدی، اطلاعات جدید نیز عرضه نماید.

در این کتاب عمدتاً از دستگاه واحدهای *SI* (متریک) استفاده شده است. چون از دستگاه واحدهای بی‌تی‌یو - فوت - پوند هنوز به طور گسترده استفاده می‌شود، جواب‌ها و مراحل میانی مثال‌ها را گاهی بر حسب این واحدها ارائه کرده‌ایم. چند مثال و مسأله کاملاً بر حسب واحدهای انگلیسی هستند. بعضی از شکل‌ها، مختصات دو تایی دارند که هر دو دستگاه واحد را نشان می‌دهد. بدین ترتیب دانشجو می‌تواند در دورهٔ انتقالی و قبل از متریک شدن کامل واحدها، «دوزبانه» عمل کند.

تمام جنبه‌های انتقال گرما را نمی‌توان در یک دوره درسی سه ماهه یا شش ماهه ارائه کرد، اما امیدواریم که تنوع جنبه‌ها و مسائل، انعطاف لازم برای بسیاری از کاربردها را تأمین کند.

آنچه جدید است

در این ویرایش در پاسخ به پیشنهاد افرادی که ویرایش قبل را مرور و از آن استفاده کرده‌اند، در سراسر کتاب تغییراتی داده‌ام. فصل مربوط به جنبه‌های خاص را حذف کرده‌ام اما جنبه‌های مربوط به لوله‌های گرمایی و انتقال گرمای چگالی پایین را به ترتیب به فصل‌های ۹ و ۷ انتقال داده‌ام. مثال‌های جدید و تعداد زیادی مسأله تازه اضافه کرده و کلاً بیش از ۱۱۰۰ مسأله گنجانده‌ام . همان‌طور که قبلاً گفتم، ۱۰۰تای این مسائل مربوط به طراحی بوده، دارای فرمت انتها باز هستند. مسائل طراحی انتها باز موجود در نرم افزار انتقال گرما نیز بخش مهمی از کل ساختار مسائل هستند.

اکنون کامپیوتر بهترین وسیله برای حل بسیاری از مسائل انتقال گرماست. صرف‌نظر از نوع کامپیوتر ، همواره درک اصول اساسی و تهیه الگوریتم‌های محاسباتی، ضروری است. کتاب حاضر در جستجوی برآوردنِ این نیاز است، به‌ویژه در بخش‌هایی از فصول ۳، ۴ و ۸ که به راه حل‌های عددی مربوط می‌شوند.

در سراسر کتاب برای مثال‌ها، عنوان انتخاب شده است. به علاوه، عنوان مثال‌ها را در پایان هر فصل و پیش از مجموعه مسائل آورده‌ایم تا خواننده مرجع سریعی برای مسألهٔ خاصی که وقت مناسب انجام آن است، در اختیار داشته باشد.

مواد تکمیلی

یک بستهٔ نرم افزاری برای کسانی که مایلند از ریزکامپیوترها استفاده کنند ، توسط پروفسور آلن‌دی.کرواس از مدرسه فوق لیسانس دریایی تهیه شده که در پیوست *D* ارائه شده است. این نرم افزار دارای یک دیسکت است. پیوست *D* شامل اسناد، مثال‌ها و مسائل ضروری مورد استفاده در برنامه‌هاست. برخی از مسائل طراحی انتها باز را در این نرم‌افزار آورده‌ایم تا از توان کامپیوتر بهره‌برداری شود. توجه داشته باشید که ***بدنهٔ کتاب نیاز به استفاده از این برنامه‌های کامپیوتری ندارد.*** از طرف دیگر، کاربرد هوشمندانهٔ برنامه‌ها نیاز به درک موضوع انتقال گرما دارد. بنابراین در پیوست *D* به بخش‌های مناسب کتاب ارجاع داده شده است.

راهنمای کامل حل مسائل نیز موجود است. این راهنما شامل چگونگی رهیافت مسائل طراحی انتهای هر فصل می‌باشد. برای اطمینان از دقت آن، فردی به طور مستقل مسائل جدید ویرایش هشتم را حل کرده، پس‌خوری *(Feedback)* در مورد حل مسائل ویرایش هفتم تهیه کرده است.

سپاس‌گزاری

فهرست اشخاصی که تا این مرحله از ویرایش کتاب، نظر و پیشنهاد داده‌اند واقعاً طولانی شده است. برای آنکه نام کسی را از قلم نینداخته باشم، امیدوارم که سپاس‌گزاری کلی از تمام مرور کنندگان ویرایش‌های قبلی، تشکر صمیمانهٔ مرا از کمک و تشویق این اشخاص بیان کند.

جی.پی.هولمن

مک گراوهیل مایل است از تلاش‌های مرور کنندگانْ ویرایش هشتم به شرح زیر سپاس‌گزاری کند:

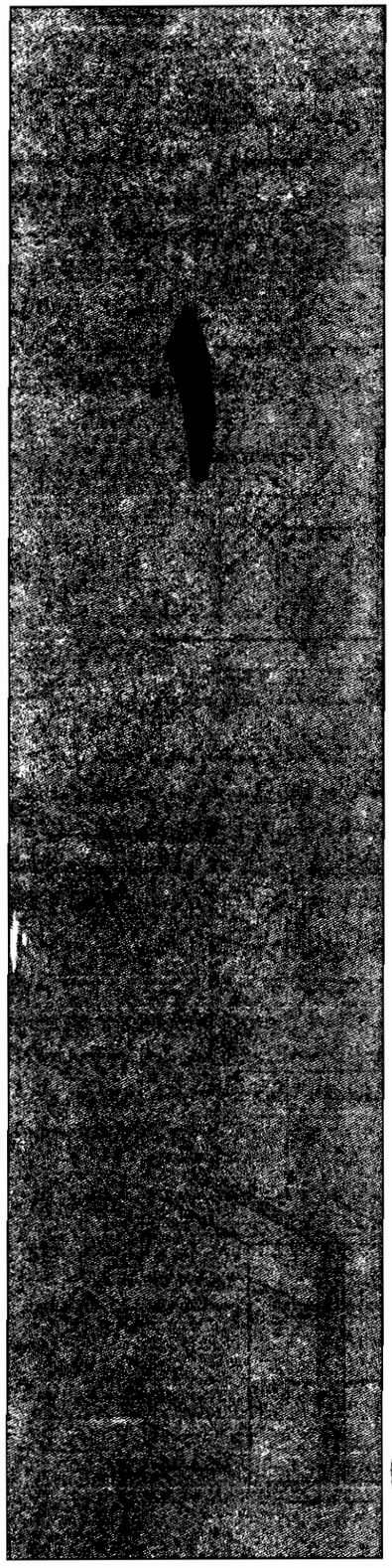
John Biddle، دانشگاه پلی تکنیک ایالت کالیفرنیا؛ *Gregory Davis*، دانشگاه فن آوری لاورنس؛ *Burton Eno*، دانشگاه فلوریدای مرکزی؛ *Charles Forsberg*، دانشگاه هافسترا؛ *Edwin Hippo*، دانشگاه ایلینویز جنوبی؛ *Richard Ulrich*، دانشگاه یونگ بریگهام.

مقدمه مترجم

هدف این ترجمه ارائهٔ کتابی علمی و خوب به دانشجویان و مهندسان است.

بر اهل علم و فن پوشیده نیست که تئوری چراغ راهنما و چکیدهٔ تجربیات فضلا و اندیشمندان گذشته است که حاصل تجربیات خود را به صورت نظریه، قانون، فرمول و ... نوشته‌اند. این نوشته‌ها را تنها در پرتو عمل می‌توان خوب درک کرد و حتی بسط و گسترش داد و از مزایای مترتب بر آن سود برد. مطالب این کتاب نیز چیزی جز این نیست. باید فرضیات در نظر گرفته شده برای رسیدن به هر فرمول و معادله را به خوبی درک کرد و تنها به این وسیله است که فرمول‌ها تابندگی خود را نشان می‌دهند. ممکن است در مورد مسأله‌ای که شما در دست دارید فرضیات دیگری لازم شود و آنجاست که آن فرمول به خصوص کارایی نداشته، باید معادلات خودتان را به‌دست آورید.

همان‌طور که نویسنده ذکر می‌کند مطالب این کتاب بریده‌هایی از نوشته‌های علمی مربوط به انتقال گرماست که با زبانی ساده به خواننده ارائه می‌شود. توصیه می‌شود که برای درک دقیق هر مطلب به مراجع یاد شده و حتی جدید و مقاله‌های موجود در مجله‌های علمی به ویژه در زمینهٔ انتقال گرما مراجعه شود.



مقدمه

انتقال گرما علم پیش‌بینی انتقال انرژی احتمالی ناشی از اختلاف دما بین اجسام مادی است. در ترمودینامیک این انتقال انرژی به عنوان گرما تعریف می‌شود. علم انتقال گرما نه تنها می‌خواهد چگونگی انرژی گرمایی انتقالی را توضیح دهد بلکه آهنگ این مبادله را در شرایط مشخص و معین پیش‌بینی می‌کند. هدف مورد نظر در تحلیل ما، **آهنگ** انتقال گرما است و این، تفاوت میان انتقال گرما و ترمودینامیک است. ترمودینامیک سیستم‌ها را در حالت تعادل بررسی می‌کند و نمی‌توان از آن برای پیش‌بینی مقدار انرژی لازم در تبدیل سیستم از یک حالت تعادل به حالت تعادلی دیگر و یا برای پیش‌بینی سرعت یک تبدیل استفاده کرد زیرا سیستم در طول این فرآیند، در حال تعادل نیست. انتقال گرما قواعد تجربی بیش‌تری در اختیار ما قرار می‌دهد تا با آنها بتوانیم آهنگ انتقال گرما را تعیین کنیم و بدین وسیله اصل اول و دوم ترمودینامیک تکمیل می‌شود. قواعد تجربی‌ای که به عنوان پایهٔ موضوع انتقال گرما به کار می‌روند مانند علم ترمودینامیک تقریباً ساده بوده، می‌توان آنها را به آسانی گسترش داد تا انواعی از وضعیت‌های عملی را در برگیرند.

نمونه‌ای از مسائل مورد بررسی در ترمودینامیک و انتقال گرما، خنک شدن میله فولادی گرم در ظرف آب است. از ترمودینامیک می‌توان برای پیش‌بینی دمای تعادل نهایی میله فولادی - آب استفاده کرد ولی این علم به ما نمی‌گوید که چه مدت طول می‌کشد تا به شرایط تعادل برسیم و یا اینکه دمای میله پس از یک مدت زمان و قبل از برقراری شرایط تعادل چه‌قدر است. انتقال گرما را می‌توان برای پیش‌بینی دمای میله و آب به صورت تابعی از زمان به کار برد.

بسیاری از خوانندگان با واژه‌هایی که برای نشان دادن سه حالت انتقال گرما به کار می‌روند آشنایی دارند: هدایت، جابه‌جایی و تابش. ما در این فصل در جستجوی توضیح کیفی سازوکار این حالات هستیم به طوری که هر کدام در ابعاد صحیح خود بررسی می‌شود. در فصول بعدی در مورد این سه نوع انتقال گرما به طور مشروح بحث می‌کنیم.

❑ ۱-۱ انتقال گرمای هدایتی

تجربه نشان داده است که در صورت وجود گرادیان دما در جسم، انتقال گرمایی از ناحیه دمابالا به ناحیهٔ دماپایین وجود دارد. می‌گوییم انرژی به طریق هدایت انتقال یافته و آهنگ انتقال گرما به ازای واحد مساحت متناسب است با گرادیان دمای عمودی:

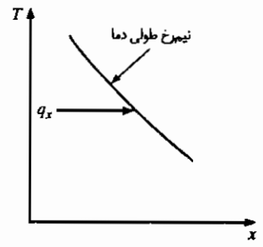
$$\frac{q}{A} \sim \frac{\partial T}{\partial x}$$

با جای‌گزینی ثابت نسبت داریم:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۱-۱)$$

که q آهنگ انتقال گرما و $\frac{\partial T}{\partial x}$ گرادیان دما در جهت جریان گرماست. ثابت مثبت k را

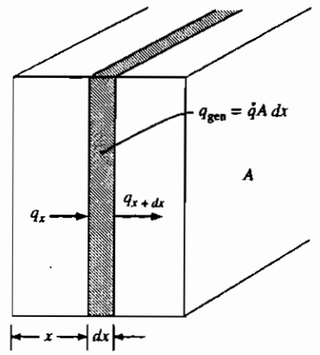
ضریب هدایت گرمایی ماده می‌نامند و علامت منفی برای صدق قانون دوم ترمودینامیک است؛ بدین معنی که گرما باید مثل دستگاه مختصات شکل ۱-۱ نسبت به دما سیر نزولی داشته باشد. معادلهٔ (۱-۱) را به یاد ریاضی - فیزیک‌دان فرانسوی، ژوزف فوریه، که در بررسی تحلیلی انتقال گرمای هدایتی سهم بزرگی دارد قانون فوریهٔ هدایت گرما می‌نامند. از نظر اهمیت باید گفت که معادلهٔ (۱-۱) معادلهٔ معرف ضریب هدایت گرماست و در دستگاه واحدی که جریان گرما بر حسب وات بیان می‌شود واحد k وات بر متر بر درجه سلسیوس است.



شکل ۱-۱ طرح نشان‌دهنده جهت جریان گرما.

اکنون معادلهٔ اساسی حاکم بر انتقال گرما در جسم صلب را با استفاده از معادلهٔ (۱-۱) به عنوان نقطهٔ آغاز، تعیین می‌کنیم.

سیستم یک‌بعدی شکل ۱-۲ را ملاحظه کنید. اگر سیستم در حالت پایدار باشد، یعنی دما با زمان تغییر نکند، مسأله ساده بوده، فقط از معادلهٔ (۱-۱) انتگرال گرفته، مقادیر مناسب را جای‌گزین کرده، کمیّت مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. گرچه در صورت تغییر دمای جسم بر حسب زمان و یا وجود چشمه یا چاه گرمایی داخل جسم، وضعیت پیچیده‌تر می‌شود. ما مورد کلی را در نظر می‌گیریم که دما برحسب زمان تغییر کرده و احتمالاً داخل جسم چشمه‌های گرمایی موجود است. معادلهٔ توازن انرژی برای جزئی به ضخامت dx را می‌توان چنین نوشت:



شکل ۱-۲ حجم جزئی برای تحلیل هدایت گرمای یک بعدی.

(انرژی هدایتی وارد به سطح سمت چپ + انرژی ایجاد شده در داخل جزء = تغییر در انرژی داخلی + انرژی هدایتی خروجی از سطح سمت راست)

این انرژی‌ها چنین است:

$$q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \quad = \text{انرژی ورودی به سطح سمت چپ}$$

$$\dot{q}A\,dx \quad = \text{انرژی ایجاد شده در داخل جزء}$$

$$\rho cA\frac{\partial T}{\partial \tau}\,dx \quad = \text{تغییر انرژی داخلی}$$

$$q_{x+dx} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big]_{x+dx} \quad = \text{انرژی خروجی از سطح سمت راست}$$

$$= -A\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]$$

که در آن، $\dot{q}$ = انرژی ایجاد شده در واحد حجم، W/m^3؛
c = گرمای ویژهٔ ماده، $J/kg°C$؛
ρ = چگالی، kg/m^3.

با ترکیب روابط فوق داریم:

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x} + \dot{q}A\,dx = \rho cA\frac{\partial T}{\partial \tau}\,dx - A\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right].$$

و یا:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} = \rho c\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۱-۲)$$

این معادله هدایت گرمای یک بعدی است. برای بررسی جریان گرمای بیش‌تر از یک بعدی، فقط لازم است که گرمای هدایت شده به داخل و خارج از واحد حجم را در امتداد سه محور مختصات (شکل ۱-۳الف) ارزیابی کنیم. معادلهٔ توازن انرژی را می‌نویسیم:

$$q_x + q_y + q_z + q_{gen} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{dE}{d\tau}$$

و انرژی‌ها چنین است:

$$q_x = -kdy\,dz\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dy\,dz$$

$$q_y = -k\,dx\,dz\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_{y+dy} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy\right]dx\,dz$$

$$q_z = -k\,dx\,dy\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$q_{z+dz} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz\right]dx\,dy$$

$$q_{\text{تولید شده}} = \dot{q}\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{dE}{d\tau} = \rho c\,dx\,dy\,dz\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

بنابر این معادلهٔ کلی هدایت گرمای سه‌بعدی چنین می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

وقتی ضریب هدایت گرمایی ثابت باشد معادلهٔ (۱-۳) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۱-۳الف)$$

که کمیّت $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ به **ضریب پخشیدگی گرمایی** ماده موسوم است. هر چه مقدار α بزرگ‌تر باشد گرما سریع‌تر در ماده پخش می‌شود. این موضوع را می‌توان با بررسی کمیت‌های تشکیل دهندهٔ α ملاحظه کرد. زیاد بودن مقدار α می‌تواند ناشی از بالا بودن ضریب هدایت گرمایی باشد، که نشان‌دهنده آهنگ سریع انتقال گرما است، یا پایین بودن ظرفیت گرمایی ρc. پایین بودن مقدار ظرفیت گرمایی به معنی آنست که مقدار کمی از انرژی در حال عبور از جسم، برای افزایش دمای جسم، جذب شده و انرژی بیش‌تری انتقال‌یافته است.

در مشتق‌های فوق، عبارت مربوط به مشتق در $x + dx$ را بسط سری تیلور داده و تنها دو جملهٔ اول سری را به کار برده‌ایم.

معادلهٔ (۱-۳الف) را می‌توان در مختصات استوانه‌ای یا کروی چنین نوشت:

مختصات استوانه‌ای

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۱-۳ب)$$

مختصات کروی

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

$$+ \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۱-۳پ)$$

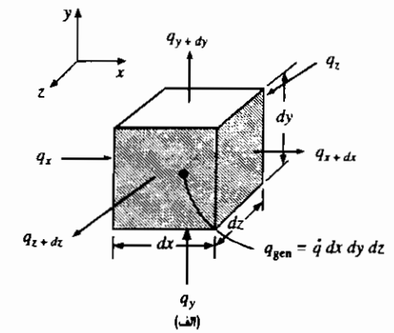
دستگاه‌های مختصات به کار رفته در معادله‌های (۱-۳ب) و (۱-۳پ) به ترتیب در شکل‌های (۱-۳ب) و (۱-۳پ) نشان داده شده‌اند.

بسیاری از مسائل عملی شامل حالات خاصی از معادلات کلّی فوق می‌شوند. برای راهنمایی آنچه در فصل‌های بعد ارائه می‌شود، صورت ساده شدهٔ معادلات کلی فوق را برای چند مورد که از نظر عملی قابل توجهند نشان می‌دهیم:

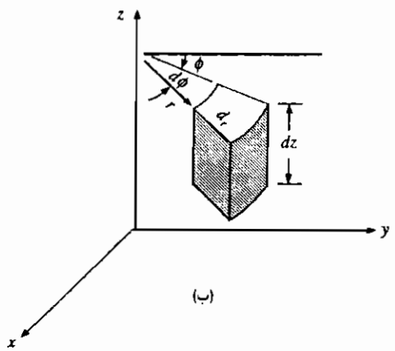
جریان گرمای یک‌بعدی حالت پایدار (بدون ایجاد گرما):

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad (۱-۴)$$

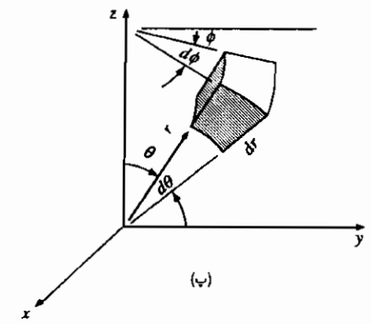
توجه کنید که این معادله همان معادلهٔ (۱-۱) است وقتی که q مقدار ثابتی باشد.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۱-۳ حجم جزئی برای تحلیل هدایت گرمای سه‌بعدی الف) مختصات قائم؛ ب) مختصات استوانه‌ای پ) مختصات کروی.

جریان گرمای یک‌بعدی حالت پایدار در مختصات استوانه‌ای (بدون ایجاد گرما):

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (۱-۵)$$

جریان گرمای یک‌بعدی حالت پایدار با چشمه‌های گرمایی:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (۱-۶)$$

هدایت حالت پایدار و دوبعدی بدون چشمه‌های گرمایی:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (۷-۱)$$

❑ ۱-۲ ضریب هدایت گرمایی

معادلهٔ (۱-۱) معادلهٔ معرف ضریب هدایت گرمایی است. بر پایهٔ این تعریف می‌توان با استفاده از اندازه‌گیری‌های تجربی، ضریب هدایت گرمایی مواد مختلف را تعیین کرد. در مورد گازهای با دمای نسبتاً پایین می‌توان از تعبیرهای تحلیلی در نظریه جنبش‌شناسی گازها برای پیش‌بینی دقیق مقادیر مشاهده شدهٔ تجربی استفاده کرد. در بعضی موارد برای پیش‌بینی ضرایب هدایت گرمایی در مایعات و جامدات نظریه‌هایی در دست‌اند ولی به طور کلی بسیاری از سؤالات و مفاهیم در بررسی مایعات و جامدات هنوز نیاز به روشن‌شدن دارند.

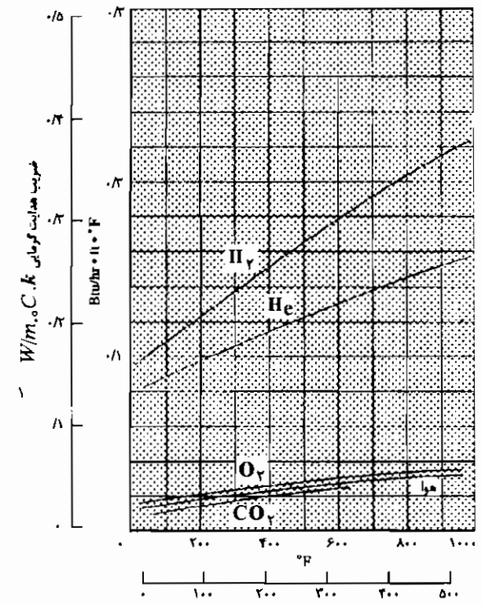
سازوکار هدایت گرمایی در یک گاز، ساده است. انرژی جنبشی ملکول با دمای آن مشخص می‌شود. از این‌رو در ناحیهٔ دماپالا، ملکول‌ها سرعت بیش‌تری دارند تا در نواحی دماپایین‌تر. ملکول‌ها در حرکت تصادفی مداوم بوده، با یکدیگر برخورد کرده، انرژی و اندازه حرکت مبادله می‌کنند. چه گرادیان دما در گاز موجود باشد چه نباشد ملکول‌ها این حرکت تصادفی را دارند. اگر ملکولی از منطقه دما بالا به منطقه دماپایین‌تر حرکت کند، به آن منطقه از سیستم، انرژی جنبشی منتقل می‌کند و این انرژی از طریق تصادم با ملکول‌های دارای انرژی پایین‌تر منتقل می‌شود.

در جدول‌های ۱-۱ ضریب‌های هدایت گرمایی چند ماده آمده است تا مرتبهٔ بزرگی نسبی مورد انتظار در عمل را نشان دهد. جدول مربوط به اطلاعات کامل‌تر در پیوست A آورده شده است. به طور کلی ضریب هدایت گرمایی شدیداً به دما بستگی دارد.

وقتی جریان گرمایی به وات باشد ضریب هدایت گرمایی به وات بر متر بر درجه سلسیوس است. توجه کنید که **آهنگ** گرما نیز در اینجا وجود دارد و مقدار عددی ضریب هدایت گرمایی نشان‌دهندهٔ سرعت جریان گرما در ماده مشخص است. آهنگ انتقال انرژی در مدل ملکولی بالا چگونه به حساب می‌آید؟ واضح است که هر چه ملکول‌ها سریع‌تر حرکت کنند، سریع‌تر انتقال انرژی می‌دهند. بنابراین ضریب هدایت گرمایی گاز باید به دما بستگی داشته باشد. بررسی تحلیلی ساده نشان می‌دهد که ضریب هدایت گرمایی گاز با ریشهٔ دوم دمای مطلق تغییر می‌کند. (می‌توان به خاطر آورد که سرعت صوت در گاز با ریشهٔ دوم دمای مطلق تغییر می‌نماید؛ این سرعت تقریباً مساوی سرعت متوسط ملکول‌هاست.) شکل ۱-۴ ضریب هدایت گرمایی بعضی از گازها را نشان می‌دهد. ضریب هدایت گرمایی بسیاری از گازها در فشارهای متوسط فقط تابع دماست. این بدان معنی است که اطلاعات مربوط به گاز که برای فشار یک آتمسفر (atm) در پیوست "A" داده شده‌اند را می‌توان برای دامنهٔ نسبتاً گسترده‌ای از فشار به کار برد. وقتی فشار گاز هم مرتبهٔ فشار بحرانی آن شود، عموماً در مواجهه با رفتار گاز غیر کامل، باید برای اطلاع دربارهٔ ضریب هدایت گرمایی به منابع دیگری رجوع کنید.

☑ **جدول ۱-۱** ضریب هدایت گرمایی مواد مختلف در °C.

ماده	ضریب هدایت گرمایی k $\frac{W}{m.°C}$	ضریب هدایت گرمایی k $\frac{Btu}{h.ft.°F}$
فلزات:		
نقره (خالص)	۴۱۰	۲۳۷
مس (خالص)	۳۸۵	۲۲۳
آلومینیم (خالص)	۲۰۲	۱۱۷
نیکل (خالص)	۹۳	۵۴
آهن (خالص)	۷۳	۴۲
فولادکربن، ۱٪کربن	۴۳	۲۵
سرب (خالص)	۳۵	۲۰/۳
فولادکرم ـ نیکل(۱۸٪کرم، ۸٪ نیکل)	۱۶/۳	۹/۴
جامدات غیرفلز:		
الماس	۲۳۰۰	۱۳۲۹
کوارتز، موازی محور	۴۱/۶	۲۴
منیزیت	۴/۱۵	۲/۴
مرمر	۲/۹۴-۲/۰۸	۱/۷-۱/۲
شن	۱/۸۳	۱/۰۶
شیشه، پنجره	۰/۷۸	۰/۴۵
افرا یا بلوط	۰/۱۷	۰/۰۹۶
خاک اره	۰/۵۹	۰/۰۳۴
پشم شیشه	۰/۰۳۸	۰/۰۲۲
یخ	۲/۲۲	۱/۲۸
مایعات:		
جیوه	۸/۲۱	۴/۷۴
آب	۰/۵۵۶	۰/۳۲۷
آمونیاک	۰/۵۴۰	۰/۳۱۲
روغن روانکاری، SAE ۵۰	۰/۱۴۷	۰/۰۸۵
فریون ۱۲، CCl_2F_2	۰/۰۷۳	۰/۰۴۲
گازها:		
هیدروژن	۰/۱۷۵	۰/۱۰۱
هلیم	۰/۱۴۱	۰/۰۸۱
هوا	۰/۰۲۴	۰/۰۱۳۹
بخار آب (اشباع)	۰/۰۲۰۶	۰/۰۱۱۹
گاز کربنیک	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۸۴۴

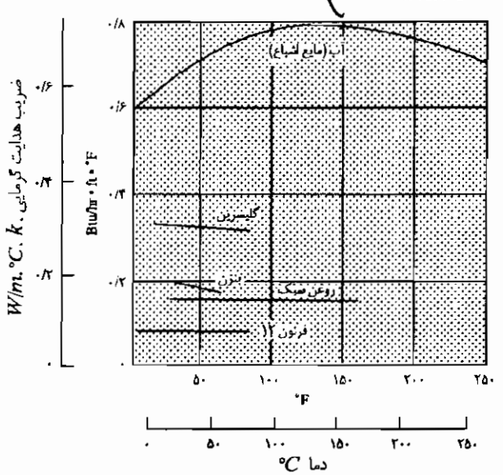


شکل ۱-۴ ضرایب هدایت گرمایی بعضی گازهای نمونه

$$\left[1 \frac{W}{m.°C} = 0.5779 \frac{Btu}{h.ft.°F}\right]$$

سازوکار فیزیکی هدایت گرمایی در مایعات از نظر کیفی مثل گازهاست؛ گرچه وضعیت نسبتاً پیچیده‌تر است زیرا ملکول‌ها خیلی به هم نزدیک بوده، میدان‌های نیروی ملکولی اثر شدیدی بر تبادل انرژی در فرآیند تصادم دارد. شکل ۱-۵ ضریب گرمایی بعضی از مایعات را نشان می‌دهد.

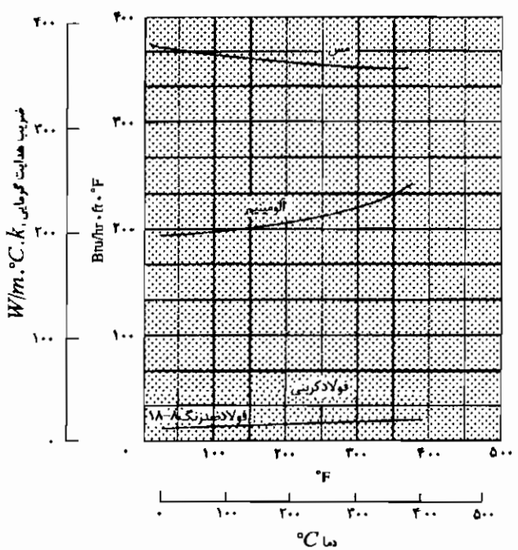
جریان گرما در دستگاه انگلیسی واحدها برحسب واحد گرمایی انگلیسی بر ساعت ($\frac{Btu}{hr}$)، مساحت به فوت مربع و دما به درجه فارنهایت است. در این صورت، ضریب هدایت گرمایی دارای واحد $\frac{Btu}{h.ft.°F}$ است.



شکل ۱-۵ ضرایب هدایت گرمایی بعضی مایعات.

انرژی گرمایی به دو صورت در جامدات هدایت می‌شود: ارتعاش شبکه‌ای و انتقال به وسیلهٔ الکترون‌های آزاد. در هادی‌های الکتریکی خوب، تعداد نسبتاً زیادی الکترون آزاد در ساختمان شبکه‌ای ماده به این طرف و آن طرف حرکت می‌کنند. این الکترون‌ها ضمن انتقال بار الکتریکی قادرند انرژی گرمایی را از ناحیه‌ای با دمای بالاتر به ناحیه‌ای با دمای پایین‌تر، مثل گازها، منتقل کنند. این الکترون‌ها را گاهی ***گاز الکترون*** می‌نامند. ممکن است انرژی به صورت انرژی ارتعاشی نیز در ساختمان شبکه‌ای ماده انتقال یابد. گرچه، معمولاً این روش انتقال انرژی به زیادی حالت انتقال الکترونی نبوده، به این دلیل هادی‌های الکتریکی خوب تقریباً همیشه هادی‌های گرمایی خوبی هستند، مثل مس، آلومینیم و نقره، و نارساناهای الکتریکی معمولاً نارساناهای گرمایی خوبی می‌باشند. الماس در این میان کاملاً استثناست زیرا نارسانای الکتریکی است اما ضریب هدایت گرمایی آن ممکن است پنج برابر نقره یا مس باشد. همین واقعیت است که به جواهرساز توان تشخیص الماس‌های اصل از سنگ‌های ساختگی را می‌دهد. وسیلهٔ کوچکی هست که پاسخ سنگ‌ها به پالس گرمایی را اندازه می‌گیرد. الماس واقعی نسبت به سنگ پاسخ خیلی سریع‌تری دارد.

ضرایب هدایت گرمایی بعضی از جامدات در شکل ۱-۶ نشان داده شده‌اند. سایر داده‌ها در پیوست A آورده شده‌اند.



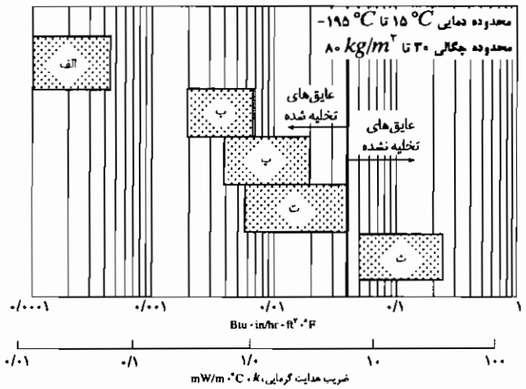
شکل ۱-۶ ضریب هدایت گرمایی بعضی جامدات.

ضرایب هدایت گرمایی مواد نارسانای مختلف نیز در پیوست A داده شده‌اند. مثلاً ضریب هدایت گرمایی پشم شیشه برابر $0.038 \frac{W}{m.°C}$ و برای شیشه پنجره برابر $0.78 \frac{W}{m.°C}$ است. در دماهای بالا ممکن است انتقال انرژی در مواد نارسانا به چند طریق

صورت پذیرد: هدایت در مادهٔ جامد رشته‌ای یا متخلل؛ هدایت در هوای محبوس در فضاهای خالی؛ و در دماهای کاملاً بالا به صورت تابش.

یک مسأله فنی پراهمیت، ذخیره و انتقال مایعات سرمازا مثل هیدروژن مایع برای مدتی طولانی است. این کاربردها موجب تولید ***فوق نارساناها*** برای استفاده در دماهای خیلی پایین (تا حدود ۲۵۰°C-) شده است. مؤثرترین این فوق نارساناها از چند لایه مادهٔ شدیداً بازتابنده تشکیل شده که با مواد نارسانا از هم جدا شده‌اند. کل سیستم را هواگیری می‌کنند تا هدایت هوا به حداقل رسیده، در نتیجه ضریب هدایت گرمایی $0/3\ \frac{mW}{m.^\circ C}$ امکان‌پذیر شود. خلاصهٔ مناسبی از ضرایب هدایت گرمایی مواد نارسانا در دمای سرمازایی در شکل ۱-۷ نشان داده شده است.

برای کسب اطلاع بیش‌تر در مورد نارسانای چند لایه به مراجع ۲ و ۳ رجوع کنید.



شکل ۱-۷ ضرایب هدایت گرمایی ظاهری مواد عایق فوق سرمایی
الف) عایق‌های چند لایه؛ ب) پودرهای کدر؛ پ) الیاف شیشه؛
ت) پودرها؛ ث) اسفنج‌ها؛ پودرها و الیاف بر اساس مرجع ۱.

$$\left[1\frac{Btu\ in}{h.ft.^\circ F} = 144\ \frac{mW}{m.^\circ C}\right]$$

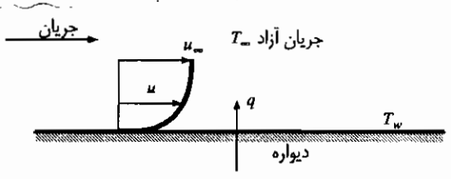
❑ ۱-۳ انتقال گرمای جابه‌جایی

واضح است که اگر صفحه فلزی گرمی را جلوی بادبزن قرار دهیم زودتر از وقتی که در معرض هوای ساکن باشد خنک می‌شود. می‌گوییم که گرما به طریق جابه‌جایی بیرون رفته است و این فرآیندها را ***انتقال گرما به طریق جابه‌جایی*** می‌نامیم. عبارت ***جابه‌جایی*** خواننده را نسبت به نوع فرآیند انتقال گرما به طور حسی آگاه می‌کند. گرچه این آگاهی حسی را باید گسترش داد تا به بررسی تحلیلی مناسب از موضوع برسیم. مثلاً می‌دانیم که سرعت وزش هوا بر روی صفحه گرم به وضوح بر آهنگ انتقال گرما تأثیر می‌بخشد. ولی آیا به صورت خطی بر خنک شدن تأثیر می‌گذارد یعنی اگر سرعت دو برابر شود آهنگ انتقال گرما دو برابر می‌شود؟ باید انتظار داشت که اگر صفحه را به جای هوا با آب خنک کنیم، آهنگ انتقال گرما فرق کند. اما باز هم سؤال این است که تفاوت چه قدر است؟ این سؤالات را می‌توان به کمک بعضی از تحلیل‌های نسبتاً اساسی فصول بعد جواب داد. فعلاً طرحی از سازوکار فیزیکی انتقال گرما به طریق جابه‌جایی ارائه داده، رابطه‌اش را با فرآیند هدایت نشان می‌دهیم.

صفحه گرم شدهٔ شکل ۱-۸ را در نظر بگیرید. دمای صفحه T_w و دمای سیال T_∞ است. سرعت جریان مطابق شکل است، یعنی به علت کنش لزجی، مقدار آن در صفحه به صفر می‌رسد. از آنجا که سرعت لایهٔ سیال در دیواره برابر صفر خواهد بود، گرما در آن نقطه باید تنها به صورت هدایت انتقال یابد. از این‌رو می‌توانیم انتقال گرما را با استفاده از معادلهٔ (۱-۱) و استفاده از ضریب هدایت گرمایی سیال و گرادیان دمای سیال در دیواره، محاسبه کنیم. پس چرا اگر گرما در این لایه به صورت هدایت جریان می‌یابد ما از انتقال گرما به طریق ***جابه‌جایی*** صحبت می‌کنیم و نیاز به این داریم که سرعت سیال را نیز در نظر بگیریم؟ جواب آنست که گرادیان دما به آهنگ گرمای دریافت شده توسط سیال بستگی دارد؛ سرعت زیاد موجب می‌شود که گرادیان دما بالا رود و غیره. از این رو گرادیان دما در دیواره به میدان جریان بستگی دارد و باید در تحلیل بعدی خود عبارتی به‌دست آوریم که این دو کمیت را به هم ربط دهد. با این وجود باید به خاطر سپرد که سازوکار فیزیکی انتقال گرما در دیواره، فرآیندی هدایتی است.

برای بیان تأثیر کلی جابه‌جایی، از قانون نیوتن در خنک کردن استفاده می‌کنیم:

$$q = hA\ (T_w - T_\infty) \qquad (۱-۸)$$



شکل ۱-۸ انتقال گرمای جابه‌جایی از صفحه.

در اینجا ملاحظه می‌شود که آهنگ انتقال گرما با اختلاف دمای کلی بین دیواره و سیال و مساحت A بستگی دارد. کمیت h را ***ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی*** می‌نامند و معادلهٔ (۱-۸) معرف آن است. در بعضی از سیستم‌ها می‌توان h را به طور تحلیلی محاسبه کرد. در وضعیت‌های پیچیده، این ضریب را باید به طریق تجربی تعیین نمود. گاهی ضریب انتقال گرما را به علت رابطه‌اش با فرآیند هدایت در لایه ساکن سیال در سطح دیواره، ***ضریب هدایت فیلم*** می‌نامند.

از معادلهٔ (۱-۸) مشخص می‌شود که اگر جریان گرما به وات باشد واحد h وات بر مترمربع بر درجه سلسیوس است.

با توجه به آنچه بحث شد می‌توان گفت که انتقال گرمای جابه‌جایی علاوه بر بستگی‌اش به‌خاصه‌های گرمایی سیال (ضریب هدایت گرمایی، گرمای ویژه، چگالی)، به لزجت سیال نیز بستگی دارد و این امری واضح است زیرا لزجت بر نیم‌رخ سرعت و در نتیجه برآهنگ انتقال انرژی درناحیهٔ نزدیک به‌دیواره تأثیر می‌گذارد.

اگر صفحه گرمی را بدون وجود منبع حرکت خارجی در هوای اتاق قرار دهیم، گرادیان چگالی در نزدیکی صفحه موجب به جنبش درآمدن هوا می‌شود. این جابه‌جایی را ***طبیعی*** یا ***آزاد***می‌نامیم زیرا مخالف جابه‌جایی ***اجباری*** است، حالتی که بادبزنی هوا را بر روی یک صفحه می وزاند. پدیده‌های جوش و چگالش نیز جزو موضوع کلی انتقال گرمای جابه‌جایی گروه‌بندی می‌شوند. حدود تقریبی ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی در جدول ۱-۲ نشان داده شده‌اند.

☑ **جدول ۱-۲** مقادیر تقریبی ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی

حالت	h $\frac{W}{m^2.^\circ C}$	h $\frac{Btu}{h.ft^2.^\circ F}$
جابه‌جایی آزاد، $\Delta T = 30^\circ C$		
صفحهٔ عمودی به ارتفاع ۱ ft [۰/۳ m] در هوا	۴/۵	۰/۷۹
استوانه افقی به قطر ۵ cm در هوا	۶/۵	۱/۱۴
استوانه افقی به قطر ۲ cm در آب	۸۹۰	۱۵۷
انتقال گرما در عرض شکاف هوای استوانه‌ای به قطر ۱/۵ cm با $\Delta T = 60^\circ C$	۲/۶۴	۰/۴۶
جابه‌جایی اجباری		
جریان هوا با سرعت ۲ $\frac{m}{s}$ روی صفحه مربعی به ضلع ۰/۲ m	۱۲	۲/۱
جریان هوا با سرعت ۳۵ $\frac{m}{s}$ روی صفحه مربعی به ضلع ۰/۷۵ m	۷۵	۱۳/۲
هوا به فشار ۲ atm با سرعت ۱۰ $\frac{m}{s}$ جاری در لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm	۶۵	۱۱/۴
آب با آهنگ ۰/۵ کیلوگرم بر ثانیه جاری در لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm	۳۵۰۰	۶۱۶
جریان هوا با سرعت ۵۰ $\frac{m}{s}$ در عرض استوانه‌ای به قطر ۵ cm	۱۸۰	۳۲
آب جوش		
در یک استخر یا ظرف	۲۵۰۰–۳۵۰۰۰	۴۴۰–۶۲۰۰
جاری در لوله	۵۰۰۰–۱۰۰۰۰۰	۸۸۰–۱۷۶۰۰
چگالش بخار آب، با فشار ۱ atm		
روی سطح عمودی	۴۰۰۰–۱۱۳۰۰	۷۰۰–۲۰۰۰
روی سطح بیرونی لوله افقی	۹۵۰۰–۲۵۰۰۰	۱۷۰۰–۴۴۰۰

❑ ۱-۴ انتقال گرمای تابشی

برخلاف سازوکارهای هدایت و جابه‌جایی که شامل انتقال انرژی در جسم مادی است، گرما می‌تواند در نواحی‌ای که خلأ کامل وجود دارد نیز انتقال یابد. سازوکار این حالت، تابش الکترومغناطیسی است. بحث خود را به تابش الکترومغناطیسی که در نتیجهٔ اختلاف دما انتشار می‌یابد و به ***تابش گرمایی*** موسوم است، محدود می‌کنیم.

ملاحظات ترمودینامیکی نشان می‌دهد* که یک تابنده گرمایی ایده‌آل یا ***جسم سیاه***، انرژی را با آهنگی متناسب با توان چهارم دمای مطلق جسم و متناسب با مساحت آن گسیل می‌دارد. بنابراین:

$$q_{\text{گسیل‌شده}} = \sigma A T^4 \qquad (۱-۹)$$

که σ ضریب تناسب بوده و به ثابت استفان بولتزمن معروف است و مقدار آن برابر $5/669 \times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2.K^4}$ می‌باشد. معادلهٔ ۱-۹ به قانون استفان بولتزمن تابش گرمایی معروف بوده، تنها در مورد اجسام سیاه به‌کار می‌رود. توجه کنید که این معادله فقط برای تابش گرمایی معتبر است؛ سایر موارد تابش الکترومغناطیسی را نمی‌توان به این سادگی بررسی کرد.

معادلهٔ (۱-۹) فقط برای تابش ***گسیل‌شده*** از جسم سیاه به‌کار می‌رود. ***مبادله*** تابشی خالص بین دو سطح متناسب با اختلاف دمای مطلق به توان چهارست؛ یعنی:

$$\frac{q_{\text{مبادلهٔ خالص}}}{A} \propto \sigma\ (T_1^4 - T_2^4) \qquad (۱-۱۰)$$

گفتیم که جسم سیاه جسمی است که طبق قانون T^4 انرژی می‌تابد. زیرا سطوح سیاه، رفتاری شبیه قطعه فلزی که با زغال سیاه شده باشد، دارد. سطوح دیگر، مثل سطح براق یا صفحهٔ فلزی صیقلی، به اندازه جسم سیاه انرژی نمی‌تابد؛ گرچه باز هم تابش کلی گسیل‌شده توسط این اجسام عموماً از قانون تناسب T_s^4 تبعیت می‌کند. برای آنکه سرشت «خاکستری» این سطوح به حساب آید، ضریب دیگری را در معادلهٔ (۱-۹) وارد می‌کنیم که به ضریب گسیل ε معروف بوده، تابش سطح «خاکستری» را با تابش سطح سیال ایده‌آل مرتبط می‌سازد. به علاوه، باید این حقیقت را مد نظر داشت که همهٔ تابش یک سطح به سطح دیگر نمی‌رسد زیرا تابش الکترومغناطیسی در خطوط مستقیم حرکت کرده، مقداری از آن به محیط اطراف می‌رود. بنابراین برای آنکه هر دو وضعیت را به حساب آورده باشیم دو ضریب جدید را در معادلهٔ (۱-۹) وارد می‌کنیم. از این رو:

$$q = F_\varepsilon\ F_G\ \sigma\ A\ (T_1^4 - T_1^4) \qquad (۱-۱۱)$$

* مثلاً به ترمودینامیک هولمن، ویرایش چهارم، صفحه ۷۰۵، شرکت مک گراوهیل رجوع شود.

که F_ε تابع ضریب گسیل و F_G تابع «ضریب دید» هندسی است. در فصل بعد شکل این توابع را برای بررسی پیکربندی‌های خاص، تعیین می‌کنیم. قابل توجه است که این توابع معمولاً آن طور که در معادلهٔ (۱-۱۱) نشان داده شده است، مستقل از هم نیستند.

تابش در فضای بسته

وقتی که اطراف سطح انتقال گرمای به دمای T_1 را سطح خیلی بزرگ‌تری به دمای T_2 فرا گرفته باشد با مسألهٔ تابش ساده مواجه هستیم. در فصل ۸ نشان می‌دهیم که تبادل تابشی خالص در این مورد را می‌توان از معادلهٔ زیر حساب کرد:

$$q = \varepsilon_1 \sigma A_1 \ (T_1^4 - T_2^4) \qquad (۱-۱۲)$$

مقادیر ε در پیوست A آورده شده است.

پدیده‌های انتقال گرمای تابشی ممکنست خیلی پیچیده بوده و محاسبات مربوطه به ندرت مثل معادلهٔ (۱-۱۱) است. در اینجا تأکید ما بر اختلاف سازوکار فیزیکی بین سیستم‌های انتقال گرمای تابشی و هدایتی - جابه‌جایی است. در فصل ۸ مسأله تابش را به طور مشروح بررسی می‌کنیم.

❑ ۱-۵ ابعاد و واحدها

در این بخش دستگاه‌های واحد به کار رفته در سراسر کتاب را مختصراً شرح می‌دهیم. باید دقیق بود و معنی واژه‌های ***واحد*** و ***بُعد***را با هم اشتباه نکرد. بعد، متغیری فیزیکی است که رفتار یا سرشت سیستم خاصی را مشخص می‌کند. مثلاً، طول میله بعدی از میله است. به همین ترتیب، دمای گاز را می‌توان به عنوان یکی از ابعاد ترمودینامیکی آن گاز در نظر گرفت. وقتی می‌گوییم که این میله طولش فلان قدر است یا این گاز دارای دمای بهمان درجه سلسیوس است واحدهایی را عرضه کرده‌ایم که برای اندازه‌گیری بُعد انتخاب شده‌اند. بعد از این در انتقال گرما، ابعاد زیر را به کار می‌بریم:

دما T، زمان τ، نیرو F، جرم M، طول L

کلیه کمیت‌های فیزیکی راکه در انتقال گرما به کار می‌روند، می‌توان برحسب این ابعاد بنیادی بیان کرد. واحدهایی که باید برای بعضی ابعاد به کار برد با تعاریفی تقریباً دلخواه انتخاب شده، معمولاً به یک پدیده یا قانون فیزیکی مربوط می‌شوند. مثلاً قانون دوم نیوتن در مورد حرکت را می‌توان چنین نوشت:

آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت ~ نیرو

$$F = k \frac{d(mv)}{d\tau}$$

که k ثابت تناسب است. چنان‌چه جرم ثابت باشد:

$$F = kma \qquad (۱-۱۳)$$

که $a = \frac{dv}{d\tau}$ شتاب است. معمولاً معادلهٔ (۱-۱۳) را چنین می‌نویسند:

$$F = \frac{1}{g_c} ma \qquad (۱-۱۴)$$

که $k = \frac{1}{g_c}$ است. معادلهٔ (۱-۱۴) برای تعریف دستگاه واحدهای مربوط به جرم، نیرو، طول و زمان به کار می‌رود. بعضی از دستگاه‌های واحد عبارتند از:

۱) یک پوند نیرو یک پوند جرم را $۳۲/۱۷ \frac{ft}{s^2}$ شتاب می‌دهد.

۲) یک پوند نیرو جرم یک اسلاگ را $۱ \frac{ft}{s^2}$ شتاب می‌دهد.

۳) یک دین نیرو یک گرم جرم را $۱ \frac{cm}{s^2}$ شتاب می‌دهد.

۴) یک نیوتن نیرو یک کیلوگرم جرم را $۱ \frac{m}{s^2}$ شتاب می‌دهد.

۵) یک کیلوگرم نیرو جرم یک کیلوگرم را $۹/۸۰۶ \frac{m}{s^2}$ شتاب می‌دهد. یک کیلو نیرو را اغلب ***کیلو پوند*** (kp) می‌نامند.

از آنجا که معادلهٔ (۱-۱۴) باید از نظر ابعادی همگن باشد، مقدار ثابت g_c در هر یک از دستگاه‌های واحد ردیف ۱ تا ۵ بالا متفاوت خواهد بود. این مقادیر عبارتند از:

۱) $g_c = ۳۲/۱۷ \frac{lb_m.ft}{lb_f.s^2}$

۲) $g_c = ۱ \frac{\text{اسلاگ}.ft}{lb_f.s^2}$

۳) $g_c = ۱ \frac{g.cm}{dyn.s^2}$

۴) $g_c = ۱ \frac{kg.m}{N.s^2}$

۵) $g_c = ۹/۸۰۶ \frac{kg_m.m}{kg_f.s^2}$

نوع دستگاه واحد به کار رفته تا زمانی که با تعاریف فوق سازگار باشد مهم نیست.

ابعاد کار به صورت حاصل ضرب نیرو در مسافت است. انرژی دارای همین ابعاد است. واحدهای کار و انرژی را می‌توان از هر کدام از دستگاه‌های فوق انتخاب کرد که عبارتند از:

۱) $lb_f.ft$

۲) $lb_f.ft$

۳) $dyn.cm = ۱ \text{ erg}$

۴) $N.m = ۱ \text{ joule (J)}$

۵) $kg_f.m = ۹/۸۰۶ \text{ J}$

به علاوه، می‌توان از واحدهای انرژی که بر پدیده‌های گرمایی بنیان نهاده شده‌اند، استفاده کرد.

۱ Btu دمای $۱ lb_m$ آب را در $۶۸°F$ به اندازه $۱°F$ بالا می‌برد.

۱ cal دمای یک گرم آب را در $۲۰°C$ به مقدار $۱°C$ افزایش می‌دهد.

۱ kcal دمای یک کیلوگرم آب را در $۲۰°C$ به مقدار $۱°C$ افزایش می‌دهد.

بعضی از ضرایب تبدیل برای واحدهای مختلف کار و انرژی عبارتند از:

$$۱ \text{ Btu} = ۷۷۸/۱۶ \ lb_f.ft$$

$$۱ \text{ Btu} = ۱۰۵۵ \text{ J}$$

$$۱ \text{ kcal} = ۴۱۸۲ \text{ J}$$

$$۱ \ lb_f.ft = ۱/۳۵۶ \text{ J}$$

$$۱ \text{ Btu} = ۲۵۲ \text{ cal}$$

سایر ضرایب تبدیل در پیوست A داده شده‌اند.

وزن یک جسم به صورت نیرویی که بر جسم در نتیجهٔ شتاب گرانشی اعمال می‌گردد تعریف می‌شود. بنابر این:

$$W = \frac{g}{g_c} m \qquad (۱-۱۵)$$

که W وزن و g شتاب گرانش است. توجه کنید که وزن یک جسم دارای ابعاد نیروست. اکنون ملاحظه می‌شود که چرا دستگاه‌های ۱ و ۵ توصیه شده‌اند، $۱ lb_m$ در سطح دریا به وزن $۱ lb_f$ است و وزن $۱ kg_m$ برابر $۱ kg_f$ است.

☑ **جدول ۱-۳** مضارب واحدهای *SI*

ضریب	پیش‌وند	اختصار
$۱۰^{۱۲}$	ترا	T
$۱۰^{۹}$	گیگا	G
$۱۰^{۶}$	مگا	M
$۱۰^{۳}$	کیلو	k
$۱۰^{۲}$	هکتو	h
$۱۰^{-۲}$	سنتی	c
$۱۰^{-۳}$	میلی	m
$۱۰^{-۶}$	میکرو	μ
$۱۰^{-۹}$	نانو	n
$۱۰^{-۱۲}$	پیکو	p
$۱۰^{-۱۸}$	آتو	a

تبدیلات دمایی بر اساس فرمول آشنای زیر انجام می‌شوند:

$$°F = \frac{۹}{۵} °C + ۳۲$$

$$°R = °F + ۴۵۹/۶۹$$

$$K = °C + ۲۷۳/۱۶$$

$$°R = \frac{۹}{۵} K$$

متأسفانه از تمام دستگاه‌های واحد بالا در نقاط مختلف جهان استفاده می‌شود. در حالی که فوت، پوند نیرو، پوند جرم، ثانیه، درجه فارنهایت و دستگاه *Btu* هنوز به طور گسترده در آمریکا مورد استفاده قرار می‌گیرد، تلاش زیادی در جهت تثبیت واحدهای *SI* (دستگاه بین‌المللی واحدها) به عنوان یک استاندارد جهانی در جریان است. واحدهای بنیانی در این دستگاه عبارتند از : متر، نیوتن، کیلوگرم، جرم، ثانیه، درجه سلسیوس. این دستگاه فاقد واحد انرژی «گرمایی» است یعنی واحد انرژی، ژول (نیوتن متر) خواهد بود. در این دستگاه واحد توان، وات (ژول بر ثانیه) است. در دستگاه *SI* واحدهای استاندارد ضریب هدایت گرمایی عبارت است از:

$\frac{W}{m.°C}$ به k

و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی چنین بیان می‌شود:

$\frac{W}{m^2.°C}$ به h

از آنجا که دستگاه واحدهای *SI* خیلی سرراست است، در این کتاب از آن به عنوان استاندارد استفاده خواهیم کرد و در مراحل میانی، جواب مثال‌ها را در پرانتز در دستگاه پوند جرم - *Btu* داده‌ایم. کسی که در زمینهٔ انتقال گرما کار می‌کند بایستی مرتبهٔ بزرگی این واحدها را در دو دستگاه حس کند. معمولاً مفهوم g_c در دستگاه *SI* به کار نرفته، نیوتن چنین **تعریف** می‌شود:

$$۱ \text{ N} = ۱ \frac{kg.m}{s^2} \qquad (۱-۱۶)$$

حتی باید رابطهٔ فیزیکی بین نیرو و جرم راکه با قانون دوم نیوتن در حرکت بیان می‌شود به خاطر سپرد.

در بیان مقادیر عددی در دستگاه *SI* نیز مضارب استانداردی مشخص شده‌اند که برای صرفه‌جویی در جا به کار می‌روند. این مضارب در جدول ۱-۳ آورده شده‌اند. نمادهای استاندارد مربوط به کمیت‌هایی که معمولاً در انتقال گرما به کار می‌روند در جدول (۱-۴) به طور خلاصه آورده شده‌اند. در پیوست A ضرایب تبدیل آورده شده‌اند.

☑ **جدول ۱-۴** کمیت‌های *SI* به‌کار رفته در انتقال گرما

کمیّت	اختصار واحد
نیرو	N (نیوتن)
جرم	kg (کیلوگرم جرم)
زمان	s (ثانیه)
طول	m (متر)
دما	K یا °C
انرژی	J (ژول)
توان	W (وات)
ضریب هدایت گرمایی	$\frac{W}{m.°C}$
ضریب انتقال گرما	$\frac{W}{m^2.°C}$
گرمای ویژه	$\frac{J}{kg.°C}$
شار گرمایی	$\frac{W}{m^2}$

حل مثال

مثال ۱-۱ هدایت از صفحهٔ مسی

دمای یکی از سطوح ورقی مسی به ضخامت ۳ cm را به ۴۰۰°C رسانده‌ایم و دمای سطح دیگر برابر ۱۰۰°C می‌باشد. چه مقدار گرما از ورق مزبور انتقال یافته است.

حل:

از پیوست *A*، ضریب هدایت گرمایی مس را که در ۲۵۰°C برابر ۳۷۰ $\frac{W}{m.°C}$ است استخراج می‌کنیم. از قانون فوریه داریم:

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$\frac{q}{A} = -k\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-(۳۷۰)(۱۰۰-۴۰۰)}{۳۰\times۱۰^{-۲}}$$

$$= ۳/۷\ \frac{MW}{m^2}\left[۱/۱۷۳\times۱۰^۶\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

حل مثال

مثال ۱-۲ محاسبهٔ جابه‌جایی

بر روی ورقی گرم به ابعاد ۷۵ cm × ۵۰ و دمای ۲۵۰°C هوایی به دمای ۲۰°C می‌وزد. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی ۲۵ $\frac{W}{m^2.°C}$ است. انتقال گرما را محاسبه کنید.

حل:

از قانون نیوتن در سرمایش داریم:

$$q = hA\ (T_w - T_\infty)$$

$$= (۲۵)(۰/۵۰)(۰/۷۵)(۲۵۰-۲۰)$$

$$= ۲/۱۵۶\text{kW}\left[۷۳۵۶\ \frac{Btu}{h}\right]$$

حل مثال

مثال ۱-۳ انتقال گرمای چند مانعی

با فرض آنکه جنس ورق مثال ۱-۲ از فولادکربن ۱٪ و ضخامت آن ۲ cm باشد و مقدار ۳۰۰ W از سطح ورق به طریق تابشی تلف‌شده باشد، دمای داخلی ورق را محاسبه کنید.

حل:

گرمای هدایت شده از طریق صفحه باید برابر مجموع گرمای تلف‌شده به طریق جابه‌جایی و تابشی باشد:

$$q_{\text{هدایتی}} = q_{\text{جابه‌جایی}} + q_{\text{تابشی}}$$

$$-kA\frac{\Delta T}{\Delta x} = ۲/۱۵۶ + ۰/۳ = ۲/۴۵۶\text{kW}$$

$$\Delta T = \frac{(-۲۴۵۶)(۰/۰۲)}{(۰/۵)(۰/۷۵)(۴۳)} = -۳/۰۵°\text{C}\ [-۵/۴۹°\text{F}]$$

مقدار *k* از جدول ۱-۱ استخراج شده است. بنابراین دمای داخلی ورق برابر است با:

$$T_i = ۲۵۰ + ۳/۰۵ = ۲۵۳/۰۵\ °\text{C}$$

حل مثال

مثال ۱-۴ چشمه گرمایی و جابه‌جایی

از سیمی به قطر ۱ mm و طول ۱۰ cm جریانی الکتریکی عبور می‌کند. سیم را در آبی که تحت فشار جو است فرو برده و شدت جریان را تا جایی که آب به جوش آید افزایش داده‌ایم. در این وضعیت $h = ۵۰۰۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ و دمای آب برابر ۱۰۰°C می‌باشد. برای اینکه دمای سطح به ۱۱۴ °C برسد چه مقدار توان الکتریکی باید به سیم داده شود.

حل:

کل اتلاف به طریق جابه‌جایی از معادلهٔ (۱-۸) به‌دست می‌آید:

$$q = hA\ (T_w - T_\infty)$$

در این مسأله مساحت مقطع سیم برابر است با:

$$A = \pi dL = \pi\ (۱\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۲}) = ۳/۱۴۲\times۱۰^{-۴}\ \text{m}^2$$

بنابراین انتقال گرما برابر است با:

$$q = \left(۵۰۰۰\ \frac{W}{m^2.°C}\right)(۳/۱۴۲\times۱۰^{-۴}\text{m}^2)(۱۱۴-۱۰۰)$$

$$= ۲۱/۹۹\text{W}\left[۷۵/۰۳\ \frac{Btu}{h}\right]$$

و این مقدار برابر توان الکتریکی است که باید داده شود.

حل مثال

مثال ۱-۵ انتقال گرمای تابشی

دو ورق سیاه متناهی به دمای ۸۰۰°C و ۳۰۰°C به طریق تابش تبادل گرما می‌کنند. انتقال گرمای واحد مساحت را حساب کنید.

حل:

برای حل این مسأله می‌توان از معادلهٔ (۱-۱۰) استفاده کرد. بنابراین داریم:

$$\frac{q}{A} = \sigma\ (T_1^4 - T_2^4)$$

$$= (۵/۶۶۹\times۱۰^{-۸})(۱۰۷۳^4 - ۵۷۳^4)$$

$$= ۶۹/۰۳\ \frac{kW}{m^2}\left[۲۱/۸۸۴\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

حل مثال

مثال ۱-۶ اتلاف گرمای کل جابه‌جایی و تابشی

دمای لوله‌ای فولادی و افقی به قطر ۵ cm در اتاقی بزرگ برابر ۵۰°C است. دمای هوای اتاق و دیوارهٔ آن برابر ۲۰°C است. ضریب گسیل سطح فولاد را می‌توان ۰/۸ گرفت. با استفاده از داده‌های جدول ۱-۲ اتلاف گرمای کل لوله را در واحد طول آن حساب کنید.

حل:

اتلاف گرمای کل برابر جمع اتلاف ناشی از جابه‌جایی و تابشی است. از جدول ۱-۲ ملاحظه می‌شود که مقدار ضریب انتقال گرما برابر جابه‌جایی *آزاد* با این پیکربندی و هوا برابر $h = ۶/۵\ \frac{W}{m^2.°C}$ است. مساحت برابر πdL است، بنابراین اتلاف جابه‌جایی واحد طول برابر است با:

$$\left.\frac{q}{L}\right]_{\text{جابه‌جایی}} = h\ (\pi d)\ (T_w - T_\infty)$$

$$= (۶/۵)(\pi)(۰/۰۵)(۵۰-۲۰) = ۳۰/۶۳\ \frac{W}{m}$$

لولهٔ مزبور جسمی است که با فضای بزرگی احاطه شده است به طوری که انتقال گرمای تابشی را می‌توان از معادلهٔ (۱-۱۲) محاسبه کرد. به ازای $T_1 = ۵۰°\text{C} = ۳۲۳°\text{K}$ و $T_2 = ۲۰°\text{C} = ۲۹۳°\text{K}$ داریم:

$$\left.\frac{q}{L}\right]_{\text{تابشی}} = \varepsilon_1\ (\pi d_1)\ \sigma\ (T_1^4 - T_2^4)$$

$$= (۰/۸)(\pi)(۰/۰۵)(۵/۶۶۹\times۱۰^{-۸})(۳۲۳^4 - ۲۹۳^4)$$

$$= ۲۵/۰۴\ \frac{W}{m}$$

بنابراین اتلاف گرمای کل برابر است با:

$$\left.\frac{q}{L}\right]_{\text{کل}} = \left.\frac{q}{L}\right]_{\text{جابه‌جایی}} + \left.\frac{q}{L}\right]_{\text{تابشی}}$$

$$= ۳۰/۶۳ + ۲۵/۰۴ = ۵۵/۶۷\ \frac{W}{m}$$

در این مثال دیدیم که جابه‌جایی و تابش تقریباً برابرند و از این رو حذف هر یک از آنها خطایی جدی محسوب می‌شود.

۱-۶ خلاصه

مطالب مقدمه را خلاصه می‌کنیم. انتقال گرما به یکی از سه حالت هدایت، جابه‌جایی و تابش، صورت می‌پذیرد. یادآور شدیم که سازوکار فیزیکی جابه‌جایی به صورت هدایت گرما از لایهٔ نازک سیال مجاور سطح انتقال گرما است. در هدایت و جابه‌جایی از قانون فوریه استفاده می‌شود، گرچه در مسأله جابه‌جایی، برای تعیین گرادیان دما باید از مکانیک سیالات نیز استفاده کرد.

انتقال گرمای تابشی، سازوکار فیزیکی متفاوت دارد. بدین معنی که انتشار انرژی به صورت الکترومغناطیسی است. برای مطالعه این نوع انتقال انرژی، مفهوم تابندهٔ ایده‌آل یا جسم سیاه را معرفی می‌کنیم که انرژی را با آهنگی متناسب با توان چهارم دمای مطلق می‌تابد.

تصور مواردی با هر سه نوع انتقال گرما، ساده است، شکل ۱-۹. در این مورد گرما با ترکیبی از جابه‌جایی و تابش از سطح ورق بیرون می‌رود. معادلهٔ توازن انرژی چنین است:

$$-kA\left.\frac{dT}{dy}\right]_{\text{دیواره}} = hA\ (T_w - T_\infty) + F_e F_G \sigma A\ (T_w^4 - T_s^4)$$

که در آن T_s = دمای محیط

T_w = دمای سطح

T_∞ = دمای سیال

برای استفاده از علم انتقال گرما در وضعیت‌های عملی، باید با سازوکار سه نوع انتقال گرما کاملاً آشنا بود.

شکل ۱-۹ ترکیب انتقال گرمای هدایتی، جابه‌جایی و تابش.

سؤالات مرور فصل

۱ ضریب هدایت گرمایی را تعریف کنید.

۲ ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی را تعریف کنید.

۳ در مورد سازوکار هدایت گرمایی در گازها و جامدها بحث کنید.

۴ در مورد سازوکار جابه‌جایی گرمایی بحث کنید.

۵ مرتبه بزرگی ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد چیست؟ در مورد جابه‌جایی اجباری چه‌طور؟ در مورد جوش چه‌طور؟

۶ انتقال گرمای تابشی چه موقع اهمیت دارد؟

۷ بعضی هادی‌های خوب گرمایی و برخی هادی‌های ضعیف را نام ببرید.

۸ مرتبهٔ بزرگی ضریب هدایت گرمایی برای الف) فلزات، ب) مواد عایق جامد، پ) مایعات، ت) گازها چه‌قدر است؟

۹ شخصی می‌گوید که گرما نمی‌تواند در خلأ انتقال یابد. شما چگونه جوابش را می‌دهید؟

۱۰ کتاب ترمودینامیک را مرور کرده، الف) گرما، ب) انرژی داخلی، پ) کار، ت) آنتالپی را تعریف کنید.

۱۱ g_c را تعریف و در مورد آن بحث کنید.

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۱-۱ هدایت از صفحهٔ مسی
۱-۲ محاسبه جابه‌جایی
۱-۳ انتقال گرمای چندحالتی
۱-۴ چشمه گرمایی و جابه‌جایی
۱-۵ انتقال گرمای تابشی
۱-۶ اتلاف گرمای کل جابه‌جایی و تابشی

❑ مسائل

۱-۱ چنان‌چه مقطع جسمی عایق به مساحت مقطع $1/0\ m^2$ و ضخامت $2/5\ cm$ مقدار $3\ kW$ انرژی هدایت کند و بتوان ضریب هدایت گرمایی آن را برابر $0/2\ \frac{W}{m.^\circ C}$ در نظر گرفت، اختلاف دما در عرض جسم را محاسبه کنید.

۱-۲ در عرض لایه‌ای از جنس شیشه لیفی *(fiber – glass)* به ضخامت $13\ cm$ اختلاف دمای $85^\circ C$ اعمال می‌شود. ضریب هدایت گرمایی شیشه لیفی $0/035\ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. گرمایی را که از جسم مزبور به ازای واحد مساحت در ساعت انتقال می‌یابد، محاسبه کنید.

۱-۳ مخروط ناقصی به ارتفاع $30\ cm$ را از آلومینیم ساخته‌اند. قطر آن در بالا $7/5\ cm$ و در کف برابر $12/5\ cm$ می‌باشد. دمای سطح زیرین $93^\circ C$ و دمای سطح زیرین برابر $540^\circ C$ است. سطح جانبی عایق‌شده است. با فرض آنکه جریان گرما یک بعدی باشد، آهنگ انتقال گرما به وات چه‌قدر است؟

۱-۴ دمای سطوح دیواری تخت به ضخامت $15\ cm$ برابر 370 و $93^\circ C$ است. جنس دیوار از شیشه‌ای مخصوص با خواص زیر است:

$$k = 0/78\ \frac{W}{m.^\circ C},\ \rho = 2700\ \frac{kg}{m^3},\ c_p = 0/84\ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$$

جریان گرما از این دیواره در شرایط حالت پایدار چه‌قدر خواهد بود؟

۱-۵ مادهٔ فوق‌عایقی دارای ضریب هدایت گرمایی $2\times10^{-4}\ \frac{W}{m.^\circ C}$ بوده، جهت عایق‌کاری، مخزنی از ازت مایع به دمای $-196^\circ C$ به کار می‌رود. برای تبخیر هر کیلوگرم جرم ازت در این دما مقدار $199\ kJ$ لازم است. با فرض آن که مخزن کروی و قطر داخلی آن $0/61\ m$ باشد، مقدار ازت تبخیر شده در روز را برای عایقی به ضخامت $2/5\ cm$ و دمای محیطی $21^\circ C$ به‌دست آورید. فرض کنید که دمای بیرون عایق برابر $21^\circ C$ است.

۱-۶ مصالح زیر را برحسب الف) پاسخ گذرا و ب) هدایت حالت پایدار، درجه‌بندی کنید. فرض کنید که مصالح با بیش‌ترین درجه، به صورت درصدی از مقدار ماکزیمم، به مصالح دیگر گرما می‌دهد: آلومینیم، مس، نقره، آهن، سرب، فولاد کرم (۱۸٪ کرم و ۸٪ نیکل)، منیزیوم. از این درجه‌بندی چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۱-۷ لوله‌ای به قطر $50\ cm$ روغن داغ به دمای $30^\circ C$ را در منطقهٔ شمال جابه‌جا می‌کند و در معرض دمای محیطی $-20^\circ C$ است. اطراف لوله را عایق پودری مخصوصی به ضخامت $5\ cm$ و ضریب هدایت گرمایی $7\ \frac{mW}{m.^\circ C}$ پوشانده‌است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در بیرون لوله $12\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. اتلاف انرژی از لوله را به ازای متر طول آن حساب کنید.

۱-۸ یک لایه آزبست شل‌بسته به ضخامت $5\ cm$ را بین دو صفحه به دمای $100^\circ C$ و $200^\circ C$ قرار داده‌اند. انتقال گرما در عرض لایه مزبور را محاسبه کنید.

۱-۹ ضریب هدایت گرمایی عایقی برابر $10\ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. برای آنکه افت دما به ازای جریان گرمای $400\ \frac{W}{m^2}$ برابر $500^\circ C$ باشد ضخامت عایق چه‌قدر باید باشد؟

۱-۱۰ با فرض آنکه در مسأله ۱-۵ انتقال گرما به کره به صورت جابه‌جایی آزاد با ضریب انتقال گرمای $2/7\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ باشد تفاوت دما بین سطح بیرونی کره و محیط را محاسبه کنید.

۱-۱۱ دو سطح کاملاً سیاه را طوری ساخته‌اند که تمام انرژی تابشی خروجی از سطحی به دمای $800^\circ C$، به سطح دیگر می‌رسد. دمای سطح دیگر برابر $250^\circ C$ است. انتقال گرما بین سطوح را در ساعت به ازای واحد سطح با دمای $800^\circ C$ محاسبه کنید.

۱-۱۲ دو صفحهٔ موازی خیلی بزرگ که شرایط سطح آنها بسیار نزدیک به شرایط جسم سیاه است به ترتیب به دمای 1100 و $425^\circ C$ اند. انتقال گرمای تابشی را بین صفحات مزبور در واحد زمان به ازای واحد مساحت محاسبه کنید.

۱-۱۳ مقدار تبادل گرمای تابشی در یک روز بین دو صفحهٔ سیاه که مساحت آنها برابر سطح کره‌ای به قطر $2\ ft$ است را وقتی دمای دو صفحه برابر $-320^\circ F$ و $70^\circ F$ باشد، محاسبه کنید. این محاسبه با توجه به مسأله ۱-۵ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱-۱۴ دو صفحه سیاه نامتناهی به دمای $500^\circ C$ و $100^\circ C$ به طریق تابشی مبادلهٔ گرما می‌کنند. آهنگ انتقال گرما به ازای واحد مساحت را محاسبه کنید. چنان‌چه بین صفحات مزبور صفحهٔ کاملاً سیاه دیگری قرار داده شود انتقال گرما چه‌قدر کاهش می‌یابد؟ دمای صفحهٔ میانی چه‌قدر است؟

۱-۱۵ آب با آهنگ $0/5\ \frac{kg}{s}$ در لوله‌ای به قطر $2/5\ cm$ و طول $3\ m$ جریان دارد. بر دیوارهٔ لوله شار گرمایی ثابتی اعمال می‌شود به طوری که دمای دیوارهٔ لوله $40^\circ C$ بیش‌تر از دمای آب می‌شود. انتقال گرما را محاسبه و افزایش دمای آب را تعیین کنید. آب تحت فشار است به طوری که نمی‌تواند بجوشد.

۱-۱۶ صفحهٔ مربعی قائمی به ابعاد $30\ cm \times 30\ cm$ را در معرض بخار به فشار $1\ atm$ ($T_{sat} = 100^\circ C$) قرار می‌دهند و بخار بدین ترتیب خنک شده، $3/78\ \frac{kg}{h}$ آب چگالیده به وجود می‌آید. دمای صفحه را محاسبه کنید. برای یافتن خاصه‌های ضروری به جدول‌های بخار مراجعه کنید.

۱-۱۷ برای آنکه آب در $1\ atm$ به جوش آید لازمست که دمای سطح $232^\circ F$ و شار گرمایی آن $3\times10^4\ \frac{Btu}{h.ft^2}$ باشد. مقدار ضریب انتقال گرما چه‌قدر است؟

۱-۱۸ گرم‌کن تابندهٔ کوچکی دارای تسمه‌های فلزی به عرض $6\ mm$ و طول کل $3\ m$ است. ضریب گسیل سطحی تسمه‌ها برابر $0/85$ است. چنان‌چه لازم باشد که گرم‌کن $1600\ W$ گرما به اتاق $25^\circ C$ انتشار دهد دمای تسمه‌ها چه‌قدر باید باشد؟

۱-۱۹ انرژی گسیل‌شده توسط جسم سیاه در $1000^\circ C$ را محاسبه کنید.

۱-۲۰ اگر شار تابشی خورشید برابر $1350\ \frac{W}{m^2}$ باشد، دمای جسم سیاه معادل آن چه‌قدر است؟

۱-۲۱ کره‌ای به قطر $4/0\ cm$ را تا دمای $150^\circ C$ گرما داده، در اتاق بزرگی به دمای $20^\circ C$ قرار می‌دهند. اتلاف گرمای تابشی را در صورتی که ضریب گسیل سطحی برابر $0/65$ باشد محاسبه کنید.

۱-۲۲ دیواری تخت در دمای محیط $38^\circ C$ قرار دارد. دیوار مزبور از لایهٔ عایقی به ضخامت $2/5\ cm$ و ضریب هدایت گرمایی $1/4\ \frac{W}{m.^\circ C}$ پوشانده شده و دمای دیوار در قسمت داخل عایق برابر $315^\circ C$ است. این دیوار به طریق جابه‌جایی به محیط اطراف گرما می‌دهد. مقدار ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی سطح بیرونی عایق چه‌قدر باشد تا دمای سطح بیرونی از $41^\circ C$ تجاوز نکند.

۱-۲۳ دیواری که یک طرفش به طریق جابه‌جایی گرم می‌شود، طرف دیگرش به طریق جابه‌جایی خنک می‌شود را در نظر بگیرید. نشان دهید که آهنگ انتقال گرما از دیوار مزبور برابر است با:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\Delta x}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}$$

که T_1 و T_2 دمای سیال در دو طرف دیوار و h_1 و h_2 ضرایب انتقال گرمای مربوطه‌اند.

۱-۲۴ دمای یک طرف دیوار تختی برابر $100^\circ C$ و طرف دیگر آن در معرض محیطی جابه‌جایی به $T = 10^\circ C$ و $h = 10\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارد. دیوار مزبور دارای $k = 1/6\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و ضخامت $40\ cm$ می‌باشد. آهنگ انتقال گرما از این دیوار را محاسبه کنید.

۱-۲۵ **انتقال گرمای به طریق جابه‌جایی آزاد از صفحه‌ای قائم با هدایت خالص از لایه‌قائم هوا به ضخامت $2/5\ cm$ و اختلاف دمایی برابر $T_w - T_\infty$** را با هم مقایسه کنید. از اطلاعات جدول ۱-۲ استفاده کنید.

۱-۲۶ صفحه‌ای فولادی به ضخامت $\frac{1}{4}\ in$ و ضریب هدایتی گرمایی $25\ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$ را داخل محیط خلئی که در آن انتقال گرمای جابه‌جایی قابل صرف‌نظر است، در معرض شار گرمایی تابشی به میزان $1500\ \frac{Btu}{h.ft^2}$ قرار می‌دهیم. به فرض دمای سطحی فولادی در معرض انرژی تابشی برابر $100^\circ F$ باشد دمای سطح دیگر، چنان‌چه تمام انرژی تابشی برخورنده به صفحهٔ مزبور به طریق هدایت در آن انتقال یابد، چه قدر خواهد بود؟

۱-۲۷ در صفحه‌ای فلزی که پشت آن کاملاً عایق‌شده است مقدار $700\ \frac{W}{m^2}$ شار گرمای تابشی خورشیدی جذب می‌شود. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی روی صفحه برابر $11\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و دمای هوای محیط $30^\circ C$ است. دمای صفحهٔ مزبور را در شرایط تعادل محاسبه کنید.

۱-۲۸ استوانه‌ای به قطر $50\ mm$ را تا دمای $200^\circ C$ گرما می‌دهند و اطراف آن هوای $30^\circ C$ با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ می‌وزانند. در صورتی که ضریب گسیل سطحی برابر $0/7$ باشد کل اتلاف گرما در واحد طول را محاسبه کنید. دمای دیواره‌های اتاق حاوی استوانه، $10^\circ C$ است. محاسبه را توضیح دهید.

۱-۲۹ یک صفحهٔ مربعی و قائم به ضلع $30\ cm$ به دمای $50^\circ C$، در هوای اتاقی به دمای $20^\circ C$ قرار دارد. ضریب گسیل سطحی برابر $0/8$ است. کل گرمای تلف‌شده از دو طرف صفحه را پیدا کنید.

۱-۳۰ بر روی صفحه‌ای سیاه به ابعاد $20\ cm \times 20\ cm$، هوایی به دمای $0^\circ C$ با سرعت $2\ \frac{m}{s}$ وزانده می‌شود. این صفحه در اتاق بزرگی قرار دارد که دمای دیوارهایش $30^\circ C$ است. پشت صفحه کاملاً عایق است. دمای صفحه را ناشی از توازن جابه‌جایی – تابشی محاسبه کنید. از اطلاعات داده شده در جدول ۱-۲ استفاده کنید. از نتیجهٔ به‌دست آمده تعجب می‌کنید؟

۱-۳۱ بین دو صفحهٔ سیاه بزرگ خلأ است. در بیرون یکی از آنها محیط جابه‌جایی به دمای $T = 80^\circ C$ و $h = 100\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است در حالی که قسمت بیرونی صفحهٔ دیگر در محیطی به دمای $20^\circ C$ و $h = 15\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارد. معادلهٔ انرژی سیستم مزبور را نوشته و دماهای صفحه را تعیین کنید. در این مسأله $F_G = F_E = 1/0$.

۱-۳۲ با استفاده از تعاریف اساسی واحدها و ابعاد بخش ۱-۵، عبارتی برای الف) تبدیل ژول به واحدهای گرمایی انگلیسی «*Btu*»، ب) تبدیل دین – سانتی‌متر به ژول، پ) تبدیل بی‌تی‌یو به کالری، بیابید.

۱-۳۳ با استفاده از معادلهٔ هدایت گرمای سه بعدی در مختصات قائم [معادله (۱-۳الف)]، معادلهٔ عمومی هدایت گرما در مختصات استوانه‌ای را [معادله (۱-۳ب)] بیابید.

۱-۳۴ معادلهٔ ساده شده هدایت گرما را برای الف) جریان گرمای یک بعدی پایدار در مختصات استوانه‌ای در امتداد آزیموت (ϕ) و ب) جریان گرمای یک بعدی پایدار در مختصات کروی در امتداد آزیموت (ϕ) را بنویسید.

۱-۳۵ با استفاده از مقادیر تقریبی ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی جدول ۱-۲، دمای سطحی‌ای را محاسبه کنید که به ازای آن، اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد برابر اتلاف گرمای تابشی از صفحه عمودی مربعی به ضلع $0/3\ m$ یا استوانه‌ای به قطر $5\ cm$ شود که در معرض هوای اتاق به دمای $20^\circ C$ قرار دارد. به فرض سطوح سیاه شده‌اند طوری که $\varepsilon = 1/0$ و دمای محیطی تابشی را می‌توان همان دمای محیط اتاق در نظر گرفت.

مسائل طراحی

۱-۳۶ شخصی به مهندسی می‌گوید وقتی‌که در تابستان، جلوی یخچال باز می‌ایستد احساس خنک‌تر بودن می‌کند. مهندس به وی می‌گوید که او خیال می‌کند زیرا هیچ‌گونه بادبزنی در داخل یخچال وجود ندارد که هوای خنک را به وی بوزاند. بحث جالبی در می‌گیرد، شما جانب چه کسی را می‌گیرید؟ چرا؟

۱-۳۷ شخصی به مهندسی می‌گوید که «آب گرم زودتر از آب سرد یخ می‌زند». مهندس این امر را بی‌معنی می‌داند. شخص مزبور می‌گوید که وی واقعاً مسألهٔ یخ زدن را با سینی‌های یخ یخچال آزمایش کرده و دریافته است که آب گرم واقعاً سریع‌تر خنک می‌شود. شما جواب دهید که توصیفی منطقی برای مشاهدات این شخص وجود دارد؟

۱-۳۸ دمای کلاس درسی که دارای تهویهٔ مطبوع است در تابستان برابر ۷۲°F می‌باشد. دانش‌آموزان در این کلاس با شلوارک و صندل و پیراهن نازک شرکت کرده و کاملاً راحت‌اند. در همین کلاس در زمستان، همان دانش‌آموزان پیراهن‌های آستین بلند و شلوار و ژاکت گرم پوشیده، وقتی دما برابر ۷۵°F است راحت هستند. با فرض آنکه رطوبت را در نظر نگیریم این پدیده خلاف قاعده را، «راحتی دما *temperature Comfort*»، توضیح دهید.

۱-۳۹ از نظر مسألهٔ انتقال گرما می‌توان انسان را با استوانهٔ قائمی به ارتفاع *۶ft* و قطر *۱ft* تقریب زد. به فرض، دمای سطحی استوانه ۷۸°F و $h = ۲ \frac{Btu}{h.ft^{۲}.°F}$ و ضریب گسیل سطحی برابر ۰/۹ است و استوانه در اتاق بزرگی قرار دارد که دمای هوا در آن برابر ۶۸°F و دمای دیوار برابر ۴۵°F است. گرمای تلف‌شده از استوانه را محاسبه کنید. مسأله را برای دمای دیوار ۸۰°F تکرار کنید. از این محاسبات چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

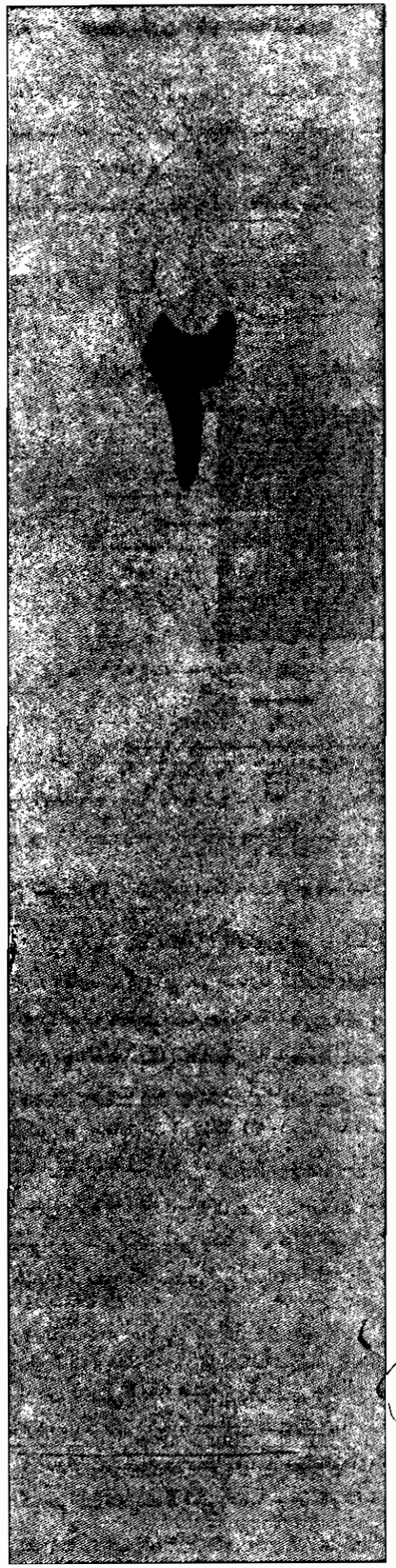
۱-۴۰ میدان اسکیت روی یخی در مرکز خرید سرپوشیده‌ای به دمای محیطی ۲۲°C قرار دارد و دمای دیوارهای تابشی دور تا دور برابر ۲۵°C است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی بین یخ و هوا به خاطر حرکت هوا و حرکت اسکیت بازها تقریباً برابر $۱۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. ضریب گسیل یخ تقریباً ۰/۹۵ است. بار سرمایی مورد نیاز برای آنکه یخ میدانی به ابعاد *۱۲×۴۰ m* را در °C ۰ نگه‌دارد، محاسبه کنید. مقدار گرمای پخش یخ را به‌دست آورده، ببینید چه قدر طول می‌کشد تا در صورت عدم تأمین بار سرمایی، *۳mm* از روی سطح میدان ذوب شود. سمت پشت سطح میدان را عایق در نظر بگیرید.

❑ مراجع

1 Glaser, P. E., I. A. Black, and P. Doherty: Multilayer Insulation, *Mech. Eng.,* August 1965, p.23.

2 Barron, R.: "Cryogenic Systems," McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

3 Dewitt, W. D., N. C. Gibbon, and R. L. Reid,: Multifoil Type Thermal Insulation, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.,* vol. 4, no. 5, suppl. pp. 263–271, 1968.



هدایت حالت پایدار - یک بعدی

❑ ۲-۱ مقدمه

اکنون کاربرد قانون فوریه در هدایت گرما را در محاسبه جریان گرمای بعضی از سیستم‌های یک بعدی ساده بررسی می‌کنیم. سیستم‌های یک بعدی، شکل‌های فیزیکی متفاوتی دارند: وقتی دما در جسم فقط تابع فاصله شعاعی و مستقل از زاویه آزیموت یا فاصله محوری است، سیستم‌های استوانه‌ای و کروی یک بعدی‌اند. ممکن است در بعضی از مسائل دو بعدی، اثر بعد دوم آن‌قدر اندک باشد که بتوان از آن صرف‌نظر کرد و انتقال گرمای چند بعدی را با تحلیل یک بعدی تقریب زد. در این موارد، معادلات دیفرانسیل ساده شده، به راه حلِ خیلی ساده‌تری می‌رسیم.

❑ ۲-۲ دیواره تخت

نخست دیواره تختی را در نظر بگیرید که می‌توان مستقیماً قانون فوریه [معادله (۱-۱)] را در مورد آن به کار برد. با انتگرال‌گیری از معادله ۱-۱ داریم:

$$q = - \frac{kA}{\Delta x} (T_۲ - T_۱) \qquad (۱-۲)$$

به شرطی که ضریب هدایت گرمایی را ثابت فرض کنیم. ضخامت دیواره Δx بوده و $T_۱$ و $T_۲$ دمای سطوح دیواره‌اند. اگر ضریب هدایت گرمایی طبق رابطه خطی $k = k_۰(۱ + \beta T)$ با دما تغییر کند، معادله جریان گرما چنین می‌شود:

$$q = - \frac{k_۰ A}{\Delta x} \left[(T_۲ - T_۱) + \frac{\beta}{۲} (T_۲^{۲} - T_۱^{۲}) \right] \qquad (۲-۲)$$

چنان‌چه مصالح از یکی بیش‌تر باشد، مثل دیوار چند لایه شکل ۲-۱، تحلیل چنین خواهد بود: گرادیان دما در سه نوع مصالح نشان داده می‌شود و جریان گرما چنین است:

$$q = - k_A A \frac{T_۲ - T_۱}{\Delta x_A} = - k_B A \frac{T_۳ - T_۲}{\Delta x_B} = - k_C A \frac{T_۴ - T_۳}{\Delta x_C}$$

توجه داشته باشید که جریان گرما باید در کل مقاطع یکسان باشد.

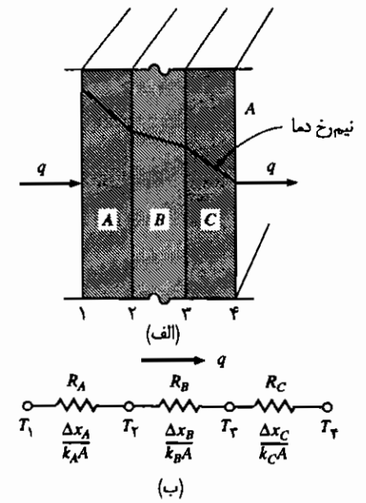
با حل هم‌زمان این سه معادله، جریان گرما چنین است:

$$q = \frac{T_۱ - T_۴}{\frac{\Delta x_A}{k_A A} + \frac{\Delta x_B}{k_B A} + \frac{\Delta x_C}{k_C A}} \qquad (۳-۲)$$

حال اندکی به عقب برمی‌گردیم تا نظر مفهوماً متفاوتی از قانون فوریه ارائه کنیم.

آهنگ انتقال گرما را می‌توان به عنوان شدت جریان ، و ترکیب ضریب هدایت گرمایی، ضخامت مصالح و مساحت را مقاومتی در مقابل این جریان فرض کرد. دما، تابع پتانسیل یا محرک، شدت جریانِ گرماست و معادله فوریه را می‌توان چنین نوشت:

$$\text{شدت جریان گرما} = \frac{\text{اختلاف پتانسیل گرمایی}}{\text{مقاومت گرمایی}} \qquad (۴-۲)$$



شکل ۲-۱ انتقال گرمای یک بعدی از دیوار مرکب و تشابه الکتریکی آن.

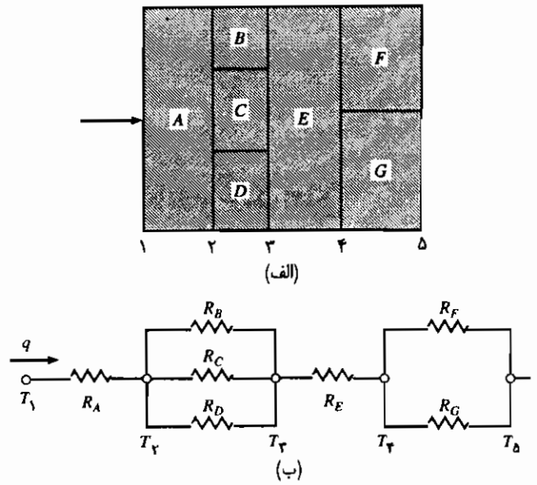
این رابطه تشابه کامل با قانون اهم در نظریه مدار الکتریکی دارد. مقاومت گرمایی در معادله (۲-۱) برابر $\frac{\Delta x}{kA}$ و در معادله (۲-۳) برابر مجموع سه جمله در مخرج کسر است. باید این وضع را در معادله (۲-۳) انتظار می‌داشتیم زیرا این سه دیواره، پهلو به پهلو به صورت سه مقاومت گرمایی سری عمل می‌کنند. مدار الکتریکی معادل آن در شکل (۲-۱ ب) آمده است.

از تشابه الکتریکی می‌توان برای حل مسائل پیچیده‌تری استفاده کرد که مقاومت‌های گرمایی سری و موازی دارند. مسأله‌ای نمونه و مدار الکتریکی مشابه آن در شکل ۲-۲ آمده است. معادله جریان گرمای یک بعدی این مسأله را می‌توان چنین نوشت:

$$q = \frac{\Delta T_{\text{کل}}}{\sum R_{\text{گرمایی}}} \qquad (۵-۲)$$

که در آن $R_{\text{گرمایی}}$ مقاومت‌های گرمایی مصالح مختلف است. واحد مقاومت گرمایی $\frac{^\circ\text{F.h}}{\text{Btu}}$ یا $\frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}$ است.

یادآور می‌شویم که در بعضی سیستم‌های مشابه شکل ۲-۲، اگر ضرایب هدایت گرمایی مصالح B، C و D خیلی متفاوت باشند، جریان گرمایی دو بعدی می‌شود. در این حالت باید روش‌های دیگری را برای حل مسأله به کار برد.



شکل ۲-۲ انتقال گرمای یک‌بعدی سری و موازی از یک دیوار مرکب و تشابه الکتریکی آن.

❑ ۲-۳ نارسانایی و مقادیر R

در فصل ۱ یادآور شدیم که ضرایب هدایت گرمایی تعدادی از مواد نارسانا در پیوست A داده شده‌اند. در طبقه‌بندی عملکرد نارسانایی، معمول آن است که در صنعت ساختمان سازی عبارتی را به کار برند که **مقدار** R نامیده شده، چنین تعریف می‌شود:

$$R = \frac{\Delta T}{\frac{q}{A}} \qquad (۶-۲)$$

واحد R برابر $\frac{^\circ\text{F.ft}^۲\text{.h}}{\text{Btu}}$ یا $\frac{^\circ\text{C.m}^۲}{\text{W}}$ است. توجه داشته باشید که این مفهوم متفاوت با مفهوم مقاومت گرمایی است که در بالا بحث شد و در آن شدت جریان گرمایی ***واحد سطح*** به‌کار رفت.

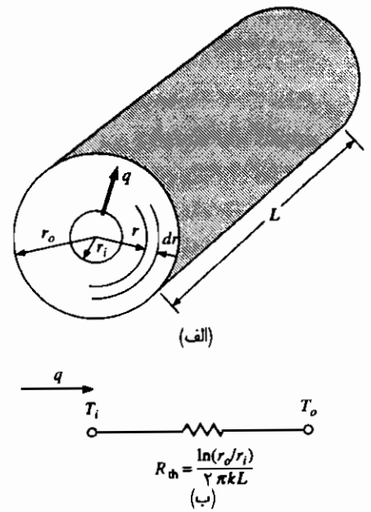
در اینجا خوب است مصالح نارسانا را بر حسب کاربرد و حدود دمای مجازشان دسته‌بندی کنیم. جدول ۲-۱ این اطلاعات را در اختیار ما قرار داده، می‌توان آن را به عنوان راهنمایی در انتخاب مواد نارسانا به کار برد.

❑ ۲-۴ سیستم‌های شعاعی - استوانه‌ها

استوانه بلندی به شعاع درونی r_i و شعاع بیرونی r_o و طول L را مطابق شکل ۲-۳ در نظر بگیرید. این استوانه را در معرض اختلاف دمای $T_i - T_o$ قرار می‌دهیم و می‌خواهیم بدانیم که جریان گرما چه‌قدر است. در مورد استوانه‌ای که طول آن در مقایسه با قطرش خیلی بزرگ است می‌توان فرض کرد که گرما تنها در امتداد شعاع جریان می‌یابد، به‌طوری‌که تنها مختص مکانی مورد نیاز برای مشخص کردن سیستم، r باشد. مجدداً، معادله فوریه را با

جای‌گزینی مقدار مساحت در آن به کار می‌بریم. مساحت برای جریان گرما در سیستم استوانه‌ای برابر است با:

$$A_r = ۲\pi rL$$



شکل ۲-۳ جریان گرمای یک بعدی از یک استوانه توخالی و تشابه الکتریکی آن.

بنابراین قانون فوریه چنین می‌شود:

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr}$$

یا:

$$q_r = -۲\pi krL \frac{dT}{dr} \qquad (۷-۲)$$

با شرایط مرزی زیرین:

در $r = r_i$ داریم $T = T_i$

در $r = r_o$ داریم $T = T_o$

حل معادله (۲-۷) چنین است:

$$q = \frac{۲\pi kL\,(T_i - T_o)}{ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \qquad (۸-۲)$$

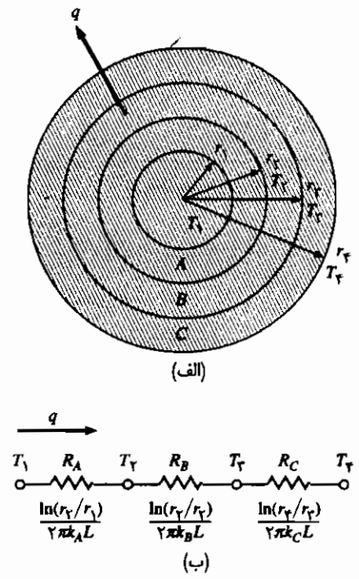
و مقاومت گرمایی این مورد برابر است با:

$$R_{th} = \frac{ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{۲\pi kL}$$

از مفهوم مقاومت گرمایی، مثل مورد دیواره‌های تخت، می‌توان برای دیواره‌های استوانه‌ای چند لایه نیز استفاده کرد. راه حل مسأله برای سیستم سه لایه در شکل ۲-۴ چنین است:

$$q = \frac{۲\pi\, L\,(T_۱ - T_۴)}{\frac{ln\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)}{k_A} + \frac{ln\left(\frac{r_۳}{r_۲}\right)}{k_B} + \frac{ln\left(\frac{r_۴}{r_۳}\right)}{k_C}} \qquad (۹-۲)$$

مدار گرمایی مربوطه در شکل (۲-۴ ب) نشان داده شده است.



شکل ۲-۴ جریان گرمای یک‌بعدی از چندمقطع استوانه‌ای و تشابه الکتریکی آن.

کُره‌ها

سیستم‌های کروی را وقتی دما فقط تابع شعاع است می‌توان به عنوان یک بعدی بررسی کرد. بنابراین جریان گرما به صورت زیراست که آن را به عنوان تمرین خودتان به‌دست‌آورید.

$$q = \frac{۴\pi k\,(T_i - T_o)}{\frac{۱}{r_i} - \frac{۱}{r_o}} \qquad (۱۰-۲)$$

مثال ۲-۱ هدایت چند لایه

به فرض دیواره بیرونی خانه‌ای از لایه‌ای آجر معمولی به ضخامت ۴ in $\left[k = ۰/۷\frac{\text{W}}{\text{m.}^\circ\text{C}}\right]$ و سپس لایه‌ای اندود گچی به ضخامت ۱/۵ in $\left[k = ۰/۴۸\frac{\text{W}}{\text{m.}^\circ\text{C}}\right]$ تشکیل شده باشد. ضخامت عایق پشم سنگ* شل بسته‌ای که $\left[k = ۰/۰۶۵\frac{\text{W}}{\text{m.}^\circ\text{C}}\right]$ باید برای ۸۰٪کاهش اتلاف (کسب) گرما از دیواره اضافه کرد چه‌قدر است؟

حل :

اتلاف گرمای کل از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_{\text{گرمایی}}}$$

از آنجا که اتلاف گرما با عایق پشم سنگ تنها ۲۰٪ (۸۰٪ کاهش) قبل از کاربرد عایق است:

$$\frac{q \text{ با عایق}}{q \text{ بدون عایق}} = ۰/۲ = \frac{\sum R_{\text{گرمایی}} \text{ بدون عایق}}{\sum R_{\text{گرمایی}} \text{ با عایق}}$$

* پشم سنگ rock − wool ماده معدنی لیفی شکل است که از پرتاب با فشار بخار به تخته سنگ مذاب ساخته می‌شود (م).

☑ **جدول ۲-۱** انواع عایق و کاربردهای آن

نوع	محدوده‌دما، °C	ضریب هدایت گرمایی $\frac{mW}{m.^\circ C}$	چگالی $\frac{kg}{m^3}$	کاربرد
۱- فوق نارسانای از هوای تخلیه‌شده *Linde*	۱۱۰۰-۲۴۰-	۰/۷۲-۰/۰۰۱۵	متغیر	خیلی
۲- اسفنج اورتان	۱۵۰-۱۸۰-	۲۰-۱۶	۴۸-۲۵	لوله‌های گرم و سرد
۳- اسفنج اورتان	۱۱۰-۱۷۰-	۲۰-۱۶	۳۲	مخازن
۴- بلوک‌های شیشه‌ای خانه‌خانه	۲۰۰-۲۰۰-	۱۰۸-۲۹	۱۵۰-۱۱۰	مخازن و لوله‌ها
۵- پتوهای شیشه لیفی برای پیچیدن	۲۹۰-۸۰-	۷۸-۲۲	۵۰-۱۰	لوله و اتصالات لوله
۶- پتوهای شیشه لیفی	۲۳۰-۱۷۰-	۸۶-۲۵	۵۰-۱۰	مخازن و تجهیزات
۷- اشکال پیش ساخته شیشه لیفی	۲۳۰-۵۰-	۵۵-۳۲	۵۰-۱۰	لوله‌کشی
۸- ورقه‌های قابل ارتجاع	۱۰۰-۴۰-	۳۹-۳۶	۱۰۰-۷۰	مخازن
۹- حصیرهای شیشه لیفی	۳۷۰-۶۰	۵۵-۳۰	۵۰-۱۰	لوله و اتصالات لوله
۱۰- اشکال پیش ساخته قابل ارتجاع	۱۰۰-۴۰-	۳۹-۳۶	۱۰۰-۷۰	لوله و اتصالات
۱۱- شیشه لیفی با حصار بخاری	۷۰-۵-	۴۵-۲۹	۳۲-۱۰	خطوط تبرید
۱۲- شیشه لیفی بدون پتوهای حصار بخاری	تا ۲۵۰	۴۵-۲۹	۴۸-۲۴	لوله‌های گرم
۱۳- تخته‌های شیشه لیفی	۴۵۰-۲۰	۵۲-۳۳	۱۰۰-۲۵	دیگ‌ها، مخازن، مبدل‌های گرمایی
۱۴- بلوک‌ها و تخته‌های خانه خانه	۵۰۰-۲۰	۱۰۸-۲۹	۱۵۰-۱۱۰	لوله‌های گرم
۱۵- بلوک‌ها و تخته‌های از جنس‌اسفنج اورتان	۱۵۰-۱۰۰	۲۰-۱۶	۶۵-۲۵	لوله‌کشی
۱۶- اشکال پیش ساخته الیاف معدنی	تا ۶۵۰	۹۱-۳۵	۱۶۰-۱۲۵	لوله‌کشی گرم
۱۷- پتوهای الیاف معدنی	تا ۷۵۰	۸۱-۳۷	۱۲۵	لوله‌کشی گرم
۱۸- بلوک‌های پشم معدنی	۱۰۰۰-۴۵۰	۱۳۰-۵۲	۲۹۰-۱۷۵	لوله‌کشی گرم
۱۹- بلوک‌ها و تخته‌های سیلیکات کلسیم	۱۰۰۰-۲۳۰	۸۵-۳۲	۱۶۰-۱۰۰	لوله‌کشی گرم، دیگ‌ها آستر دودکش
۲۰- بلوک‌های الیاف معدنی	تا ۱۱۰۰	۱۳۰-۵۲	۲۱۰	دیگ‌ها و مخازن

برای واحد سطح آجر و اندود داریم:

$$R_b = \frac{\Delta x}{k} = \frac{(۴)(۰/۰۲۵۴)}{۰/۷} = ۰/۱۴۵ \ \frac{m^۲.^\circ C}{W}$$

$$R_p = \frac{\Delta x}{k} = \frac{(۱/۵)(۰/۰۲۵۴)}{۰/۴۸} = ۰/۰۷۹ \ \frac{m^۲.^\circ C}{W}$$

بنابراین مقاومت گرمایی بدون عایق برابر است با:

$$R = ۰/۱۴۵ + ۰/۰۷۹ = ۰/۲۲۴ \ \frac{m^۲.^\circ C}{W}$$

بنابراین:

$$R \text{ با عایق} = \frac{۰/۲۲۴}{۰/۲} = ۱/۱۲۲ \ \frac{m^۲.^\circ C}{W}$$

و این برابر است با مقدار قبلی به اضافه مقاومت پشم سنگ:

$$۱/۱۲۲ = ۰/۲۲۴ + R_{pw}$$

$$R_{pw} = ۰/۸۹۸ = \frac{\Delta x}{k} = \frac{\Delta x}{۰/۰۶۵}$$

بنابراین:

$$\Delta x_{pw} = ۰/۰۵۸۴ \text{ m} = ۲/۳۰ \text{ in}$$

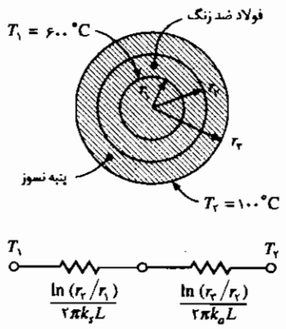
مثال ۲-۴ سیستم استوانه‌ای چند لایه

لوله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ $\left[k = ۱۹ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ (۱۸٪کرم، ۸٪نیکل، ...) با دیواره ضخیم، به قطر داخلی ۲ cm و قطر خارجی ۴ cm را با لایه عایق پنبه نسوز به ضخامت ۳ cm $\left[k = ۰/۲ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ پوشانده‌ایم. اگر دمای دیوار داخلی لوله ۶۰۰°C و دمای خارجی عایق ۱۰۰°C باشد اتلاف گرما در متر طول لوله را حساب کنید. دمای میان سطح لوله و عایق را نیز محاسبه کنید.

حل:

شکل زیر شبکه گرمایی این مسأله را نشان می‌دهد. شدت جریان گرما از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{q}{L} = \frac{۲\pi(T_۱ - T_۲)}{\frac{ln\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)}{k_s} + \frac{ln\left(\frac{r_۳}{r_۲}\right)}{k_a}} = \frac{۲\pi(۶۰۰ - ۱۰۰)}{\frac{(ln\ ۲)}{۱۹} + \frac{\left(ln\frac{۵}{۴}\right)}{۰/۲}} = ۶۸۰ \ \frac{W}{m}$$



شکل مثال ۲-۲

برای محاسبه دمای میان سطح دیواره بیرونی لوله و عایق می‌توان از این شدت جریان گرما استفاده کرد، داریم:

$$\frac{q}{L} = \frac{T_a - T_۲}{\frac{ln\left(\frac{r_۳}{r_۲}\right)}{۲\pi k_a}} = ۶۸۰ \ \frac{W}{m}$$

که T_α دمای میان سطح و برابر است با:

$$T_\alpha = ۵۹۵/۸^\circ C$$

واضح است که بیش‌ترین مقاومت گرمایی از طرف عایق ایجاد می‌شود. و از این رو بیش‌ترِ افت دما در این ماده صورت می‌گیرد.

شرایط مرزی جابه‌جایی

در فصل ۱ ملاحظه کردیم که انتقال گرمای جابه‌جایی را می‌توان از فرمول زیر حساب کرد:

$$q_{\text{جابه‌جایی}} = hA\ (T_w - T_\infty)$$

تشابه مقاومت الکتریکی برای فرآیند جابه‌جایی را می‌توان با باز نویسی این معادله چنین ترسیم کرد.

$$q_{\text{جابه‌جایی}} = \frac{T_w - T_\infty}{\frac{۱}{hA}} \qquad (۱۱-۲)$$

که در این‌جا عبارت $\frac{۱}{hA}$ مقاومت جابه‌جایی است.

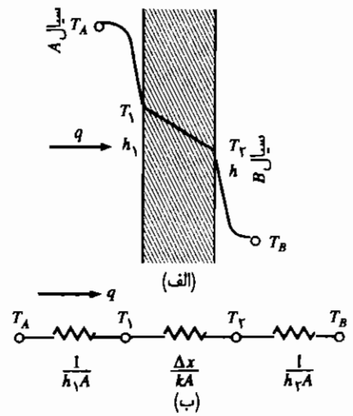
❑ ۲-۵ ضریب انتقال گرمای کل

دیواره تخت شکل ۲-۵ را در نظر بگیرید که یک طرف آن در معرض سیال گرم A و طرف دیگرش در معرض سیال سردتر B قرار دارد. انتقال گرما از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$q = h_۱A\ (T_A - T_۱) = \frac{kA}{\Delta x}\ (T_۱ - T_۲) = h_۲A\ (T_۲ - T_B)$$

فرآیند انتقال گرما را می‌توان به وسیله شبکه مقاومت شکل (۲-۵ب) نشان داد. انتقال گرمای کل به صورت نسبت اختلاف دمای کل به مجموع مقاومت‌های گرمایی محاسبه می‌شود:

$$q = \frac{T_A - T_B}{\frac{۱}{h_۱A} + \frac{\Delta x}{kA} + \frac{۱}{h_۲A}} \qquad (۱۲-۲)$$



شکل ۲-۵ انتقال گرمای کل از دیوار تخت.

توجه کنید که مقدار $\frac{۱}{hA}$ برای نمایش مقاومت جابه‌جایی به‌کار می‌رود. گاهی، انتقال گرمای کل مرکب از هدایت و جابه‌جایی، اغلب بر حسب ضریب انتقال گرمای کل، U، بیان می‌شود که تعریف آن چنین است:

$$q = UA\ \Delta T_{\text{کل}} \qquad (۱۳-۲)$$

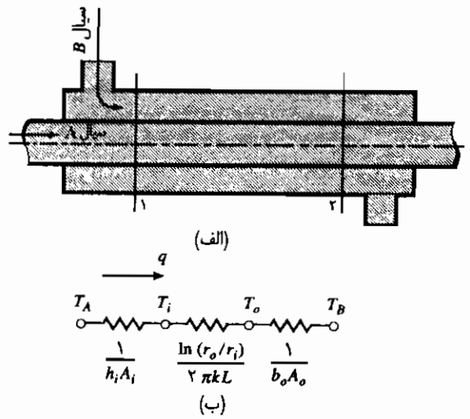
که A مساحت برای جریان گرما است. ضریب انتقال گرمای کل، طبق معادله (۲-۱۲)، برابر است با:

$$U = \frac{۱}{\frac{۱}{h_۱} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{۱}{h_۲}}$$

ضریب انتقال گرمای کل نیز با مقدار معادله ۲-۶ چنین رابطه دارد:

$$U = \frac{۱}{R_{\text{مقدار}}}$$

تشابه مقاومت الکتریکی برای استوانه‌ای تو خالی که سطوح درونی و بیرونی آن در معرض محیط جابه‌جایی است، به صورت شکل ۲-۶ خواهد بود. در اینجا باز هم T_A و T_B دمای دو سیال‌اند.



شکل ۲-۶ تشابه مقاومتی استوانه توخالی با مرزهای جابه‌جایی.

توجه کنید که در این مورد، مساحت مربوط به جابه‌جایی برای دو سیال یکسان نیست. این مساحت‌ها به قطر درونی لوله و ضخامت جداره بستگی دارند. در این حالت، انتقال گرمای کل مطابق شبکه گرمایی شکل ۲-۶ برابر است با:

$$q = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_iA_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_oA_o}} \qquad (۱۴-۲)$$

A_i و A_o مساحت سطوح درونی و بیرونی لوله‌اند. ضریب انتقال گرمای کل را می‌توان بر اساس مساحت درونی یا مساحت بیرونی لوله بیان کرد. بنابراین:

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL} + \frac{A_i}{A_o}\frac{1}{h_o}} \qquad (۱۵-۲)$$

$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i}\frac{1}{h_i} + \frac{A_o \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o}} \qquad (۱۶-۲)$$

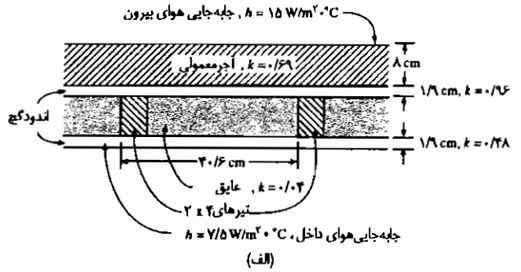
ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی را، برای استفاده در فرمول ضریب انتقال گرمای کل، طبق روش‌های تشریحی در فصول قبل محاسبه کرده‌ایم. بعضی از ضرایب انتقال گرمای کل نمونهٔ مبدل‌های گرمایی در جدول ۱۰-۱ داده شده‌اند.

مثال ۲-۳ انتقال گرما در دیوار مرکب

تیرهای چوب بست "۴ × ۲" ساختمانی به ابعاد واقعی ۹/۲۱ cm × ۴/۱۳ و ضریب هدایت‌گرمایی $0/1 \frac{W}{m.^\circ C}$ است. دیوار خانه‌ای را مطابق شکل مثال ۲-۳ ساخته‌اند. ضریب انتقال گرمای کل و مقدار R دیوار را محاسبه کنید.

حل :

مقطع دیوار را می‌توان به صورتی در نظر گرفت که دارای دو مسیر موازی جریان گرما است: (۱) از طریق تیرهای چوب بست و (۲) از طریق عایق. مقاومت گرمایی هر مسیر را محاسبه کرده، سپس مقادیر را ترکیب کرده، ضریب انتقال گرمای کل را به‌دست می‌آوریم.



شکل مثال ۲-۳ (الف) ساخت دیوار منزل مسکونی (ب) مدل مقاومت گرمایی.

۱- انتقال گرما از تیرها (به ازای واحد عمق $A = 0/0413\ m^2$).

این جریان گرما از شش مقاومت گرمایی صورت می‌گیرد:

الف) مقاومت جابه‌جایی بیرون آجر

$$R = \frac{1}{hA} = \frac{1}{(15)(0/0413)} = 1/614\ \frac{^\circ C}{W}$$

ب) مقاومت هدایتی در آجر

$$R = \Delta x / kA = \frac{0/08}{(0/69)(0/0413)} = 2/807\ \frac{^\circ C}{W}$$

ج) مقاومت هدایتی در اندود بیرونی

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0/019}{(0/96)(0/0413)} = 0/48\ \frac{^\circ C}{W}$$

د) مقاومت هدایتی در تیر چوبی

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0/0921}{(0/1)(0/0413)} = 22/3\ \frac{^\circ C}{W}$$

ه) مقاومت هدایتی در اندود داخلی

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0/019}{(0/48)(0/0413)} = 0/96\ \frac{^\circ C}{W}$$

و) مقاومت جابه‌جایی در داخل

$$R = \frac{1}{hA} = \frac{1}{(7/5)(0/0413)} = 3/23\ \frac{^\circ C}{W}$$

کل مقاومت گرمایی در مقطع تیر چوبی برابر است با:

$$R_{کل} = 1/614 + 2/807 + 0/48 + 22/3 + 0/96 + 3/23 = 31/39\ \frac{^\circ C}{W} \qquad (الف)$$

۲- مقطع عایق(به ازای واحد عمق $A = 0/406 - 0/0413 = 0/0406\ m^2$). در مقطع عایق، پنج عدد از مصالح یکسان است، اما مقاومت‌ها دارای جمله‌های مساحت متفاوت‌اند، یعنی $40/6 - 4/13\ cm$ به جای $4/13\ cm$، به‌طوری که هریک از مقاومت‌های قبلی را باید در ضریب $\frac{4/13}{(40/6 - 4/13)} = 0/113$ ضرب کرد. مقاومت در عایق برابر است با:

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0/0921}{(0/04)(0/406 - 0/0413)} = 6/31$$

و مقاومت کل در مقطع عایق برابر است با:

$$R_{کل} = (1/614 + 2/807 + 0/48 + 0/96 + 3/23)(0/113) + 6/31$$

$$= 7/337\ \frac{^\circ C}{W} \qquad (ب)$$

اکنون مقاومت کل مقطع از ترکیب مقاومت‌های موازی معادله‌های (الف) و (ب) به‌دست می‌آید:

$$R_{کل} = \frac{1}{\left(\frac{1}{31/39}\right) + \left(\frac{1}{7/337}\right)} = 5/947\ \frac{^\circ C}{W} \qquad (ج)$$

این مقدار با ضریب انتقال گرمای کل به صورت زیر رابطه دارد:

$$q = UA\Delta T = \frac{\Delta T}{R_{کل}} \qquad (د)$$

که A مساحت کل مقطع برابر $0/406\ m^2$ است. از این رو

$$U = \frac{1}{RA} = \frac{1}{(5/947)(0/406)} = 0/414\ \frac{^\circ C.m^2}{W}$$

همان‌طور که دیدیم، مقدار R تا حدودی با مقاومت گرمایی فرق دارد و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$R_{مقدار} = \frac{1}{U} = \frac{1}{0/414} = 2/414\ \frac{^\circ C.m^2}{W}$$

اظهارنظر:

این مثال رابطه میان مفاهیم مقاومت گرمایی، ضریب انتقال گرمای کل و مقدار R را نشان می‌دهد. توجه کنید که مقدار R شامل مفهوم واحد مساحت است در حالی که مقاومت گرمایی فاقد آن است.

مثال ۲-۴ ضریب انتقال گرمای کل برای لوله

آب به دمای $50\ ^\circ C$ داخل لوله‌ای به قطر داخلی $2/5\ cm$ جاری است به طوری که $h_i = 3500 \frac{W}{m^2.^\circ C}$. ضخامت جداره لوله برابر $0/8\ mm$ و ضریب هدایت گرمایی آن $16 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. از بیرون لوله با $h_o = 7/6 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ گرما به طریق جابه‌جایی آزاد تلف می‌شود. ضریب انتقال گرمای کل و اتلاف گرمای واحد طول را به هوای محیطی به دمای $20\ ^\circ C$ محاسبه کنید.

حل :

در این مسأله مطابق معادله ۲-۱۴، سه مقاومت سری وجود دارد. مقاومت‌ها را به ازای $L = 1/0\ m$، $d_i = 0/025\ m$، $d_o = 0/025 + (2)(0/0008) = 0/0266\ m$ محاسبه می‌کنیم:

$$R_i = \frac{1}{h_iA_i} = \frac{1}{(3500)\,\pi(0/025)(1/0)} = 0/00364\ \frac{^\circ C}{W}$$

$$R_i = \frac{\ln\left(\frac{d_o}{d_i}\right)}{2\pi kL}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{0/0266}{0/025}\right)}{2\,\pi(16)(1/0)} = 0/00062\ \frac{^\circ C}{W}$$

$$R_o = \frac{1}{h_oA_o} = \frac{1}{(7/6)\,\pi(0/0266)(1/0)} = 1/575\ \frac{^\circ C}{W}$$

روشن است که مقاومت جابه‌جایی بیرون، بزرگ‌تر از همه است و "به این ترتیب همه را در خود جای می‌دهد." این نه به آن معنی است که مقاومت کنترل کننده برای انتقال گرمای کل است زیرا سایر مقاومت‌ها (در سری) در مقایسه با آن قابل صرف‌نظر است. ضریب انتقال گرمای کل را بر پایه مساحت بیرونی لوله قرار می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = UA_o\Delta T \qquad (الف)$$

$$U_o = \frac{1}{A_o\Sigma R}$$

$$= \frac{1}{[\pi(0/0266)(1/0)](0/00364 + 0/00062 + 1/575)}$$

$$= 7/577\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$$

که مقداری خیلی نزدیک به مقدار $h_o = 7/6$ مربوط به ضریب جابه‌جایی بیرون است. انتقال گرما از معادله (الف) چنین است:

$$q = UA_o\Delta T = (7/577)\,\pi\,(0/0266)(1/0)(50 - 20)$$

$$= 19\ W \text{ (برای ۱/۰m طول)}$$

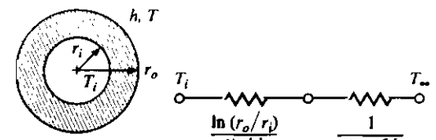
اظهارنظر:

مثال فوق این نکته مهم را نشان می‌دهد که بسیاری از مسائل عملی انتقال گرما شامل چند حالت انتقال گرماست که در ترکیب با هم عمل می‌کنند و در مورد بالا، به صورت یک سری مقاومت‌های گرمایی. این مسأله که یک حالت انتقال گرما بر کل مسأله حاکم باشد چیز غیر معمولی نیست. در این مثال، انتقال گرمای کل را می‌توانستیم با تقریب خوبی، فقط با محاسبه اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از بیرون لوله به‌دست آوریم که دمای آن $50\ ^\circ C$ است. چون مقاومت‌های جابه‌جایی بیرون و دیوار خیلی ناچیز هستند، افت دماهای ناچیزی وجود دارد و دمای بیرون لوله خیلی به دمای مایع داخلی یعنی $50\ ^\circ C$ نزدیک است.

❑ ۲-۶ ضخامت بحرانی عایق

لایه عایق پیچیده به دور لوله، شکل ۲-۷ را در نظر بگیرید. دمای درونی عایق T_i و سطح بیرونی آن در محیط جابه‌جایی به دمای T_∞ قرار داده می‌شود. مقدار انتقال گرما با توجه به شبکه گرمایی برابر است با:

$$q = \frac{2\pi L(T_i - T_\infty)}{\frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{r_oh}} \qquad (۱۷-۲)$$



شکل ۲-۷ ضخامت بحرانی عایق.

از این عبارت برای تعیین شعاع بیرونی عایق، r_o، که موجب انتقال گرمای حداکثر می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 = \frac{-2\pi L\,(T_i - T_\infty)\left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{hr_o^2}\right)}{\left[\frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{k} + \frac{1}{r_o h}\right]^2}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$r_o = \frac{k}{h} \qquad (۲-۱۸)$$

معادله (۲-۱۸) مفهوم شعاع بحرانی عایق را بیان می‌کند. اگر شعاع بیرونی کم‌تر از مقدار حاصل از این معادله باشد، با افزودن عایق مقدار انتقال گرما ***افزایش*** می‌یابد. اگر شعاع بیرونی از شعاع بحرانی بیش‌تر باشد، افزایش ضخامت عایق موجب کاهش انتقال گرما می‌شود. مفهوم اصلی آن است که به‌ازای مقادیر به حد کافی اندک h، با افزودن عایق اتلاف گرمای به‌طریق جابه‌جایی افزایش می‌یابد زیرا مساحت زیاد می‌شود.

مثال ۲-۵ ضخامت بحرانی عایق

شعاع بحرانی عایق برای پنبه نسوز $\left[k = 0/17\ \frac{W}{m.\,^\circ C}\right]$ که دور لوله‌ای پیچیده شده و در هوای اتاقی به‌دمای ۲۰ °C و $h=3/0\ \frac{W}{m^2.\,^\circ C}$ قرار دارد را محاسبه کنید. اتلاف گرما از لوله به قطر ۵ cm و دمای ۲۰۰°C وقتی که تا شعاع بحرانی عایق‌شده و وقتی که فاقد عایق است را محاسبه کنید.

حل :

از معادله (۲-۱۸) مقدار r_o را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0/17}{3/0} = 0/0567\ m = 5/67\ cm$$

شعاع درونی عایق برابر $\frac{5/0}{2} = 2/5$ cm است، بنابراین انتقال گرما از معادله (۲-۱۷) چنین حساب محاسبه می‌شود:

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(200 - 20)}{\frac{\ln\left(\frac{5/67}{2/5}\right)}{0/17} + \frac{1}{(0/0567)(3/0)}} = 105/7\ \frac{W}{m}$$

در حالت بدون عایق، جابه‌جایی از سطح بیرونی لوله برابر است با:

$$\frac{q}{L} = h(2\pi r)(T_i - T_o) = (3/0)(2\pi)(0/025)(200-20)$$
$$= 84/8\ \frac{W}{m}$$

بنابراین افزودن عایق $r_o = 3/17$ cm $(2/5 - 5/67)$ در واقع انتقال گرما را به اندازه ۲۵٪ افزایش می‌دهد.

راه دیگر آن است که از فایبرگلاس با ضریب هدایت گرمایی $0/04\ \frac{W}{m.\,^\circ C}$ به عنوان ماده عایق استفاده شود. شعاع بحرانی در این حالت برابر است با:

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0/04}{3/0} = 0/0133\ m = 1/33\ cm$$

اکنون مقدار شعاع بحرانی کم‌تر از شعاع بیرونی لوله (2/5 cm) است و از این رو افزودن هر مقدار عایق موجب کاهش انتقال گرما می‌شود. در مسأله عملی عایق‌کاری لوله‌ها، اتلاف گرمای کل از تابش و هم‌چنین جابه‌جایی از سطح بیرونی عایق نیز تأثیر می‌پذیرد.

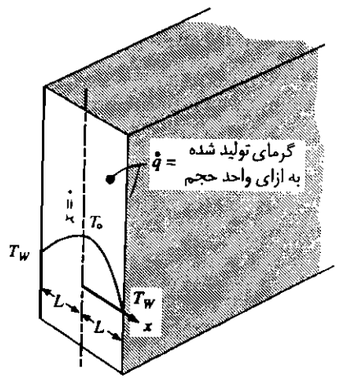
❑ ۲-۷ سیستم‌های با چشمه گرمایی

برخی از کاربردهای جالب توجه اصول انتقال گرما به سیستم‌هایی مربوط است که گرما در داخل آنها تولید می‌شود. راکتورهای هسته‌ای نمونه‌ای از این سیستم‌اند. هادی‌های الکتریکی و سیستم‌های واکنش شیمیایی انواع دیگر آنند. در اینجا بحث را به سیستم‌های یک بعدی و یا مشخص‌تر بگوییم به سیستم‌هایی که دما فقط تابعی از یک مختص مکانی است، محدود می‌کنیم.

دیواره تخت با چشمه‌های گرمایی

دیواره تختی را با چشمه‌های گرمایی با توزیع یکنواخت مطابق شکل ۲-۸ در نظر بگیرید. ضخامت دیواره در امتداد محور xها برابر است با $2L$ و فرض می‌شود که ابعاد در امتدادهای دیگر آن‌قدر بزرگ باشد که بتوان جریان گرما را یک بعدی در نظر گرفت.

گرمای ایجاد شده در واحد حجم $\dot{q}$ است و فرض می‌کنیم که



شکل ۲-۸ طرح نشان دهنده مسأله هدایت یک بعدی با تولید گرما.

ضریب هدایت گرمایی با دما تغییر نمی‌کند. این وضع در عمل با عبور شدت جریان در ماده هادی الکتریکی ایجاد می‌شود. از فصل ۱، معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان گرما را چنین داریم:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (۲-۱۹)$$

دما در دو طرف دیواره را برای شرایط مرزی مشخص می‌کنیم:

$$T = T_w \quad \text{در} \quad x = \pm L \qquad (۲-۲۰)$$

جواب عمومی معادله (۲-۱۹) چنین است:

$$T = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (۲-۲۱)$$

چون باید در دو طرف دیواره دما یکسان باشد بنابراین C_1 برابر صفر است. دما در صفحه میانی را با T_o نشان می‌دهیم و از معادله (۲-۲۱) داریم:

$$T_o = C_2$$

بنابراین توزیع دما به‌صورت سهمی است:

$$T - T_o = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 \qquad (۲-۲۲الف)$$

یا:

$$\frac{T - T_o}{T_w - T_o} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad (۲-۲۲ب)$$

عبارت مربوط به دمای صفحه میانی، T_o، را می‌توان از معادله انرژی به‌دست آورد. در شرایط حالت پایدار، باید کل گرمای ایجاد شده با گرمای تلف‌شده از سطوح برابر باشد. بنابراین:

$$2\left(-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}\right) = \dot{q}A2L$$

که A مساحت مقطع صفحه است. گرادیان دما در دیواره با مشتق‌گیری از معادله (۲-۲۲ ب) به‌دست می‌آید:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = (T_w - T_o)\left(\frac{2x}{L^2}\right)\Big|_{x=L} = (T_w - T_o)\frac{2}{L}$$

پس

$$-k\,(T_w - T_o)\frac{2}{L} = \dot{q}L$$

و

$$T_o = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_w \qquad (۲-۲۳)$$

با جای‌گزینی $T = T_w$ در $x = L$ در معادلهٔ (۲-۲۲ الف) به همین نتیجه می‌رسیم.

معادله توزیع دما را به شکل دیگری نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 1 - \frac{x^2}{L^2} \qquad (۲-۲۲پ)$$

❑ ۲-۸ استوانه با چشمه‌های گرمایی

استوانه‌ای به شعاع R با منابع گرمایی با توزیع یکنواخت و ضریب هدایت گرمایی ثابت را در نظر بگیرید. اگر استوانه آن‌قدر بلند باشد که بتوان دما را فقط تابع شعاع فرض کرد، معادله دیفرانسیلِ آن را می‌شود با صرف‌نظر از جملات مربوط به محور؛ آزیموت و وابسته به زمان معادله (۱-۳ب) به‌دست آورد:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (۲-۲۴)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$T = T_w \quad \text{در} \quad r = R$$

و گرمای تولیدی برابر است با گرمای تلف‌شده از سطح:

$$\dot{q}\pi R^2 L = -k2\pi RL\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}$$

از آنجا که تابع دما در مرکز استوانه باید پیوسته باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{در} \quad r = 0$$

گرچه لزومی ندارد که از این شرط استفاده کنیم زیرا وقتی که دو شرط مرزی اولیه صادق باشد این شرط خود به‌خود برقرار است.

معادله (۲-۲۴) را چنین بازنویسی می‌کنیم:

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = \frac{-qr}{k}$$

و توجه داریم که:

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

با انتگرال‌گیری معادله فوق داریم:

$$r\frac{dT}{dr} = \frac{-\dot{q}r^2}{2k} + C_1$$

و :

$$T = \frac{-\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

با توجه به شرط دوم مرزی فوق داریم:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = \frac{-\dot{q}R}{2k} = \frac{-\dot{q}R}{2k} + \frac{C_1}{R}$$

بنابراین:

$$C_1 = 0$$

همچنین توجه کنید که C_1 باید صفر باشد زیرا در $r = 0$ تابع لگاریتمی، بی‌نهایت می‌شود. با استفاده از شرط اول مرزی داریم:

$$T = T_w = \frac{-\dot{q}R^2}{4k} + C_2 \qquad \text{در} \quad r = R$$

بنابراین:

$$C_2 = T_w + \frac{\dot{q}R^2}{4k}$$

در این‌صورت جواب نهایی توزیع دما عبارتست از:

$$T - T_w = \frac{\dot{q}}{4k}(R^2 - r^2) \qquad (۲-۲۵\text{الف})$$

یا به شکل بی‌بعد:

$$\frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad (۲-۲۵\text{ب})$$

که T_o دما در $r = 0$)، از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$T_o = \frac{\dot{q}R^2}{4k} + T_w \qquad (۲-۲۶)$$

به‌عنوان تمرین نشان دهید که گرادیان دما در $r = 0$ برابر صفر است.

شرایط مرزی مناسب برای استوانه‌ای توخالی با چشمه‌های گرمایی با توزیع یکنواخت چنین است:

(سطح درونی) در $r = r_i$ $\quad T = T_i$

(سطح بیرونی) در $r = r_o$ $\quad T - T_o$

جواب عمومی باز هم عبارتست از:

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

با کاربرد شرایط مرزی جدید داریم:

$$T - T_o = \frac{\dot{q}}{4k}(\xi^2 - r^2) + C_1 \ln\left(\frac{r}{r_o}\right) \qquad (۲-۲۷)$$

که در آن ثابت C_1 از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$C_1 = \frac{T_i - T_o + \frac{\dot{q}(r_i^2 - \xi^2)}{4k}}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \qquad (۲-۲۸)$$

مثال ۲-۶ چشمه گرمایی با جابه‌جایی

از سیمی به قطر ۳ mm و از جنس فولاد ضدزنگ $\left[k = 19 \frac{W}{m.°C}\right]$ شدت جریان ۲۰۰ آمپر عبور می‌کند. مقاومت مخصوص فولاد $70\mu\Omega\,cm$ و طول سیم ۱ m است. سیم را در سیال به دمای ۱۱۰ °C فرو می‌بریم و در این موقع ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی برابر $4 \frac{kW}{m^2.°C}$ خواهد بود. دمای مرکز سیم را محاسبه کنید.

حل :

تمام توان ایجاد شده در سیم باید به‌طریق جابه‌جایی به مایع رسیده باشد:

$$P = I^2 R = q = hA(T_w - T_\infty) \qquad (\text{الف})$$

مقاومت سیم را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{(70 \times 10^{-6})(100)}{\pi (0/15)^2} = 0/099\ \Omega$$

که ρ مقاومت مخصوص سیم است. مساحت جانبی سیم برابر $\pi\, dL$ است بنابراین از معادله (الف) داریم:

$$(200)^2(0/099) = 4000\pi(3 \times 10^{-3})(1)(T_w - 110) = 3960\ W$$

و :

$$T_w = 215\,°C \qquad [419\,°F]$$

گرمای ایجاد شده در واحد حجم $\dot{q}$ را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$P = \dot{q}V = \dot{q}\pi r^2 L$$

بنابراین:

$$\dot{q} = \frac{3960}{\pi (1/5 \times 10^{-2})^2 (1)} = 560/2 \frac{MW}{m^3} \qquad \left[5/41 \times 10^7 \frac{Btu}{h.ft^3}\right]$$

و بالاخره دمای مرکز سیم از معادله (۲-۲۶) حساب می‌شود:

$$T_o = \frac{\dot{q}\xi^2}{4k} + T_w = \frac{(5/60 2 \times 10^8)(1/5 \times 10^{-2})^2}{(4)(19)} + 215 = 231/6\,°C\,[449\,°F]$$

۲-۹ سیستم‌های هدایت- جابه‌جایی

گاهی باید گرمای هدایت شده در جسم را با فرآیند جابه‌جایی بیرون برد (یا تخلیه کرد). مثلاً گرمایی که به طریق هدایت از دیواره کوره تلف می‌شود، باید به‌طریق جابه‌جایی به محیط اطراف پراکنده شود. در مبدل‌های گرمایی می‌توان برای بردن گرما از سیال گرم به بیرون، از لوله پره‌دار استفاده کرد. انتقال گرما از سیال به لوله پره‌دار به‌طریق جابه‌جایی صورت می‌گیرد. گرما در جسم هدایت شده، در نهایت به‌طریق جابه‌جایی به محیط اطراف پراکنده می‌شود. واضح است که تحلیل سیستم‌های مرکب از هدایت و جابه‌جایی از نظر عملی خیلی مهم است.

ما بخشی از تحلیل سیستم‌های هدایت - جابه‌جایی را در فصل ۱۰ که مربوط به مبدل‌های گرمایی است انجام خواهیم داد. در حال حاضر بعضی از مسائل سطوح گسترده ساده را بررسی می‌کنیم. پره‌ای یک بعدی را که در معرض سیال احاطه کننده آن به دمای T_∞ قرار گرفته، شکل ۲-۹، در نظر بگیرید. دمای پایه پره T_o است. این مسأله را با استفاده از توازن انرژی روی جزئی از پره به ضخامت dx مطابق شکل بررسی می‌کنیم.

انرژی وارد شده به سطح چپ =

انرژی تلف‌شده به‌طریق جابه‌جایی + انرژی خارج شده از سطح راست

معادله معرف ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی چنین بود:

$$q = hA(T_w - T_\infty) \qquad (۲-۲۹)$$

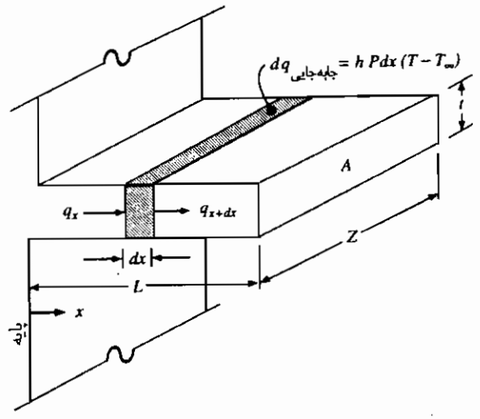
که مساحت در این معادله، همان مساحت جهت جابه‌جایی است. اگر مساحت مقطع پره برابر A و محیط آن P باشد، کمیت‌های انرژی چنین است:

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx} \quad = \text{انرژی وارد شده به سطح چپ}$$

$$q_{x+dx} = -kA\frac{dT}{dx}\Big]_{x+dx} \quad = \text{انرژی خارج‌شده از سطح راست}$$

$$= -kA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}dx\right)$$

$$hP\,dx(T - T_\infty) = \text{انرژی تلف‌شده به‌طریق جابه‌جایی}$$



شکل ۲-۹ طرح نشان دهنده هدایت و جابه‌جایی یک بعدی از پره مستطیلی.

یادآور می‌شویم که دیفرانسیل مساحت برای جابه‌جایی، برابر است با حاصل‌ضرب محیط پره در دیفرانسیل طول dx. وقتی این کمیت‌ها را ترکیب کنیم، توازن انرژی چنین می‌شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hp}{kA}(T - T_\infty) = 0 \qquad (۲-۳۰\text{الف})$$

اگر $\theta = T - T_\infty$، معادله (۲-۳۰الف) چنین می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA}\theta = 0 \qquad (۲-۳۰\text{ب})$$

یک شرط مرزی عبارتست از:

$$\theta = \theta_o = T_o - T_\infty \qquad \text{در } x = 0$$

شرط دیگر مرزی به وضعیت فیزیکی مسأله بستگی دارد. چند مورد را می‌توان در نظر گرفت.

مورد ۱: پره خیلی بلند و دما در انتهای آن برابر دمای محیط است.

مورد ۲: طول پره محدود است و گرما از انتهای آن به صورت جابه‌جایی به هدر می‌رود.

مورد ۳: انتهای پره عایق‌شده به طوری که در $x = L$ داریم $\frac{dT}{dx} = 0$.

اگر $m^2 = \frac{hP}{kA}$ در نظر بگیریم، می‌توان جواب عمومی معادله (۲-۳۰ب) را چنین نوشت:

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \qquad (۲-۳۱)$$

شرایط مرزی برای مورد ۱ عبارتند از:

$$\theta = \theta_o \qquad \text{در } x = 0$$

$$\theta = 0 \qquad \text{در } x = \infty$$

و جواب مسأله چنین است:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = e^{-mx} \qquad (۲-۳۲)$$

شرایط مرزی برای مورد سوم عبارتند از:

$$\theta = \theta_o \qquad \text{در } x = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \qquad \text{در } x = L$$

بنابراین:

$$\theta_o = C_1 + C_2$$

$$0 = m(-C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL})$$

با حل معادلات فوق و به‌دست آوردن C_1 و C_2 و قرار دادن آنها در معادله (۲-۳۱) داریم:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} \qquad (۲-۳۳\text{الف})$$

$$= \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh mL} \qquad (۲-۳۳\text{ب})$$

توابع هیپربولیک چنین است:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

حل مسأله برای مورد دوم جبری‌تر بوده و نتیجه چنین است:

$$\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + \left(\frac{h}{mk}\right)\sinh m(L - x)}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL} \qquad (۲-۳۴)$$

تمام گرمای هدر شده از پره باید در $x = 0$ به داخل پایه هدایت شود. با استفاده از معادلات توزیع دما می‌توان گرمای هدر شده از پره را از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$q = -kA\frac{dT}{dx}\Big]_{x=0}$$

راه دیگر، انتگرال‌گیری از اتلاف گرمای جابه‌جایی است:

$$q = \int_0^L hp(T - T_\infty)\,dx = \int_0^L hP\,\theta\,dx$$

گرچه در بسیاری از موارد، معادله اول از نظر کاربرد ساده‌تر است. برای مورد اول داریم:

$$q = -kA(-m\theta_o e^{-m(0)}) = \sqrt{hPkA}\,\theta_o \qquad (۲-۳۵)$$

و برای مورد سوم:

$$q = -kA\,\theta_o\, m\left(\frac{1}{1 + e^{-2mL}} - \frac{1}{1 + e^{+2mL}}\right)$$

$$= \sqrt{hPkA}\,\theta_o \tanh mL \qquad (۲-۳۶)$$

جریان گرما در مورد ۲ برابر است با:

$$q = \sqrt{hPkA}\,(T_o - T_\infty)\,\frac{\sinh mL + \left(\frac{h}{mk}\right)\cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL} \qquad (۳۷-۲)$$

در توضیح فوق فرض برآن بود که عمده گرادیان دما تنها در امتداد x وجود دارد. این فرض وقتی صادق است که پره به‌حد کافی نازک باشد. در بسیاری از پره‌هایی که عملاً با آنها سروکار داریم، خطایی که با در نظر گرفتن این فرض به وجود می‌آید کم‌تر از یک درصد است. چون در مورد مقدار ضریب جابه‌جایی h اطمینان وجود ندارد، دقت کل محاسبات پره‌ای که عملاً با آن سروکار داریم محدود خواهد بود. جالب است بدانید که ضریب جابه‌جایی به‌ندرت در سرتاسر سطح یکنواخت است؛ بر خلاف آنچه در بالا فرض کردیم. چنان‌چه این ضریب خیلی غیریکنواخت باشد باید برای حل مسأله از روش‌های عددی تفاضل محدود استفاده کنیم. این روش‌ها در فصل ۳ بحث می‌شود.

❑ ۲-۱۰ پره‌ها

تا اینجا روابط مربوط به انتقال گرما از میله یا پرهٔ با سطح مقطع یکنواخت را که از دیوار تخت بیرون آمده به‌دست آوردیم. ممکن است در عمل، پره‌ها سطح مقطع متغیر داشته و به سطوح استوانه‌ای متصل باشند. در هر یک از این موارد مساحت، متغیر گرفته می‌شود و حل معادلهٔ دیفرانسیل اصلی و روش‌های ریاضی مشکل‌تر می‌شود. ما تنها نتایج این وضعیت‌های پیچیده را ارائه می‌کنیم. به منظور تشریح بیش‌تر روش‌های ریاضی به کار رفته برای به‌دست آوردن این جواب‌ها به مرجع ۱ و ۸ مراجعه کنید.

برای نشان دادن تأثیر پره در انتقال مقدار معینی گرما، پارامتر جدیدی را که به بازدهی پره موسوم است چنین تعریف می‌کنیم:

$$\eta_f = \frac{\text{گرمای انتقال یافته واقعی}}{\text{گرمایی که اگر سطح کل پره به دمای پایه بود، انتقال می‌یافت}} = \text{بازدهی پره}$$

برای مورد سه فوق، بازدهی پره برابر است با:

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hPkA}\;\theta_o \tanh mL}{hPL\theta_o} = \frac{\tanh mL}{mL} \qquad (۳۸-۲)$$

فرض کردیم که پره‌ها آن‌قدر دراز هستند که بتوان جریان گرما را یک بعدی در نظر گرفت. مقدار mL را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA}}\,L = \sqrt{\frac{h\,(2z + 2t)}{kzt}}\,L$$

که z ارتفاع پره و t ضخامت آنست. حال اگر پره به‌حد کافی ارتفاع داشته باشد جمله $2z$ در مقایسه با $2t$ بزرگ خواهد شد و در نتیجه:

$$mL = \sqrt{\frac{2hz}{ktz}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{kt}}\,L$$

با ضرب صورت و مخرج در $L^{\frac{1}{2}}$ داریم:

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kLt}}\,L^{\frac{3}{2}}$$

Lt مساحت نیم‌رخ طولی پره است که چنین تعریف می‌شود:

$$A_m = Lt$$

بنابراین:

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kA_m}}\,L^{\frac{3}{2}} \qquad (۳۹-۲)$$

بنابراین با استفاده از معادله (۲-۳۹) می‌توان بازدهی پره‌ای با نوک عایق را از معادلهٔ (۲-۳۸) محاسبه کرد.

هارپر *Harper* و براون *Brown* [۲] نشان داده‌اند که اگر طول پره یک دوم ضخامت آن باشد، می‌توان جواب مورد دوم فوق را به همان صورت معادله (۲-۳۶) بیان کرد. از این رو در کلیه معادلاتی که در مورد پرهٔ با نوک عایق به کار می‌رود باید از طول اصلاحی L_c استفاده کرد. بنابراین:

$$L_c = L + \frac{t}{2} \qquad (۴۰-۲)$$

خطایی که از این تقریب حاصل می‌شود کم‌تر از ۸٪ است وقتی که:

$$\left(\frac{ht}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2} \qquad (۴۱-۲)$$

اگر میله‌ای استوانه‌ای مطابق شکل (۲-۱۰ ت) از دیواره بیرون آمده باشد، طول اصلاحی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L_c = L + \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = L + \frac{d}{4} \qquad (۴۲-۲)$$

نمونه‌های دیگر پره در شکل ۲-۱۰ ارائه شده‌اند. در شکل ۲-۱۱ بازدهی پره مثلثی و پره مستطیلی مستقیم در مورد دوم مقایسه شده‌اند. شکل ۲-۱۲ بازدهی پره‌های محیطی با مقطع مستطیلی را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که در اشکال ۲-۱۱ و ۲-۱۲ از طول اصلاحی پره L_c و سطح نیم‌رخ طولی A_m استفاده شده است. ملاحظه می‌شود که هر چه $\frac{r_{2c}}{r_1} \to 1/0$، منحنی بازدهی پره محیطی به منحنی بازدهی پره مستقیم با نیم‌رخ طولی مستطیلی شبیه‌تر می‌شود.

جالب توجه است که بدانید بازدهی پره به ازای $L = 0$ و یا بدون پره به حداکثر خود می‌رسد. بنابراین نباید انتظار داشت که بتوانیم عملکرد پره نسبت به طول آن به حداکثر برسانیم. گرچه می‌توان بازدهی را نسبت به مقدار مادهٔ پره (جرم، حجم یا هزینه) به حداکثر رساند و این روش ازدیاد بازدهی دارای اهمیت اقتصادی

نسبتاً واضحی است. موضوع انتقال گرمای تابشی پره را مورد بحث قرار نداده‌ایم. انتقال تابشی در تعدادی از کاربردها اهمیت دارد و خواننده مشتاق می‌تواند به منظور کسب اطلاع در این زمینه به کتاب سیگل *siegel* و هوول *Howell* [۹] مراجعه کند.

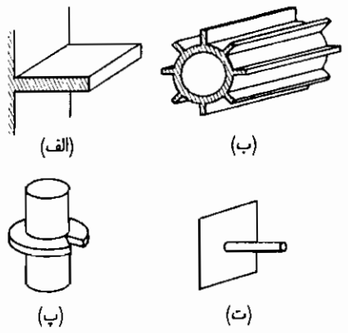
در مواردی، روش معتبر برای ارزیابی عملکرد پره، مقایسه انتقال گرما با وجود پره و بدون آن است. نسبت این کمیت‌ها برابر است با:

$$\frac{q \text{ با پره}}{q \text{ بدون پره}} = \frac{\eta_f A_f h\theta_o}{hA_b\theta_o}$$

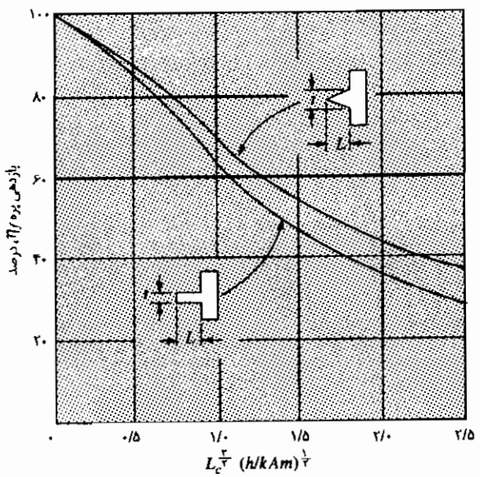
که A_f مساحت کل پره و A_b مساحت پایه است. برای پره‌های با نوک عایق با معادلهٔ (۲-۳۶):

$$A_f = pL$$

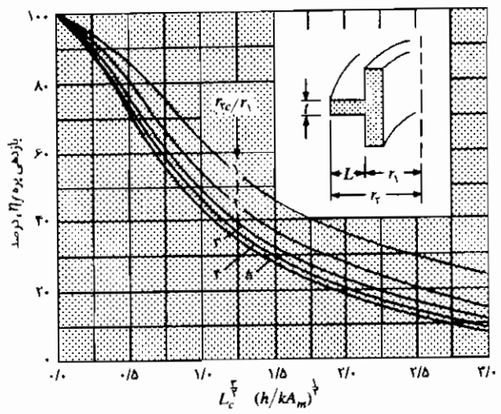
$$A_b = A$$



شکل ۲-۱۰. انواع مختلف سطوح پره‌دار. الف) پره‌مستقیم با نیم‌رخ مستطیلی روی دیوارتخت، ب) پره مستقیم با نیم‌رخ مستطیلی روی لولهٔ گرد، پ) لولهٔ استوانه‌ای با پره شعاعی با نیم‌رخ مستطیلی، ت) بیان میل استوانه‌ای یا پره میله‌ای گرد.



شکل ۲-۱۱ بازدهی پره‌های مستطیلی و مثلثی.



$$L_c = L + \frac{t}{2}$$

$$r_{2c} = r_1 + L_c$$

$$A_m = t(r_{2c} - r_1)$$

شکل ۲-۱۲ بازدهی پره‌های محیطی با نیم‌رخ مستطیلی، طبق مرجع ۳.

و نسبت گرما برابر است با:

$$\frac{q \text{ با پره}}{q \text{ بدون پره}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{\frac{hA}{kP}}}$$

که آن را گاهی **ضریب تأثیر پره** می‌نامند.

مقاومت گرمایی ترکیبات پره - دیوار

پره‌ای را در نظر بگیرید که طبق شکل ۲-۱۱ یا ۲-۱۲ به دیواره‌ای متصل است. مقاومت گرمایی دیوار را می‌توان یا از $R_w = \frac{\Delta x}{kA}$ یا از $R_w = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL}$ مربوط به دیوار تخت و یا R_w دیوار استوانه‌ای محاسبه کرد. مقاومت جابه‌جایی در سطح در صورت نبود پره برابر $\frac{1}{hA}$ است. رابطهٔ مقاومت جابه‌جایی و هدایت ترکیبی، R_f، پره با گرمای تلف‌شده از پره چنین است:

$$q_f = \eta_f A_f h\theta_o = \frac{\theta_o}{R_f} \qquad (۴۳-۲)$$

و یا، مقاومت پره را می‌توان چنین بیان کرد:

$$R_f = \frac{1}{\eta_f A_f h} \qquad (۴۴-۲)$$

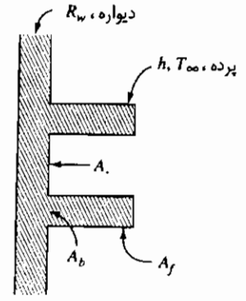
پس انتقال گرمای کل از ترکیب پره - دیوار عبارت است از:

$$q_f = \frac{T_i - T_\infty}{R_{wf} + R_f} \qquad (۴۵-۲)$$

که T_i دمای داخلی دیوار و R_{wf} مقاومت دیوار در محل پره است. این انتقال گرما فقط برای قسمت پره‌دار دیوار است. اکنون مقطع دیوار شکل ۲-۱۳ را در نظر بگیرید که مساحت دیوار مربوط به پرهٔ آن A_b و مساحت قسمت باز دیوار که مستقیماً در معرض محیط جابه‌جایی است، برابر A_o می‌باشد. انتقال گرمای قسمت باز دیوار

برابر است با:

$$q_o = \frac{T_i - T_\infty}{R_{wo} - R_o} \qquad (۴۶-۲)$$



شکل ۲-۱۳ اتلاف گرما از ترکیب پره - دیوار.

که:

$$R_o = \frac{1}{hA_o} \qquad (۴۷-۲)$$

و R_{wo} مقاومت دیواره در قسمت باز است که مقدار آن $R_{wo} = \frac{\Delta x}{k_w A_o}$ برای دیوار تخت است که Δx ضخامت دیواره می‌باشد. برای دیوار استوانه‌ای همان طور که در بالا گفتیم از شکل لگاریتمی استفاده می‌شود. پس اتلاف گرمای کل از دیوار برابر است با:

$$q_{کل} = q_f + q_o \qquad (۴۸-۲)$$

که می‌توان آن را برحسب مقاومت‌های گرمایی چنین نوشت:

$$q_{کل} = (T_i - T_\infty)\frac{1}{R_{wf} + R_f} + \frac{1}{R_{wo} + R_o}$$

$$= (T_i - T_\infty)\frac{R_{wo} + R_o + R_{wf} + R_f}{(R_w + R_f)(R_{wo} + R_o)} \qquad (۴۹-۲)$$

شرایطی که پره کمکی به انتقال گرما نمی‌کند

یادآور می‌شویم که نصب پره بر سطوح انتقال گرما ضرورتاً به معنی افزایش آهنگ گرما نیست. چه بسا اگر مقدار h، ضریب جابه‌جایی، بزرگ باشد (سیالی که با سرعت بالا حرکت می‌کند و یا سیال در حال جوش) نصب پره ممکن است باعث کاهش انتقال گرما شود زیرا مقاومت هدایتی مانع بزرگ‌تری در مقابل جریان گرماست تا مقاومت جابه‌جایی. برای نشان دادن این نکته، پره‌ای پین‌مانند و از جنس فولاد ضدزنگ با $k = ۱۶ \frac{W}{m.°C}$ و $L = ۱۰$ cm و $d = ۱$ cm و در معرض جابه‌جایی آب‌جوش را نظر بگیرید که $h = ۵۰۰۰ \frac{W}{m^۲.°C}$ از معادله (۲-۳۶) داریم:

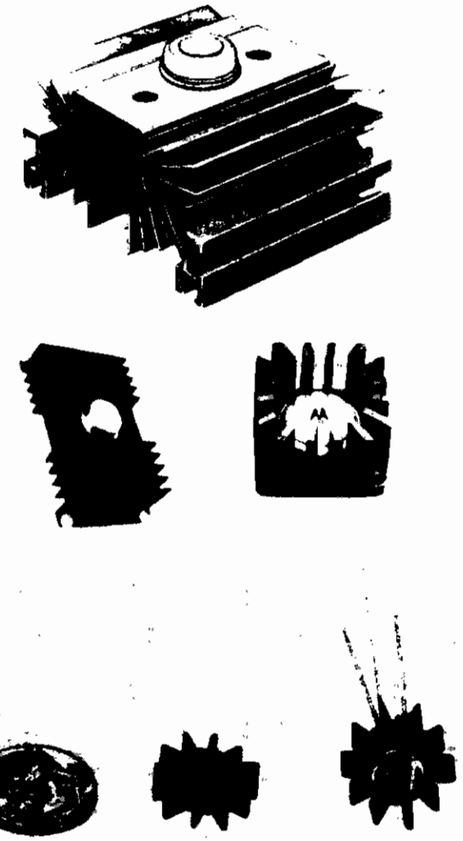
$$\frac{q \text{ با پره}}{q \text{ بدون پره}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{\frac{hA}{kP}}}$$

$$= \frac{\tanh\left\{\left[\frac{۵۰۰۰\pi\,(۱\times۱۰^{-۲})(۴)}{۱۶\pi\,(۱\times۱۰^{-۲})^۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}(۱۰\times۱۰^{-۲})\right\}}{\left[\frac{۵۰۰۰\pi\,(۱\times۱۰^{-۲})^۲}{(۴)(۱۶)\pi\,(۱\times۱۰^{-۲})}\right]^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$= ۱/۱۳$$

پس این پین نسبتاً بلند مقدار انتقال گرما را فقط ۱۳٪ افزایش می‌دهد.

برای ارزیابی عملکرد پره روش دیگری نیز وجود دارد که در مسأله ۲-۶۸ بحث می‌شود. کرن *Kern* و کراوس *Kraus* [۸] توضیح خیلی کاملی در مورد انتقال گرمای سطوح گسترده عرضه می‌کنند. در شکل ۲-۱۴ پره‌هایی ارائه شده است که در کارهای خنک کاری در الکترونیک به کار می‌رود.



شکل ۲-۱۴ چند آرایش پره که در کارهای خنک کاری در الکترونیک استفاده می‌شوند.

مثال ۲-۷ اثر ضریب هدایت گرمایی بر نیم‌رخ دمایی پره

توزیع دما در میله استوانه‌ای به قطر ۲ cm و طول ۱۰ cm که در معرض محیطی جابه‌جایی با $h = ۲۵ \frac{W}{m^۲.°C}$ قرار گرفته برای سه نوع جنس پره: مس $\left[k = ۳۸۵ \frac{W}{m.°C}\right]$، فولاد ضدزنگ $\left[k = ۱۷ \frac{W}{m.°C}\right]$ و شیشه $\left[k = ۰/۸ \frac{W}{m.°C}\right]$ مقایسه کنید. جریان گرما و بازدهی پره‌ها را نیز مقایسه کنید.

حل :

داریم:

$$\frac{hP}{kA} = \frac{(۲۵)\,\pi\,(۰/۰۲)}{k\,\pi\,(۰/۰۱)^۲} = \frac{۵۰۰۰}{k}$$

مقادیر مورد نظر عبارتند از:

جنس پره	$\frac{hP}{kA}$	m	mL
مس	۱۲/۹۹	۳/۶۰۴	۰/۳۶۰۴
فولاد ضدزنگ	۲۹۴/۱	۱۷/۱۵	۱/۷۱۵
شیشه	۶۲۵۰	۷۹/۰۶	۷/۹۰۶

این مقادیر را می‌توان در معادله (۲-۳۳الف) قرار داد و دما را در طول میله با xهای متفاوت محاسبه کرد که در نتیجهٔ آن شکل زیر ارائه شده است. توجه داشته باشید که شیشه مثل پرهٔ خیلی بلند عمل کرده، رفتار آن‌را از معادله (۲-۳۲) می‌توان محاسبه کرد. بازدهی پره را از معادله (۲-۳۸) و با استفاده از طول اصلاحی معادله (۲-۴۲)، حساب می‌کنیم. داریم:

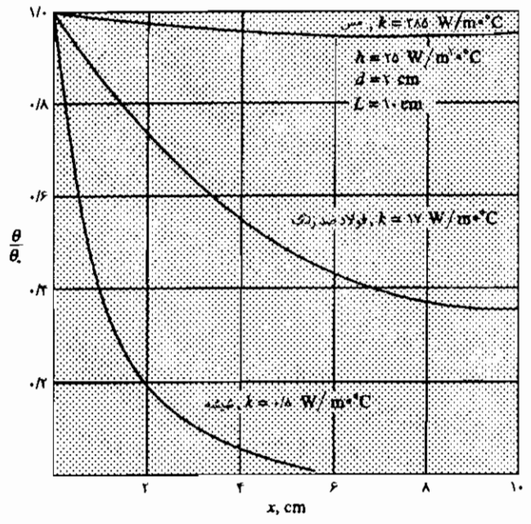
$$L_c = L + \frac{d}{۴} = ۱۰ + \frac{۲}{۴} = ۱۰/۵ \text{ cm}$$

جدول زیر پارامترهای مورد نظر را برای مقایسه جریان گرما و بازدهی به‌دست می‌دهد.

جنس پره	hPkA	mL_c
مس	۰/۱۹۰	۰/۳۷۸۴
فولاد ضدزنگ	۰/۰۰۸۴	۱/۸۰۰۸
شیشه	$۳/۹\times۱۰^{-۴}$	۸/۳۰۲

برای مقایسه جریان گرما می‌توانیم یا مقادیر مزبور را به‌ازای مقدار واحد θ_o از معادله (۲-۳۶) محاسبه کنیم و یا اینکه توجه داشته باشیم که بازدهی پره، مقایسه نسبی جریان گرما را به‌دست می‌دهد زیرا حداکثر انتقال گرما در تمام این سه حالت یکسان است؛ یعنی اینکه ما با پره‌هایی یکسان از نظر اندازه، شکل و مقدار h مواجهیم. بنابراین مقادیر η_f را از معادله (۲-۳۸) به‌ازای mL_c فوق محاسبه می‌کنیم.

جنس پره	η_f	q نسبت به مس ٪
مس	۰/۹۵۵	۱۰۰
فولاد ضدزنگ	۰/۵۲۶	۵۳/۱
شیشه	۰/۱۲۴	۱۲/۶



شکل مثال ۲-۷

نیم‌رخ‌های طولی دما در شکل فوق می‌تواند اندکی گمراه کننده باشند. گرادیان دمای شیشه تندترین شیب را در پایه دارد ولی چون شیشه دارای کم‌ترین مقدار k است، کم‌ترین آهنگ انتقال گرما را ایجاد می‌کند.

مثال ۲-۸ پره مستقیم آلومینیمی

پره مستقیم آلومینیمی $\left[k = ۲۰۰ \frac{W}{m.°C}\right]$ به ضخامت ۳/۰ mm و به‌طول ۷/۵ cm مطابق شکل ۲-۹ از دیواری بیرون آمده است. دمای پایه ۳۰۰ °C و دمای محیط ۵۰ °C و $\left[h = ۱۰ \frac{W}{m.°C}\right]$ است. اتلاف گرما از این پره را به ازای واحد ارتفاع پیدا کنید.

حل :

می‌توانیم باگسترش طول پره به اندازه ساختگی $\frac{t}{۲}$ از راه حل تقریبی استفاده کرده، انتقال گرمای پره با نوک عایق را طبق معادله (۲-۳۶) محاسبه کنیم. داریم:

$$L_c = L + \frac{t}{۲} = ۷/۵ + ۰/۱۵ = ۷/۶۵ \qquad \text{cm } [۳/۰۱ \text{ in}]$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \left[\frac{h(۲z + ۲t)}{ktz}\right]^{\frac{۱}{۲}} \approx \sqrt{\frac{۲/t}{kt}}$$

وقتی ارتفاع پره $z >> t$ باشد، داریم:

$$m = \left[\frac{(۲)(۱۰)}{(۲۰۰)(۳\times۱۰^{-۳})}\right]^{\frac{۱}{۲}} = ۵/۷۷۴$$

از معادله (۲-۳۶) برای پره با نوک عایق داریم:

$$q = (\tanh mL_c)\sqrt{hPkA}\,\theta_o$$

برای ارتفاع یک متر:

$$A = (۱)(۳\times۱۰^{-۳}) = ۳\times۱۰^{-۳} \text{ m}^۲ \qquad [۴/۶۵ \text{ in}^۲]$$

$$q = (۵/۷۷۴)(۲۰۰)(۳\times۱۰^{-۳})(۳۰۰-۵۰)\tanh[(۵/۷۷۴)(۰/۰۷۶۵)]$$
$$= ۳۵۹\ \frac{W}{m}\left[۳۷۳/۵\ \frac{Btu}{h.ft}\right]$$

مثال ۲-۹ پرهٔ مخروطی آلومینیمی

جهت پخش گرما، پره‌های آلومینیمی به عرض ۱/۵ cm و ضخامت ۱/۰ mm را روی لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm نصب کرده‌اند. دمای سطح لوله ۱۷۰ °C و دمای سیال محیط ۲۵ °C است. اتلاف گرما از هر پره را برای $h = ۱۳۰\ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ محاسبه کنید. به‌فرض برای آلومینیم $k = ۲۰۰\ \frac{W}{m.°C}$ است.

حل :

انتقال گرما را می‌توان با استفاده از منحنی‌های بازدهی پره شکل ۲-۱۲ محاسبه کرد. پارامترهای مورد نیاز عبارتند از:

$$L_c = L + \frac{t}{۲} = ۱/۵ + ۰/۰۵ = ۱/۵۵\ cm$$
$$r_۱ = \frac{۲/۵}{۲} = ۱/۲۵\ cm$$
$$r_{۲c} = r_۱ + L_c = ۱/۲۵ + ۱/۵۵ = ۲/۸۰\ cm$$
$$\frac{r_{۲c}}{r_۱} = \frac{۲/۸۰}{۱/۲۵} = ۲/۲۴$$
$$A_m = t(r_{۲c} - r_۱) = (۰/۰۰۱)(۲/۸-۱/۲۵)(۱۰^{-۲}) = ۱/۵۵\times۱۰^{-۵}\ m^{۲}$$
$$L^{\frac{۳}{۲}}\left(\frac{h}{kA_m}\right)^{\frac{۱}{۲}} = (۰/۰۱۵۵)^{\frac{۳}{۲}}\left[\frac{۱۳۰}{(۲۰۰)(۱/۵۵\times۱۰^{-۵})}\right]^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۳۹۶$$

از شکل ۲-۱۲ مقدار η_f برابر ۸۲٪ به‌دست می‌آید. گرمایی که انتقال می‌یافت اگر کل پره در دمای پایه بود برابر است با (دو طرف پره گرما مبادله می‌کند):

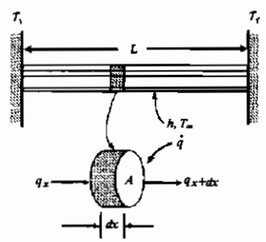
$$q_{max} = ۲\pi\,(r_{۲c}^{۲} - r_۱^{۲})\,h\,(T_۰ - T_\infty)$$
$$= ۲\pi\,(۲/۸^{۲} - ۱/۲۵^{۲})(۱۰^{-۶})(۱۳۰)(۱۷۰-۲۵)$$
$$= ۷۴/۳۵\ W\left[۲۵۳/۷\ \frac{Btu}{h}\right]$$

بنابراین انتقال گرمای واقعی برابر حاصلضرب جریان گرما در بازدهی پره است:

$$q_{واقعی} = (۰/۸۲)(۷۴/۳۲) = ۶۰/۹۷\ W\left[۲۰۸\ \frac{Btu}{h}\right]$$

مثال ۲-۱۰ میله با چشمه‌های گرمایی

میله‌ای با چشمه‌های گرمایی یکنواخت در واحد حجم $\dot{q}$ را به دو دما مطابق شکل زیر چسبانده‌اند.



شکل مثال ۲-۱۰

میله در معرض محیط با ضریب جابه‌جایی h و دمای T_∞ نیز هست. عبارتی برای توزیع دمای میله به‌دست آورید.

حل :

نخست معادله انرژی روی جزئی از میله را مشابه آنچه برای معادلهٔ (۲-۳۰) به کار بردیم، می‌نویسیم:

گرمای تولیدی در جزء + انرژی وارده از سطح سمت چپ انرژی تلف‌شده به‌طریق جابه‌جایی + انرژی خارج شده از سطح سمت راست =

یا:

$$-kA\frac{dT}{dx} + \dot{q}A\,dx = -kA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^{۲}T}{dx^{۲}}dx\right) + hP\,dx\,(T - T_\infty)$$

که با ساده کردن آن داریم:

$$\frac{d^{۲}T}{dx^{۲}} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) + \frac{\dot{q}}{k} = ۰ \qquad \text{(الف)}$$

و یا به‌ازای $\theta = T - T_\infty$ و $m^{۲} = \frac{hP}{kA}$:

$$\frac{d^{۲}\theta}{dx^{۲}} + m^{۲}\theta + \frac{\dot{q}}{k} = ۰ \qquad \text{(ب)}$$

می‌توان جای‌گزینی زیر را نیز انجام داد:

$$\theta' = \theta - \frac{\dot{q}}{km^{۲}}$$

و در نتیجه، معادله دیفرانسیل چنین می‌شود:

$$\frac{d^{۲}\theta'}{dx^{۲}} - m^{۲}\theta' = ۰ \qquad \text{(پ)}$$

که دارای جواب عمومی زیر است:

$$\theta' = C_۱e^{-mx} + C_۲e^{mx} \qquad \text{(ت)}$$

دو دمای انتهایی را به عنوان شرایط مرزی به کار می‌بریم:

$$\theta' = \theta_۱' = T_۱ - T_\infty - \frac{\dot{q}}{km^{۲}} = C_۱ + C_۲$$
$$\theta' = \theta_۲' = T_۲ - T_\infty - \frac{\dot{q}}{km^{۲}} = C_۱e^{-mL} + C_۲e^{mL}$$

که با حذف $C_۱$ و $C_۲$ از آنها داریم:

$$\theta' = \frac{(\theta_۱'\,e^{۲mL} - \theta_۲'\,e^{mL})\,e^{-mx} + (\theta_۲'\,e^{mL} - \theta_۱')\,e^{mx}}{e^{۲mL} - ۱} \qquad \text{(ث)}$$

توزیع دمای پرهٔ بی نهایت بلندی که تولید گرما می‌کند و دمای انتهای سمت چپ آن $T_۱$ است چنین می‌باشد:

$$\frac{\theta'}{\theta_۱'} = e^{-mx} \qquad \text{(ج)}$$

که مشابه معادله ۲-۳۲ برای پره بدون تولید گرماست.

❑ ۲-۱۱ مقاومت گرمایی تماس

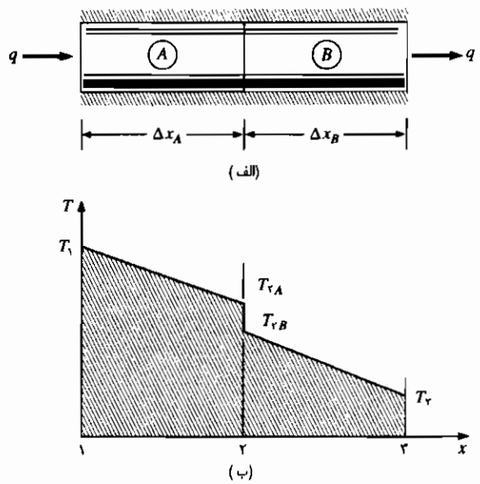
دو میله صلب مماس به هم را مطابق شکل ۲-۱۵ در نظر بگیرید که اطرافشان طوری عایق است که گرما تنها در امتداد محوری جریان می‌یابد. ممکن است ضریب هدایت گرمایی مواد این میله‌ها متفاوت باشد ولی اگر اطراف میله‌ها عایق شود باید شار گرمایی دو میله در شرایط پایدار، یکسان باشد. تجربه نشان می‌دهد که نیم‌رخ‌های طولی دمای واقعی دو جسم تقریباً مثل شکل(۲-۱۵ب) تغییر می‌کند. می‌گویند که افت دما در صفحه ۲ یعنی صفحه تماس دو جسم از *مقاومت گرمایی تماس thermal contact resistance* ناشی می‌شود. با نوشتن معادله انرژی دو جسم داریم:

$$q = k_A A\frac{T_۱ - T_{۲A}}{\Delta x_A} = \frac{T_{۲A} - T_{۲B}}{\frac{۱}{h_cA}} = k_BA\frac{T_{۲B} - T_۳}{\Delta x_B}$$

یا:

$$q = \frac{T_۱ - T_۳}{\frac{\Delta x_A}{k_AA} + \frac{۱}{h_cA} + \frac{\Delta x_B}{k_BA}} \qquad (۲-۵۰)$$

که کمیت $\frac{۱}{h_cA}$ را مقاومت گرمایی تماس و h_c را ضریب تماس می‌نامند. این ضریب در تعدادی از کاربردها به دلیل بسیاری از وضعیت‌های انتقال گرما که شامل اتصال مکانیکی دو جسم است، می‌تواند خیلی مهم باشد.



شکل ۲-۱۵ اثر مقاومت تماس گرمایی:
(الف) موقعیت فیزیکی؛ (ب) نیم‌رخ دما.

سازوکار فیزیکی مقاومت تماس را می‌توان با بررسی مشروح‌تر اتصال شکل ۲-۱۶ بهتر دریافت. به منظور تکمیل بحث، زبری سطح واقعی را بزرگ نشان داده‌ایم. هیچ سطح واقعی کاملاً هموار نبوده، زبری سطحی واقعی، نقش اصلی را در تعیین مقاومت تماس ایفا می‌کند. در این اتصال دو انتقال گرمای اساسی وجود دارد:

۱- هدایت جامد در نقاط تماس

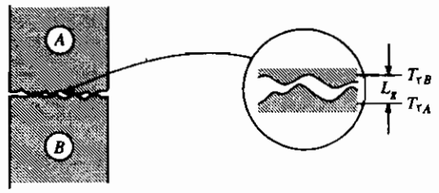
۲- هدایت در گازهای محبوس در فضاهای خالی ناشی از این تماس

گمان می‌رود که عامل دوم، مقاومت اصلی در مقابل جریان گرما باشد زیرا ضریب هدایت گرمایی گاز در مقایسه با ضریب هدایت گرمایی دو جسم خیلی کوچک است.

چنان‌چه مساحت تماس را با A_c و مساحت فضای خالی را با A_v نشان دهیم، می‌توانیم جریان گرما در عرض اتصال را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$q = \frac{T_{۲A} - T_{۲B}}{\frac{L_g}{۲k_AA_c} + \frac{L_g}{۲k_BA_c}} + k_fA_v\frac{T_{۲A} - T_{۲B}}{L_g} = \frac{T_{۲A} - T_{۲B}}{\frac{۱}{h_cA}}$$

که L_g ضخامت فضای خالی و k_f ضریب هدایت گرمایی سیالی است که فضای خالی را پر می‌کند. کل مساحت مقطع میله‌ها برابر A می‌باشد. h_c، ضریب تماس را از معادله بالا به‌دست می‌آوریم:



شکل ۲-۱۶ مدل ناهمواری اتصال برای تحلیل مقاومت تماس گرمایی.

$$h_c = \frac{۱}{L_g}\left(\frac{A_c}{A}\frac{۲k_Ak_B}{k_A + k_B} + \frac{A_v}{A}k_f\right) \qquad (۲-۵۱)$$

اغلب فضای خالی را هوا پر کرده و k_f در مقایسه با k_A و k_B کوچک است. چنان‌چه مساحت تماس کوچک باشد، مقاومت گرمایی اصلی از فضاهای خالی ناشی می‌شود. مسأله اصلی این تئوری ساده آنست که تعیین مقادیر مؤثر A_c و A_v و L_g سطوح تماس بسیار مشکل است.

از مدل فیزیکی بالا می‌توان به‌طور تجربی نتیجه گرفت که:

۱- باید مقاومت تماس با کم شدن فشار گاز محیط زیاد شود. چه موقع؟ وقتی که فشار کم‌تر از حدی شود که در آن، پویش آزاد متوسط ملکول‌ها در مقایسه با یک بعد مشخص فضای خالی بین دو جسم، بزرگ است. چرا؟ چون در این شرایط ضریب هدایت گرمایی مؤثر گاز حبس شده کم می‌شود.

۲- با افزایش فشار اتصال باید مقاومت تماس کاهش یابد زیرا این افزایش موجب تغییر شکل نقاط برآمده سطوح تماس شده، در نتیجه مساحت تماس بین دو جسم جامد زیادتر می‌شود.

بررسی خیلی کامل مسأله مقاومت تماس در مراجع شماره ۴، ۶، ۷، ۱۰ و ۱۱ صورت پذیرفته است. متأسفانه هیچ نظریه قانع کننده‌ای که مقاومت تماس گرمایی تمام مصالح مهندسی را پیش‌بینی کند وجود نداشته و مطالعات تجربی نیز روابط تجربی قابل وثوق کاملی را به‌دست نمی‌دهد. این مسأله قابل درک است زیرا شرایط سطحی پیچیده‌ای که ممکن است عملاً با آنها مواجه گردیم، بسیارند.

وقتی دما بالا باشد انتقال گرمای تابشی در عرض اتصال نیز

مهم می‌شود. این انتقال انرژی را می‌توان با روش‌های بحث شده در فصل ۸ محاسبه کرد.

در طراحی می‌توان در صورت نبودن اطلاعات دقیق‌تر، از ضرایب هدایت تماسی جدول ۲-۲ استفاده کرد. می‌توان مقاومت تماس گرمایی را با استفاده از گریس گرمایی مثل D_{OW} ۳۴۰ به‌نحو قابل توجهی، شاید تا ۷۵٪، کاهش داد.

☑ **جدول ۲-۲** ضریب هدایت تماس سطوح نمونه

نوع سطح	زبری μin	زبری μm	فشار atm	دما °C	$\frac{1}{h_c}$ $\frac{m^2.°C}{W\times10^4}$	$\frac{1}{h_c}$ $\frac{h.ft^2.°F}{Btu}$
فولاد ضدزنگ ۴۱۶، سنگ خورده، هوا	۱۰۰	۲/۵۴	۳-۲۵	۹۰-۲۰۰	۲/۶۴	۰/۰۰۱۵
فولاد ضدزنگ ۳۰۴، سنگ خورده، هوا	۴۵	۱/۱۴	۴۰-۷۰	۲۰	۵/۲۸	۰/۰۰۳
فولاد ضدزنگ ۴۱۶، سنگ خورده، با، شیم برنجی به‌ضخامت in ۰/۰۰۱، هوا	۱۰۰	۲/۵۴	۷	۳۰-۲۰۰	۳/۵۲	۰/۰۰۲
آلومینیم، سنگ‌خورده، هوا	۱۰۰	۲/۵۴	۱۲-۲۵	۱۵۰	۰/۸۸	۰/۰۰۰۵
	۱۰	۰/۲۵	۱۲-۲۵	۱۵۰	۰/۱۸	۰/۰۰۰۱
آلومینیم، سنگ‌خورده، با شیم برنجی به‌ضخامت in ۰/۰۰۱، هوا	۱۰۰	۲/۵۴	۱۲-۲۰۰	۱۵۰	۱/۲۳	۰/۰۰۰۷
مس، سنگ‌خورده، هوا	۵۰	۱/۲۷	۱۲-۲۰۰	۲۰	۰/۰۷	۰/۰۰۰۰۴
مس، فرزکاری شده، هوا	۱۵۰	۳/۸۱	۱۰-۵۰	۲۰	۰/۱۸	۰/۰۰۰۱
مس، فرزکاری شده، خلأ	۱۰	۰/۲۵	۷-۷۰	۳۰	۰/۸۸	۰/۰۰۰۵

مثال ۲-۱۱ اثر ضریب هدایت تماس بر انتقال گرما

دو میله از جنس فولاد ضدزنگ ۳۰۴ به قطر ۳/۰ cm و طول ۱۰ cm با سطح سنگ خورده و با زبری سطحی حدود ۱ μm در معرض هوا هستند. اگر سطوح دو میله با فشار ۵۰ atm به‌هم فشرده شده، ترکیب دو میله در معرض اختلاف دمای کل ۱۰۰ °C قرار گیرد، جریان گرمای محوری و افت دما در عرض سطح تماس را محاسبه کنید.

حل:

جریان گرمای کل با سه مقاومت گرمایی یعنی مقاومت هدایتی هر میله و مقاومت تماس روبه روست. برای این میله‌ها:

$$R_{th} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{(۰/۱)(۴)}{(۱۶/۳)\pi(۳\times۱۰^{-۲})^۲} = ۸/۶۷۹\ \frac{°C}{W}$$

از جدول ۲-۲ مقاومت تماس برابر است با:

$$R_c = \frac{۱}{h_c A} = \frac{(۵/۲۸\times۱۰^{-۴})(۴)}{\pi(۳\times۱۰^{-۲})^۲} = ۰/۷۴۷\ \frac{°C}{W}$$

بنابراین مقاومت گرمایی کل برابر است با:

$$\Sigma R_{th} = (۲)(۸/۶۷۹) + ۰/۷۴۷ = ۱۸/۱۰۵$$

و جریان گرمای کل برابر است با:

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R_{th}} = \frac{۱۰۰}{۱۸/۱۰۵} = ۵/۵۲\ W\ \left[۱۸/۸۳\ \frac{Btu}{h}\right]$$

با استفاده از نسبت مقاومت تماس به مقاومت گرمایی کل می‌توان افت دما در عرض تماس را به‌دست آورد:

$$\Delta T_c = \frac{R_c}{\Sigma R_{th}}\Delta T = \frac{(۰/۷۴۷)(۱۰۰)}{۱۸/۱۰۵} = ۴/۱۳\ °C\ [۳۹/۴۳\ °F]$$

مقاومت تماس در این مسأله نمایش‌گر حدود ۴٪ مقاومت کل است.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ معنی عبارت یک بعدی در مسائل هدایت چیست؟

۲ مقاومت گرمایی چیست؟

۳ چرا فرض جریان گرمای یک بعدی در تحلیل پره‌ها اهمیت دارد؟

۴ بازدهی پره را تعریف کنید؟

۵ چرا راه حل نوک عایق در مسائل پره‌ها اهمیت دارد؟

۶ معنی مقاومت تماس گرمایی چیست؟ این مقاومت به چه عواملی بستگی دارد؟

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۲-۱ هدایت چند لایه

۲-۲ سیستم استوانه چند لایه

۲-۳ انتقال گرما از دیوار مرکب

۲-۴ ضریب انتقال گرمای کل لوله

۲-۵ ضخامت بحرانی عایق

۲-۶ چشمه گرمایی با جابه‌جایی

۲-۷ اثر ضریب هدایت گرمایی

۲-۸ پرهٔ مستقیم آلومینیمی

۲-۹ پره محیطی آلومینیمی

۲-۱۰ میله با چشمه‌های گرمایی

۲-۱۱ اثر ضریب هدایت تماس بر انتقال گرما

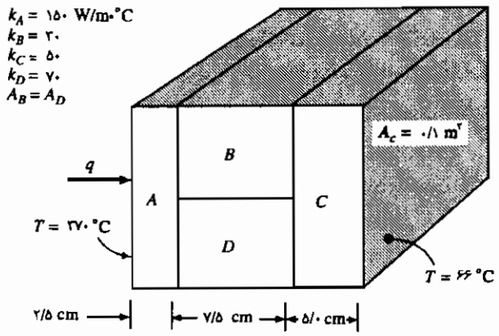
❑ مسائل

۲-۱ می‌خواهیم از ماده‌ای به ضریب هدایت گرمایی متوسط $۱/۳\ \frac{W}{m.°C}$ دیواری به ضخامت ۲ cm ساخته و آن‌را با ماده‌ای به ضریب هدایت گرمایی متوسط $۰/۳۵\ \frac{W}{m.°C}$ عایق کنیم به طوری که اتلاف گرمای مترمربع سطح از ۱۸۳۰ W تجاوز ننماید. به فرض دمای سطح درونی و بیرونی دیواره عایق به ترتیب ۱۳۰۰ و ۳۰ °C باشد، ضخامت عایق مورد نظر را حساب کنید.

۲-۲ ماده‌ای به ضخامت ۲/۵ cm و مساحت مقطع $۰/۱\ m^2$ موجودست که دمای یک طرف آن ۳۵ °C و دمای طرف دیگرش برابر ۹۵ °C است. دما در صفحه مرکزی جسم برابر ۶۲ °C بوده، جریان گرما در آن برابر ۱ kW می‌باشد. عبارتی برای ضریب هدایت گرمایی به صورت تابعی از دما به‌دست آورید.

۲-۳ دیوار مرکبی از صفحه‌ای مسی به ضخامت ۲/۵ cm، لایه‌ای پنبه‌نسوز به ضخامت ۳/۲ mm و لایه‌ای شیشه لیفی به ضخامت ۵ cm تشکیل شده است. چنان‌چه اختلاف دمای دو طرف آن ۵۶۰ °C باشد جریان گرمای واحد مساحت این سازه مرکب را حساب کنید.

۲-۴ انتقال گرمای واحد مساحت دیوار مرکب شکل زیر را پیدا کنید. جریان گرما را یک بعدی فرض کنید.



شکل م ۲-۴.

۲-۵ دمای یک طرف بلوکی مسی به ضخامت ۵ cm برابر ۲۶۰ °C است. طرف دیگر آن‌را با لایه‌ای شیشه لیفی به ضخامت ۲/۵ cm پوشانده‌اند. دمای قسمت بیرونی شیشه لیفی ۳۸ °C است و جریان گرمای کل از ترکیب مس - شیشه لیفی برابر ۴۴ kW می‌باشد. مساحت این بلوک چه‌قدر است؟

۲-۶ دیوار بیرونی ساختمانی از لایه‌ای آجر معمولی به ضخامت ۱۰ cm و لایه‌ای شیشه لیفی $\left[k = ۰/۰۵\ \frac{W}{m.°C}\right]$ به ضخامت ۲/۵ cm تشکیل شده است. جریان گرما از این دیوار را وقتی اختلاف دمای دو طرف آن ۴۵ °C است حساب کنید.

۲-۷ دمای یک طرف بلوکی مسی به ضخامت ۴ cm برابر ۱۷۵ °C است. طرف دیگر آن‌را با لایه‌ای شیشه لیفی به ضخامت ۱/۵ cm پوشانده‌اند. دمای بیرون شیشه لیفی برابر ۸۰ °C و جریان گرمای کل از این بلوک برابر ۳۰۰ W می‌باشد. مساحت بلوک چه‌قدر است؟

۲-۸ دیواری تخت از ماده‌ای ساخته شده که ضریب هدایت گرمایی آن طبق رابطه $k = k_0\ (۱ + \beta T^۴)$ با مربع دما تغییر می‌کند. عبارتی برای انتقال گرما در این دیوار به‌دست آورید.

۲-۹ ضخامت ماده‌ای برابر ۳۰ cm و ضریب هدایت گرمایی آن $۰/۰۴\ \frac{W}{m.°C}$ است. در لحظهٔ به‌خصوصی، توزیع دما نسبت به x، فاصله از صفحهٔ سمت چپ، به صورت $T = ۱۵۰x^۲ - ۳۰x$ است. x بر حسب متر است. آهنگ جریان گرما را در $x = ۰$ و $x = ۳۰$ cm محاسبه کنید. آیا این جسم در حال گرم شدن است یا خنک شدن؟

۲-۱۰ دیواری از ۲/۰ cm مس، ۳/۰ mm ورق پنبه‌نسوز $\left[k = ۰/۱۶۶\ \frac{W}{m.°C}\right]$ و ۶/۰ cm شیشه لیفی ساخته شده است. جریان گرمای واحد مساحت را برای اختلاف دمای کل ۵۰۰ °C به‌دست آورید.

۲-۱۱ دیوار ساختمانی از ۶/۰ in بتون $\left[k = ۱/۲\ \frac{W}{m.°C}\right]$، ۲/۰ in عایق شیشه لیفی، $\frac{۳}{۸}$ in گچ $\left[k = ۰/۰۵\ \frac{W}{m.°C}\right]$ تشکیل شده است. ضرایب جابه‌جایی داخل و خارج به ترتیب عبارتند از ۲/۰ و ۷/۰ $\frac{Btu}{h.ft^2}$. دمای هوای بیرون ۲۰ °F و دمای داخل ۷۲ °F است. ضریب انتقال گرمای کل را برای این دیوار، مقدار R و اتلاف گرمای واحد مساحت را حساب کنید.

۲-۱۲ دیواری از لایه‌ای فولاد ضدزنگ $\left[k = ۱۶\ \frac{W}{m.°C}\right]$ به ضخامت ۴/۰ mm و دو لایه پلاستیکی مشابه در دو طرف این لایه تشکیل شده است. ضریب انتقال گرمای کل، با فرض جابه‌جایی در روی دو طرف پلاستیک‌ها، برابر $۱۲۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ است. اگر اختلاف دمای کل در عرض این دیوار برابر ۶۰ °C باشد، اختلاف دما در عرض فولاد ضدزنگ را محاسبه کنید.

۲-۱۳ جایخی‌ای از جنس اسفنج استیرو stryro $\left[k = ۰/۰۳۳\ \frac{W}{m.°C}\right]$ و به ابعاد داخلی ۱۰۰ × ۴۰ × ۲۵ cm ساخته شده است و ضخامت دیوارهٔ آن برابر ۵/۰ cm است. بیرون جایخی در معرض هوای ۲۵ °C با $h = ۱۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ قرار دارد. اگر جایخی پر از یخ باشد، زمان لازم برای ذوب شدن آن‌را حساب کنید. مفروضات خود را بیان کنید. گرمای ذوب یخ ۳۳۰ $\frac{kJ}{kg}$ است.

۲-۱۴ دمای مخزنی کروی به قطر ۱ متر برابر ۱۲۰ °C بوده، در معرض محیطی جابه‌جایی قرار دارد. وقتی $h = ۲۵\ \frac{W}{m^2.°C}$ و $T_\infty = ۱۵$ °C باشد به چه ضخامت اسفنج اورتان باید اضافه کرد تا دمای بیرونی عایق از ۴۰ °C بالاتر نرود؟ با نصب این عایق در صد کاهش اتلاف گرما چه‌قدر است؟

۲-۱۵ کره‌ای توخالی از جنس آلومینیم ساخته شده و قطر داخلی آن ۴ cm، قطر بیرونی‌اش ۸ cm، دمای داخلی آن ۱۰۰ °C و دمای بیرونی‌اش ۵۰ °C است. انتقال گرما را محاسبه کنید.

۲-۱۶ فرض کنید که کره مسأله ۲-۱۵ لایه‌ای عایق به ضخامت ۱ cm و $k = ۵۰\ \frac{mW}{m.°C}$ پوشانده شده، سطح بیرونی عایق در معرض محیطی $h = ۲۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ و $T_\infty = ۱۰$ °C قرار دارد. دمای داخلی کره در ۱۰۰ °C باقی می‌ماند. انتقال گرما تحت این شرایط را حساب کنید.

۲-۱۷ ابعاد لولهٔ فولادی استاندارد در پیوست A داده شده است. به فرض لوله درجه *Schedule* ۸۰ به قطر ۳ in را با ۱ in عایق به $k = ۶۰\ \frac{mW}{m.°C}$ پوشانده، سطح بیرونی عایق در معرض محیطی به $T_\infty = ۲۰$ °C و $h = ۱۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ قرار دارد. دمای سطح بیرونی لوله برابر ۲۵۰ °C است. به‌ازای واحد طول لوله محاسبه کنید. الف) مقاومت گرمایی کل را و ب) اتلاف گرما را.

۲-۱۸ لوله‌ای فولادی به قطر خارجی ۵ cm با عایق پنبه‌نسوز $\left[k = ۰/۰۹۶ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}\right]$ به ضخامت ۶/۴ میلی‌متر و سپس با لایه‌ای شیشه لیفی $\left[k = ۰/۰۲۸ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}\right]$ به ضخامت ۲/۵ cm پوشانده شده است. دمای دیوارهٔ لوله برابر ۳۱۵ °C و دمای بیرون عایق برابر ۳۸ °C می‌باشد. دمای سطح بین پنبه‌نسوز و شیشه لیفی را حساب کنید.

۲-۱۹ عبارتی برای مقاومت گرمایی کرهٔ تو خالی به شعاع درونی r_i و شعاع بیرونی r_o و به ضریب هدایت گرمایی k به‌دست آورید.

۲-۲۰ دمای سیمی به قطر ۱ میلی‌متر برابر ۴۰۰ °C بوده، در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۴۰ °C و $h = ۱۲۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. اگر عایقی به ضخامت ۰/۲ میلی‌متر تولید «شعاع بحرانی» نماید، ضریب هدایت گرمایی را حساب کنید. چه‌قدر عایق اضافه شود تا انتقال گرما، ۷۵٪ انتقال گرمای سیم لخت شود.

۲-۲۱ لوله‌ای فولادی ۴۰ *Schedul* به قطر ۲/۰in. (پیوست A را ملاحظه کنید) دارای ضریب هدایت گرمایی $k = ۲۷ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$ است. سیال داخل لوله دارای $h = ۳۰ \frac{Btu}{h.ft^۲.^\circ F}$ بوده و سطح خارجی لوله با عایق شیشه لیفی به ضخامت ۰/۵ in و $k = ۰/۰۲۳ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$ پوشیده شده است. ضریب جابه‌جایی روی سطح عایق بیرونی $۲/۰ \frac{Btu}{h.ft^۲.^\circ F}$ است. دمای سیال درونی ۳۲۰ °F و دمای محیط ۷۰ °F است. اتلاف گرمای هر فوتِ طول را حساب کنید.

۲-۲۲ رابطه‌ای برای شعاع بحرانی عایق کره به‌دست آورید.

۲-۲۳ مخزنی استوانه به قطر ۸۰ cm و ارتفاع ۲ متر دارای آب ۸۰ °C است. نود درصد مخزن پر شده است. دور آن‌را باید طوری عایق کرد تا افت دمای آب بیش از ۲°C بر ساعت نباشد. با استفاده از اطلاعات این فصل، ماده عایقی را مشخص و ضخامت لازم برای این آهنگ خنک شدن را محاسبه کنید.

۲-۲۴ دمای سطح داخلی لوله‌ای حاوی بخار داغ برابر ۲۵۰ °C و قطر داخلی آن ۸ cm و ضخامت دیواره آن ۵/۵ mm است. این لوله را با لایه عایقی به ضخامت ۹ cm و $k = ۰/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ و سپس لایه عایقی به ضخامت ۴ cm و $k = ۰/۲۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ پوشانده‌ایم. دمای بیرونی عایق برابر ۲۰ °C است. اتلاف گرمای متر طول را حساب کنید. فرض کنید، که برای این لوله $k = ۴۷ \frac{W}{m.^\circ C}$ است.

۲-۲۵ دیوار خانه‌ای از دو لایه ۱/۲ cm تخته عایق لیفی و لایهٔ ۸/۰ cm پنبه‌نسوز شل بسته و لایه‌ای ۱۰ سانتی‌متری آجر معمولی ساخته شده است. به فرض ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی دو طرف دیوار $۱۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ باشد ضرایب انتقال گرمای کل را به‌دست آورید.

۲-۲۶ مقدار R را برای عایق‌های زیر به‌دست آورید: الف) اسفنج اورتان، ب) حصیرهای شیشه لیفی، پ) بلوک‌های پشم معدنی، ت) بلوک‌های سیلیکات کلسیم.

۲-۲۷ می‌خواهیم سیستم عایقی برای دیواره کوره‌ای به دمای ۱۰۰۰ °C انتخاب کنیم. نخست لایه‌ای پشم معدنی و سپس از تخته‌های شیشه لیفی استفاده می‌کنیم. سطح بیرونی عایق در معرض محیطی به $h = ۱۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۴۰ ^\circ C$ قرار دارد. با استفاده از داده‌های جدول ۲-۱ ضخامت هر عایق را طوری حساب کنید که دمای سطح بین آنها کم‌تر از ۴۰۰ °C و دمای بیرون آنها کم‌تر از ۵۵ °C باشد. از مقدار متوسط ضریب هدایت گرمایی استفاده کنید. اتلاف گرما در این دیواره را بر حسب وات بر متر مربع پیدا کنید.

۲-۲۸ عبارتی برای توزیع دما در دیوار تخت دارای چشمه‌های گرمایی با توزیع یکنواخت که دمای یک طرف آن $T_۱$ و دمای طرف دیگرش $T_۲$ است، به‌دست آورید. ضخامت دیوار را می‌توان $۲L$ در نظر گرفت.

۲-۲۹ عبارتی برای توزیع دما در دیواری تخت که چشمه‌های گرمایی آن طبق رابطهٔ خطی زیر تغییر می‌کند، به‌دست آورید:

$$\dot{q} = \dot{q}_w [۱ + \beta (T - T_w)]$$

که $\dot{q}_w$ مقداری ثابت و برابر گرمای ایجاد شده واحد حجم به‌ازای دمای دیوار T_w است. دمای دو طرف دیوار T_w و ضخامت آن $۲L$ می‌باشد.

۲-۳۰ در داخل دیوار تختی به ضخامت ۶ cm گرمایی با آهنگ $۰/۳ \frac{MW}{m^۳}$ تولید می‌شود. یک طرف دیوار مزبور عایق و طرف دیگر آن در معرض محیطی به دمای ۹۳ °C است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی بین دیوار و محیط برابر $۵۷۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. ضریب هدایت گرمایی دیوار نیز برابر $۲۱ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. دمای حداکثر در دیوار فوق را محاسبه کنید.

۲-۳۱ دیوار حفاظ راکتوری هسته‌ای را در نظر بگیرید. دیوار مزبور شار اشعه گاما دریافت می‌کند و داخل آن طبق رابطه $\dot{q} = \dot{q}_o e^{-ax}$ گرما تولید می‌شود. که $\dot{q}_o$ گرمای تولیدی سطح درونی در معرض شار اشعه گاما و a مقداری ثابت است. با استفاده از این رابطه، برای توزیع دما در دیواری به ضخامت L که دمای درونی و بیرونی آن به ترتیب T_i و T_o است و برای دمای حداکثر در دیوار عبارتی بیابید.

۲-۳۲ مسأله ۲-۳۱ را با فرض آنکه سطح بیرونی، موقعی که دمای سطح درونی T_i است، بی‌دررو باشد تکرار کنید.

۲-۳۳ مسأله ۲-۲۹ را با این فرض حل کنید که دو طرف صفحه در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای T_∞ و ضریب انتقال گرمای h باشد. در اینجا T_w دمای مرجع بوده، لازم نیست که همان دمای سطح باشد.

۲-۳۴ در یک میلهٔ چهارگوش مسی به ضلع ۲/۵ cm با آهنگ $۳۵/۳ \frac{MW}{m^۳}$ گرما تولید می‌شود. میله در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C بوده و ضریب انتقال گرما برابر $۴۰۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. دمای سطح میله را حساب کنید.

۲-۳۵ داخل دیواری تخت به ضخامت $۲L$ گرمایی می‌شود که طبق رابطهٔ $\dot{q} = \dot{q}_o \cos ax$ تغییر می‌کند و $\dot{q}_o$ گرمای تولیدی واحد حجم در مرکز دیوار ($x = ۰$) و a یک ثابت است. اگر دو طرف دیوار دمای ثابت T_w داشته باشد، عبارتی برای محاسبهٔ اتلاف گرمای کل دیوار به ازای واحد مساحت بیابید.

۲-۳۶ ماده‌ای نیمه هادی دارای ضریب هدایت $۰/۰۱۲۴ \frac{W}{cm.^\circ C}$ است. از این ماده میله‌ای مستطیلی ساخته‌اند که مساحت مقطع آن ۱ cm² و طول آن ۳ cm است. دمای یک سر آن ۳۰۰ °C و سر دیگر به دمای ۱۰۰ °C می‌باشد و از آن جریانی به شدت $۵۰A$ عبور می‌کند. به فرض سطح جانبی میله عایق باشد، دمای وسط آن‌را حساب کنید. مقاومت مخصوص میله $۱/۵ \times ۱۰^{-۳} \Omega cm$ است.

۲-۳۷ توزیع دما در دیواری تخت چنین است:

$$\frac{T - T_۱}{T_۲ - T_۱} = C_۱ + C_۲x^۲ + C_۳x^۳$$

که $T_۱$ و $T_۲$ دمای دو طرف دیوارند. اگر ضریب هدایت گرمایی دیوار ثابت بوده و ضخامت آن L باشد، عبارتی برای تولید گرمای واحد حجم به صورت تابعی از x، فاصله از صفحه‌ای که دمای آن $T = T_۱$ است، به‌دست آورید. به فرض آهنگ تولید گرما در $x = ۰$ برابر $\dot{q}_o$ است.

۲-۳۸ سیم‌های یک گرم‌کن برقی را در دیواری توپر به ضخامت ۸ cm و $k = ۲/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ نصب کرده‌اند. سطح سمت راست در معرض محیطی به $h = ۵۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۳۰ ^\circ C$ و سطح سمت‌چپ در معرض محیطی به $h = ۷۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۵۰ ^\circ C$ قراردارد. حداکثر آهنگ تولید گرمای مجاز چه‌قدر باشد تا دمای حداکثر دیوار از ۳۰۰ °C تجاوز نکند.

۲-۳۹ در صفحه‌ای به ضخامت ۳/۰ cm با آهنگ یکنواخت $۵ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۳}$ گرما تولید می‌شود. دمای یک طرف صفحه برابر ۲۰۰ °C و دمای طرف دیگرش ۵۰ °C است. دما در مرکز صفحه را به‌ازای $k = ۲۰ \frac{W}{m.^\circ C}$ بیابید.

۲-۴۰ در صفحه‌ای از جنس فولاد ضدزنگ با $k = ۲۰ \frac{W}{m.^\circ C}$ گرمای یکنواختی تولید می‌شود. ضخامت صفحه برابر ۱/۰ cm و آهنگ تولید گرما برابر $۵۰۰ \frac{MW}{m^۳}$ است. اگر دمای دو طرف صفحه به ترتیب برابر ۱۰۰ و ۲۰۰ °C باشد، دمای مرکز صفحه را بیابید.

۲-۴۱ صفحه‌ای به ضخامت ۴ mm دارای منبع داخلی تولید گرما به قدرت $۲۰۰ \frac{MW}{m^۳}$ و ضریب هدایت گرمایی $۲۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. یک طرف این صفحه عایق و دمای طرف دیگر در ۱۰۰ °C ثابت نگه‌داشته می‌شود. حداکثر دمای صفحه را حساب کنید.

۲-۴۲ از سیمی به جنس فولاد ضدزنگ به قطر ۳/۲ میلی‌متر و به طول ۳۰ cm ولتاژی برابر ۱۰ V عبور می‌کند. دمای سطح بیرونی سیم ۹۳ °C می‌باشد. دمای مرکز سیم را حساب کنید. مقاومت مخصوص سیم را ۷۰ $\mu\Omega.cm$ و ضریب هدایتی گرمایی آن را $۲۲/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ در نظر بگیرید.

۲-۴۳ سیم گرم‌کن مثال ۲-۴ را در سیالی به دمای ۹۳ °C فرو می‌بریم. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی برابر $۵/۷ \frac{kW}{m^۲.^\circ C}$ است. دمای مرکز سیم را حساب کنید.

۲-۴۴ برای گرم کردن لوله‌ای که سیالی خنک کننده در آن جاری است از شدت جریان الکتریکی استفاده می‌شود. برای به حداقل رساندن اتلاف گرما به اطراف، بیرون لوله را عایق کرده، برای اندازه‌گیری دما از ترموکوپل‌هایی متصل به سطح بیرونی استفاده می‌شود. با فرض یکنواختی تولید گرما در لوله، عبارتی برای ضریب انتقال گرمایی جابه‌جایی در سطح داخلی لوله بر حسب متغیرهای ولتاژ E، شدت جریان I، دمای دیواره بیرونی لوله T_o، شعاع درونی و بیرونی r_i و r_o، طول لوله L و دمای سیال T_f بیابید.

۲-۴۵ عبارتی برای توزیع دما در کره‌ای به شعاع r با تولید یکنواخت گرما $\dot{q}$ و دمای ثابت سطح T_w به‌دست آورید.

۲-۴۶ کره‌ای از جنس فولاد ضدزنگ $\left[k = ۱۶ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ به قطر ۴ cm را در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = ۱۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار داده‌ایم. در داخل کره گرما با آهنگ $۱/۰ \frac{MW}{m^۳}$ تولید می‌شود. دمای حالت پایدار مرکز کره را حساب کنید.

۲-۴۷ از کابل برقی به جنس آلیاژ آلومینیم و $k = ۱۹۰ \frac{W}{m.^\circ C}$ و قطر ۳۰ میلی‌متر، شدت جریان ۲۳۰ A عبور می‌کند. مقاومت مخصوص کابل ۲/۹ $\mu\Omega.cm$ و دمای سطح بیرونی آن ۱۸۰ °C است. وقتی دمای محیط ۱۵ °C باشد حداکثر دمای کابل را حساب کنید.

۲-۴۸ عبارتی برای توزیع دما در استوانه‌ای توخالی با چشمه‌های گرمایی که طبق رابطهٔ خطی $\dot{q} = a + br$ تغییر می‌کند بیابید، که $\dot{q}_i$ آهنگ تولید گرمای واحد حجم در $r = r_i$ است. دمای داخل در $r = r_i$ برابر $T = T_i$ و دمای خارج در $r = r_o$ برابر $T = T_o$ است.

۲-۴۹ سطح بیرونی سیمی مسی به قطر ۲ mm در معرض محیطی جابه‌جایی به $h = ۵۰۰۰ \frac{W}{m.^۲ ^\circ C}$ و $T_\infty = ۱۰۰ ^\circ C$ قرار دارد. برای آنکه دمای مرکز سیم برابر ۱۵۰ °C باشد چه شدت جریانی باید از سیم بگذرد؟ مسأله را برای سیمی آلومینیمی به همان قطر تکرار کنید. مقاومت مخصوص مس برابر ۱/۶۷ $\mu\Omega.cm$ است.

۲-۵۰ قطر داخلی لوله‌ای برابر ۲/۵ cm و ضخامت دیوارهٔ آن برابر ۰/۴ mm بوده و در معرض محیطی به $h = ۱۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۴۰ ^\circ C$ قرار دارد. گرما با چه آهنگی در این لوله تولید شود تا حداکثر دمای لوله برابر ۲۵۰ °C به ازای $k = ۲۴ \frac{W}{m.^\circ C}$ باشد.

۲-۵۱ آب جاری داخل لوله‌ای فولادی به قطر ۲/۵ cm آب جاری است. ضخامت دیوارهٔ لوله ۲ میلی‌متر و ضریب جابه‌جایی داخل آن $۵۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. ضریب جابه‌جایی بیرون $۱۲ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ می‌باشد. ضریب انتقال گرمای کل را محاسبه کنید. عامل اصلی در تعیین U چیست؟

۲-۵۲ روی لولهٔ مسأله ۲-۵۱ را با یک لایهٔ پنبه‌نسوز $\left[k = ۰/۱۸ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ مسی‌پوشانیم در حالی که بازهم در محیط جابه‌جایی با ضریب $h = ۱۲ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. شعاع عایق بحرانی را حساب کنید. آیا انتقال گرما با افزودن ضخامت عایق به میزان الف) ۰/۵ میلی‌متر، ب) ۱۰ میلی‌متر، زیاد می‌شود یا کم؟

۲-۵۳ ضریب انتقال گرمای کل را برای مسأله ۲-۴ حساب کنید.

۲-۵۴ ضریب انتقال گرمای کل را برای مسأله ۲-۵ حساب کنید.

۲-۵۵ در لوله‌ای به جنس فولاد ضدزنگ با جداره نازک، $h = ۶۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ هوا به دمای ۱۲۰ °C جاری است. قطر داخلی لوله برابر ۲/۵ cm و ضخامت دیواره ۰/۴ mm و برای فولاد $k = ۱۸ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. این لوله در معرض محیطی به $h = ۶/۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۱۵ ^\circ C$ قرار دارد. ضریب انتقال گرمای کل و اتلاف گرمای متر طول لوله را حساب کنید. اگر عایقی

به $k = ۴۰ \frac{mW}{m.^\circ C}$ روی لوله کشیده شود برای کاهش ۹۰٪ اتلاف گرما، چه ضخامتی از این عایق ضروری است؟

۲-۵۶ پنجره‌ای از دو صفحه شیشه‌ای به ضخامت ۵ mm که به واسطه یک لایهٔ هوا به ضخامت ۴ mm از هم جدا شده‌اند تشکیل شده است و می‌توان هوا را ساکن در نظر گرفت به طوری که هدایت خالص وجود داشته باشد. ضرایب جابه‌جایی برای سطوح داخلی و خارجی به ترتیب برابر ۱۲ و $۵۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. ضریب انتقال گرمای کل پنجره و مقدار R را حساب کنید. مسأله را برای شیشه تک به ضخامت ۵ mm تکرار کنید.

۲-۵۷ دیواری مرکب است از یک لایهٔ مس به ضخامت ۱ mm و یک لایهٔ فولاد ۱٪ کربن به ضخامت ۴ mm و لایه‌ای آزبست به ضخامت ۱ cm و لایه‌ای شیشه لیفی به ضخامت ۱۰ cm. ضریب انتقال گرمای این دیوار را حساب کنید. چنان‌چه دمای دو سطح بیرونی برابر ۱۰ و ۱۵۰ °C باشد، دماهای میان سطح را حساب کنید.

۲-۵۸ میله باریکی به طول L از دو طرف به دو دیوار که دمای آنها به ترتیب $T_۱$ و $T_۲$ است متصل است. این میله در دمای T_∞ به طریق جابه‌جایی به محیط اطراف گرما می‌دهد. عبارتی برای الف) توزیع دما در میله و ب) کل گرمای تلف‌شده از میله بیابید.

۲-۵۹ دمای سر میله‌ای به طول L برابر T_b بوده، در محیطی به دمای T_∞ قرار دارد. در داخل میله المان گرمکن الکتریکی قرار دارد که در طول میله، گرمایی با آهنگ $\dot{q}$ تولید می‌کند. عبارت برای الف) توزیع دما در میله و ب) گرمای منتقل شده به محیط بیابید. عبارتی برای مقدار $\dot{q}$ پیدا کنید که باعث می‌شود انتقال گرما در سر به دمای T_o صفر شود. پیدا کنید.

۲-۶۰ یک سر میله‌ای مسی به طول ۳۰ cm را به دیواری به دمای ۲۰۰ °C محکم چسبانده‌ایم. سر دیگر محکم به‌دیواری به دمای ۹۳ °C متصل است. روی میله هوا می‌وزانیم به‌طوری که ضریب انتقال گرما $۱۷ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ گردد. قطر میله ۱۲/۵ میلی‌متر است. دمای هوا ۳۸ °C می‌باشد. گرمای انتقال یافته خالص به هوا را بر حسب وات محاسبه کنید.

۲-۶۱ نشان دهید که توزیع دما برای مورد ۲ بخش ۲-۹ چنین است:

$$\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh m(L - x)}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}$$

سپس نشان دهید که انتقال گرما برابر است با:

$$q = \sqrt{hPkA}\ (T_o - T_\infty) \frac{\sinh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}$$

۲-۶۲ میلهٔ آلومینیمی به قطر ۲/۵ cm و طول ۱۵ cm از دیواری به دمای ۲۶۰ °C بیرون آمده است. میله در معرض محیطی به دمای ۱۶ °C قرار دارد. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی برابر $۱۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ می‌باشد. گرمای از دست رفتهٔ میله را حساب کنید.

۲-۶۳ معادله (۲-۳۵) را با انتگرال‌گیری از معادله اتلاف گرمای جابه‌جایی از میلهٔ مورد ۱ بخش ۲-۹ به‌دست آورید.

۲-۶۴ معادله (۲-۳۶) را انتگرال‌گیری از اتلاف گرمای جابه‌جایی از میله مورد ۳ بخش ۲-۹ به‌دست آورید.

۲-۶۵ میله مسی دراز و باریکی به قطر ۶/۴ میلی‌متر را در معرض محیطی به دمای ۲۰ °C قرار داده‌ایم. دمای پایه میله برابر ۱۵۰ °C می‌باشد. ضریب انتقال گرمای بین میله و محیط $۲۴ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. گرمای از دست رفته از میله را حساب کنید.

۲-۶۶ دمای یک سرمیلهٔ مسی خیلی بلند $\left[k = ۳۷۲ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ به‌قطر ۲/۵ cm برابر ۹۰ °C است. میله را در معرض سیالی به دمای ۴۰ °C قرار می‌دهیم. ضریب انتقال گرما $۳/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. مقدار گرمای تلف‌شده از میله را حساب کنید.

۲-۶۷ پره‌ای آلومینیمی به ضخامت ۱/۶ میلی‌متر را روی لوله‌ای گرد به قطر خارجی ۲/۵ cm نصب کرده‌ایم. طول پره ۶/۴ میلی‌متر است. دمای دیواره لوله ۱۵۰ °C و دمای محیط ۱۵ °C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۲۳ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از این پره را حساب کنید.

۲-۶۸ بازدهی کل سطح پره‌دار را می‌توان چنین تعریف کرد: "نسبت انتقال گرمای کل از مساحتِ مرکب از سطح پره‌ها به‌گرمایی که اگر دمای سطح کل‌به دمای پایه T_o می‌رسید،انتقال می‌یافت". نشان دهید که این بازدهی را می‌توان از فرمول زیر حساب کرد:

$$\eta_t = ۱ - \frac{A_f}{A}(۱ - \eta_f)$$

که η_t بازدهی کل و A_f مساحت کل پره‌ها و A مساحت انتقال گرمای کل، شامل پره‌ها و لوله یا سطح دیگر و η_f بازدهی پره است.

۲-۶۹ پره‌ای مثلث شکل از جنس فولاد ضدزنگ (۱۸٪ کُرم، ۸٪ نیکل) را به دیوار تختی به دمای ۴۶۰ °C چسبانده‌ایم. ضخامت پره ۶/۴ میلی متر و طول آن ۲/۵ cm است. دمای محیط ۹۳ °C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۲۸ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از پره را بیابید.

۲-۷۰ روی محیط لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm را به فواصل ۹/۵ میلی‌متر از هم پره‌هایی با نیم‌رخ مستطیلی قرار داده‌اند. جنس پره‌ها آلومینیم و ضخامتشان ۰/۸ میلی‌متر و طولشان ۱۲/۵ میلی‌متر است. دمای دیوارهٔ لوله ۲۰۰ °C بوده، دمای محیط ۹۳ °C و ضریب انتقال گرما $۱۱۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ می‌باشد. گرمای تلف‌شده از متر طول لوله را حساب کنید.

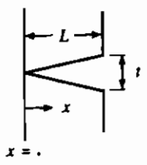
۲-۷۱ پره‌ای با سطح مقطع مستطیلی را روی محیط لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm نصب کرده‌اند. طول پره ۶/۴ میلی‌متر و ضخامت آن ۳/۲ میلی‌متر است. جنس پره از فولاد نرم است. اگر بر روی پره هوا طوری بوزد که ضریب انتقال گرما $۲۸ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و دمای پایه و هوا به‌ترتیب ۲۶۰ و ۹۳ °C شود، انتقال گرما از پره را حساب کنید.

۲-۷۲ پره‌ای مستطیلی مستقیم به ضخامت ۲ cm و طول ۱۴ cm از جنس فولاد را روی قسمت بیرونی دیواری به دمای ۲۰۰ °C قرار داده‌ایم. دمای محیط ۱۵ °C بوده و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی برابر $۲۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از واحد ارتفاع پره را حساب کنید.

۲-۷۳ پره‌ای آلومینیمی به ضخامت ۱/۶ میلی‌متر لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm را احاطه کرده است. طول پره ۱۲/۵ میلی‌متر و دمای دیوارهٔ لوله ۲۰۰ °C و دمای محیط برابر ۲۰ °C می‌باشد. ضریب انتقال گرما برابر $۶۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از پره را حساب کنید.

۲-۷۴ عبارتی برای محاسبه ضخامت بهینه پره مستطیلی به مساحت نیم‌رخ مشخص به‌دست آورید. از روش سادهٔ نوک عایق استفاده کنید.

۲-۷۵ برای محاسبه توزیع دما در پرهٔ مثلثی مستقیمی معادله دیفرانسیلی (بدون حل آن) به‌دست آورید. برای راحتی امر، محور مختصات را مطابق شکل زیر در نظر گرفته، جریان گرما را یک بعدی فرض کنید.



شکل م ۲-۷۵.

۲-۷۶ میله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ و بلند $\left[k = ۱۶ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ دارای مقطعی مربعی به ابعاد ۱۲/۵ × ۱۲/۵ میلی‌متر بوده و دمای یک سر آن ۲۵۰ °C می‌باشد. ضریب انتقال گرما برابر $۴۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و دمای محیط ۹۰ °C است. گرمای هدر رفته از میله را حساب کنید.

۲-۷۷ پره‌ای مستقیم بانیم‌رخ مستطیلی (۹۴٪ آلومینیم و ۳٪ مس) و به ضخامت ۲/۴ میلی‌متر ساخته شده است. طول پره ۱۹ میلی‌متر بوده، در معرض محیط جابه‌جایی با $h = ۸۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. اگر دمای پایه ۹۰ °C و دمای محیط ۲۵ °C باشد، انتقال گرمای واحد طول پره را حساب کنید.

۲-۷۸ یک موتور درون‌سوز که با هوا خنک شده، سیلندری از جنس چدن $\left[k = ۳۵ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}\right]$ دارد. پره‌های روی سیلندر به طول $\frac{۵}{۸}$ in و ضخامت $\frac{۱}{۸}$ in است. ضریب جابه‌جایی $۱۲ \frac{Btu}{h.ft^۲.^\circ F}$ است. قطر سیلندر .4in است. اتلاف گرمای هر پره را وقتی که دمای پایه ۴۵۰°F و دمای محیط ۱۰۰°F باشد حساب کنید.

۲-۷۹ میله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ به‌قطر ۱/۶ میلی‌متر $\left[k = ۲۲ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ از دیواری به دمای ۴۹ °C بیرون آمده است. طول میله ۱۲/۵ میلی‌متر، ضریب جابه‌جایی $۵۷۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و دمای محیط برابر ۲۵ °C است. دمای نوک میله را حساب کنید. محاسبات را برای $h = ۱۲۰۰$ و ۲۰۰ $\frac{W}{m^۲.^\circ C}$ تکرار کنید.

۲-۸۰ یک میلهٔ شیشه‌ای به قطر ۲ cm و طول ۶ cm $\left[k = ۰/۸ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ دارای دمای پایه‌ای برابر ۱۰۰ °C بوده و در معرض هوای جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C است. دمای نوک میله برابر ۳۵ °C است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی چه‌قدر است؟ از این میله چه مقدار گرما تلف می‌شود؟

۲-۸۱ طول پرهٔ مستطیلی مستقیمی ۲/۰ cm و ضخامت آن ۱/۵ mm است. ضریب هدایت گرمایی برابر $۵۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ بوده و پره در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = ۵۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. حداکثر اتلاف گرمای ممکن را به‌ازای دمای پایه ۲۰۰ °C به‌دست آورید. اتلاف گرمای واقعی چه‌قدر است؟

۲-۸۲ طول پره مستطیلی مستقیمی ۳/۵ cm و ضخامت آن ۱/۴ mm است. ضریب هدایت گرمایی $۵۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ می‌باشد. این پره در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = ۵۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. حداکثر اتلاف گرمای ممکن به ازای دمای پایهٔ ۱۵۰ °C را حساب کنید. اتلاف گرمای واقعی در این دمای پایه چه‌قدر است؟

۲-۸۳ یک پرهٔ محیطی با نیم‌رخ مستطیلی از جنس فولاد (۱٪ کربن) به لوله‌ای با دمای ۱۵۰ °C وصل است. قطر پره ۵ cm و طول آن نیز ۵ cm و ضخامتش ۲ mm است. دمای هوای محیط ۲۰ °C و می‌توان ضریب انتقال گرما را $۱۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ درنظر گرفت. گرمای تلف‌شده از پره را حساب کنید.

۲-۸۴ جنس پره‌ای با نیم‌رخ مستطیلی که روی محیط لوله‌ای به قطر ۳ cm قرار گرفته، از آلومینیم است. طول پره ۲ cm و ضخامتش ۱ mm است. دمای دیواره لوله ۲۰۰ °C می‌باشد و پره در معرض سیالی به دمای ۲۰ °C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۸۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. اتلاف گرما از پره را حساب کنید.

۲-۸۵ میله‌ای فولادی به قطر ۱/۰ cm $\left(k = ۲۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}\right)$ و طول ۲۰ cm موجود است که دمای یک سر آن ۵۰ °C و دمای سر دیگرش ۱۰۰ °C است. این میله در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = ۸۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. دمای مرکز میله را بیابید.

۲-۸۶ پرهٔ مستطیلی مستقیمی از جنس فولاد (۱٪ کربن) به ضخامت ۲/۶ cm و طول ۱۷ cm را بر سطح بیرون دیواری به دمای ۲۳۰ °C قرار می‌دهند. دمای محیط ۲۵ °C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۲۳ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ است. اتلاف گرمای واحد ارتفاع پره و بازدهی آن را حساب کنید.

۲-۸۷ پرهٔ مستقیمی با نیم‌رخ مستطیلی به طول ۵ cm و ضخامت ۴ mm بوده و جنس آن ماده‌ای به $k = ۲۳ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. پره در معرض محیطی به ضریب جابه‌جایی $۲۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و دمای ۴۰ °C است. دمای پایه پره برابر ۲۰۰ °C می‌باشد. اتلاف گرمای واحد ارتفاع پره را حساب کنید.

۲-۸۸ یک پرهٔ آلومینیمی بر روی محیط لوله‌ای به قطر ۲۵/۴ mm نصب شده است. طول پره ۱۲/۷ mm و ضخامت آن ۱/۰ mm است و در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۳۰ °C و ضریب جابه‌جایی $۵۶ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. دمای پایه برابر ۱۲۵ °C می‌باشد. اتلاف گرما از پره را حساب کنید.

۲-۸۹ جنس پره‌ای با نیم‌رخ مستطیلی که روی محیط لوله‌ای قرار می‌گیرد، فولاد ضدزنگ است (۱۸٪ کرم، ۸٪ نیکل). ضخامت این پره ۲ mm و شعاع داخلی آن ۲ cm و به طول ۸ cm است. دمای پایه آن برابر ۱۳۵ °C بوده، پره در معرض محیط جابه‌جایی به دمای ۱۵ °C و $h = ۲۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار دارد. اتلاف گرما از این پره را حساب کنید.

۲-۹۰ طول پره‌ای مستطیلی برابر ۲/۵ cm و ضخامت آن ۱/۱ mm است. ضریب هدایت گرمایی برابر $55\ \frac{W}{m.^\circ C}$ می‌باشد. پره در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = 500\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. اتلاف گرما را به‌ازای دمای پایه ۱۲۵ °C حساب کنید.

۲-۹۱ پره‌ای آلومینیمی به ضخامت ۱ mm لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm را احاطه کرده است. طول پره ۱/۲۵ cm می‌باشد و در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۳۰ °C و $h = 75\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارد. دمای سطح لوله برابر ۱۰۰ °C است. اتلاف گرما از پره را حساب کنید.

۲-۹۲ میله‌ای شیشه‌ای به قطر ۱ cm و طول ۵ cm در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C قرار دارد. دمای یک سر این میله ۱۸۰ °C است. گرمای تلف‌شده از لوله را در صورتی که ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی برابر $15\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ باشد حساب کنید.

۲-۹۳ ابعاد سطح مقطع مربعی میله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ ۱×۱ cm و طولش ۸ cm و $k = 18\ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. دمای پایه میله ۳۰۰ °C می‌باشد. این میله در معرض محیطی جابه‌جایی به‌دمای ۵۰ °C و $h = 45\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از میله و بازدهی پره را حساب کنید.

۲-۹۴ روی لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm پره‌های مسی به ضخامت ۱ mm نصب شده‌اند که طول هر یک ۱۲ mm می‌باشد. دمای لوله ۲۵۰ °C و پره‌ها در معرض هوای ۳۰ °C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $120\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارند. گرمای از دست رفته از هر پره را حساب کنید.

۲-۹۵ جنس پره‌ای مستقیم با نیم‌رخ مستطیلی، فولاد ضدزنگ (۱۸٪کرم، ۸٪ نیکل) بوده و طولش ۵ cm و ضخامتش ۲/۵ cm است. دمای پایه ۱۰۰ °C و پره در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = 47\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارد. گرمای تلف‌شده از متر ارتفاع و بازدهی پره را حساب کنید.

۲-۹۶ پره‌ای محیطی با نیم‌رخ مستطیلی از جنس دورآلومین در محیط لوله‌ای به قطر ۳ cm قرار می‌گیرد. طول پره ۳ cm و ضخامتش ۱ mm است. دمای دیواره لوله برابر ۲۰۰ °C بوده، پره در معرض سیالی به دمای ۲۰ °C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $80\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارد. گرمای تلف‌شده از پره را حساب کنید.

۲-۹۷ پره‌ای دایره‌ای با نیم‌رخ مستطیلی بر روی لوله‌ای به قطر ۳ cm و دمای ۱۰۰ °C نصب شده است. قطر بیرونی پره ۹ cm و ضخامتش ۱ mm است. ضریب جابه‌جایی محیط برابر $50\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و دمایش ۳۰ °C است. ضریب هدایت گرمایی جنس پره را به ازای بازدهی ۶۰٪ پره حساب کنید.

۲-۹۸ پره‌ای با نیم‌رخ مستطیلی و ضخامت ۱ mm و طول ۲ cm بر روی لوله‌ای به قطر ۲ cm نصب شده است. دمای لوله ۱۵۰ °C و دمای محیط ۲۰ °C و $h = 200\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. جنس پره آلومینیم است. گرمای تلف شده از این پره را حساب کنید.

۲-۹۹ دو میله از جنس فولاد ضدزنگ به قطر ۱ in. $\left[k = 17\ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ را از دو طرف طوری به هم چسبانیده‌ایم که تنها ۰/۱ درصد مساحت مقطعشان به هم تماس دارند. طول دو میله ۷/۵ cm بوده، در معرض اختلاف دمای ۳۰۰ °C قرار دارند. عمق زبری هر میله $\left(\frac{L_g}{2}\right)$ حدود ۱/۳ μm است. سیال اطراف میله هواست که ضریب هدایت گرمایی آن را می‌توان برای این مسأله $0/035\ \frac{W}{m^\circ C}$ گرفت. مقدار مقاومت تماس و جریان گرمای محوری را حساب کنید. مقدار جریان گرما برای میله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ به طول پیوسته ۱۵ cm چه‌قدر است؟

۲-۱۰۰ وقتی که «فشار تماس» دو سطح مماس بر هم افزایش یابد، نقاط برآمده سطوح به نحوی تغییر شکل می‌دهند که مساحت تماس A_c افزایش یافته، عمق زبری ρ، L_ρ کم می‌شود. این اثر را با آنچه در بخش ۲-۱۱ گفته شد مورد بحث قرار دهید. (در عمل ضریب هدایت تماس تقریباً به طور مستقیم با فشار تغییر می‌کند.)

۲-۱۰۱ دو صفحه آلومینیمی به ضخامت ۵ میلی‌متر و به زبری سطحی ۱۰۰ μin. با فشار تماسی برابر ۲۰ atm به هم پیچ شده‌اند. اختلاف دمای کل در عرض صفحات فوق ۸۰ °C است. افت دما در عرض اتصال را بیابید.

۲-۱۰۲ گاهی روی لوله‌ها را پره‌هایی به فاصله و به طریق پرس فیت (*pressfit*) نصب می‌کنند. پره‌ای آلومینیمی به ضخامت ۱ میلی‌متر را در نظر بگیرید که باید روی لولهٔ آلومینیمی به قطر ۲/۵ cm نصب شود. طول پره ۱/۲۵ cm و ضریب هدایت تماسی را می‌توان از جدول ۲-۲ برای سطحی با زبری ۱۰۰ μin. در نظر گرفت. دمای محیط جابه‌جایی ۲۰ °C و $h = 125\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. انتقال گرمای هر پره را وقتی دمای دیوار ۲۰۰ °C باشد بیابید. درصد کاهش انتقال گرما به ازای این ضریب هدایت تماسی چه‌قدر است؟

۲-۱۰۳ پره‌ای آلومینیمی به ترانزیستوری وصل شده که با آهنگ ۳۰ mW گرما تولید می‌کند. مساحت کل پره ۹/۰ cm² بوده و در معرض هوای محیط به دمای ۲۷ °C قرار گرفته است. ضریب هدایت تماسی بین ترانزیستور و پره $0/9 \times 10^{-4}\ \frac{m^2.^\circ C}{W}$ و مساحت تماس ۰/۵ cm² است. با فرض یکنواختی دمای پره، دمای ترانزیستور را بیابید.

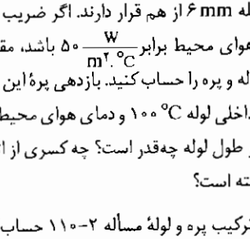
۲-۱۰۴ دیوار تختی به ضخامت ۲۰ cm و تولید یکنواخت گرما در داخل به میزان $200\ \frac{kW}{m^3}$ در هر دو طرف در معرض محیط جابه‌جایی به دمای ۵۰ °C و $h = 400\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دارد. دمای مرکز دیوار را برای $k = 20\ \frac{W}{m.^\circ C}$ حساب کنید.

۲-۱۰۵ فرض کنید که دیوار مسأله ۲-۱۰۴ فقط ۱۰ cm ضخامت دارد و یک طرف آن عایق است. حداکثر دمای داخل دیوار را به فرض آنکه سایر شرایط تغییر نکرده باشد حساب کنید. در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

۲-۱۰۶ دمای پایهٔ پرهٔ آلومینیمی مستقیمی با نیم‌رخ مثلثی ۲۰۰ °C بوده و در معرض محیط جابه‌جایی به دمای ۲۵ °C و $h = 45\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. طول پره ۸ mm و ضخامت آن ۲/۰ mm است. گرمای تلف‌شده از واحد ارتفاع پره را حساب کنید.

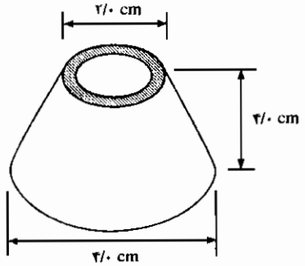
۲-۱۰۷ یکصد پره آلومینیمی با نیم‌رخ مستطیلی روی لوله‌ای به طول ۱/۰ m و قطر ۲/۵ cm نصب شده است. طول پره‌ها ۱ cm و ضخامت آنها ۲/۰ mm است. دمای پایه ۱۸۰ °C و محیط جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و $h = 50\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. گرمای کل از دست رفته یک متر از آرایش لوله پره‌دار را حساب کنید.

۲-۱۰۸ قطعهٔ استوانه‌ای شکل زیر دارای ضریب هدایت گرمایی $100\ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب برابر ۱/۵ و ۱/۷ cm و سطوح عایق هستند. انتقال گرمای محیطی به ازای واحد ارتفاع پره را وقتی دمای اعمالی برابر ۵۰ °C باشد حساب کنید. مقاومت گرمایی چه‌قدر است؟



شکل م ۲-۱۰۸.

۲-۱۰۹ مخروط ناقص و تو خالی شکل زیر را در خنک کاری لیزری به‌کار می‌برند و آن را از مسی به ضخامت ۰/۵ mm می‌سازند. ضریب مقاومت گرمایی برای جریان گرمای یک بعدی را حساب کنید. انتقال گرما به ازای اختلاف دمای ۳۰۰ °C چه‌قدر است؟



شکل م ۲-۱۰۹.

۲-۱۱۰ دور تا دور لولهٔ مسی به قطر داخلی ۱/۲۵ cm و ضخامت دیوارهٔ ۰/۸ mm پره نصب شده‌است. ضخامت پره‌ها ۰/۳ mm و طول آنها ۳ mm و به فاصله ۶ mm از هم قرار دارند. اگر ضریب انتقال گرما از لوله و پره‌ها به هوای محیط برابر $50\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ باشد، مقاومت گرمایی ترکیب ۳۰ cm لوله و پره را حساب کنید. بازدهی پرهٔ این آرایش چه‌قدر است؟ اگر دمای داخلی لوله ۱۰۰ °C و دمای هوای محیط ۲۰ °C باشد، اتلاف گرمای متر طول لوله چه‌قدر است؟ چه کسری از اتلاف از طرف پره‌ها صورت گرفته است؟

۲-۱۱۱ مقدار R را برای ترکیب پره و لولهٔ مسأله ۲-۱۱۰ حساب کنید.

۲-۱۱۲ مسألهٔ ۲-۱۱۰ را برای پره‌های آلومینیمی نصب شده روی لولهٔ مسی تکرار کنید.

۲-۱۱۳ مسألهٔ ۲-۱۱۱ را برای پره‌های آلومینیمی نصب شده روی لولهٔ مسی تکرار کنید.

۲-۱۱۴ میله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ و به طول ۱۰ cm و قطر ۲ mm دارای مقاومت مخصوص ۷۰ μΩ.cm و ضریب هدایت گرمایی $16\ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. میله در معرض محیطی جابه‌جای با $h = 100\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و $T = 20\ ^\circ C$ است. دمای دوسر میله ۱۰۰ °C است. چه ولتاژی باید بر میله اعمال کرد تا مقدار انتشار گرمای آن به محیط دو برابر مقدار حالت ولتاژ صفر باشد؟

۲-۱۱۵ میلهٔ مسأله ۲-۱۱۴ را خیلی بلند فرض کنید. در این مورد، انتقال گرمای ولتاژ صفر چه‌قدر است؟

۲-۱۱۶ فرض کنید که محیط قطعه استوانه‌ای مسأله ۲-۱۰۸ به جای عایق‌بودن در معرض محیط جابه‌جایی با $h = 75\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و $T_\infty = 30^\circ C$ است. در این مورد، یک سر به دمای ۵۰ °C و سر دیگر به دمای ۱۰۰ °C است. اتلاف گرما از این قطعه به محیط را در این شرایط بیابید. انتقال گرما در هر سر قطعه چه‌قدر است؟

مسائل طراحی

۲-۱۱۷ می‌خواهیم بین پره مثلثی یا مستطیلی مستقیم آلومینیمی با ضخامت پایهٔ ۳/۰ mm یکی را انتخاب کنیم. ضریب جابه‌جایی $50\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. پره‌ای با حداقل وزن را برای جریان گرمای داده شده، انتخاب کنید.

۲-۱۱۸ پره‌های محیطی آلومینیمی با $r_1 = 1/0$ cm و $r_2 = 2/0$ cm و ضخامت ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳ mm را در نظر بگیرید. ضریب جابه‌جایی برابر $160\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. انتقال گرمای شش پره ۰/۱ mm، سه پره ۰/۲ mm و دو پره ۰/۳ mm را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه می‌گیرید؟ مسأله را برای $h = 320\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ تکرار کنید.

۲-۱۱۹ می‌خواهیم "پره‌های پین‌شکل" را از نظر عملکرد نسبی آنها به صورت تابعی از قطر، مقایسه کنیم. سه پین به قطر ۲، ۵ و ۱۰ mm و طول ۵ cm را در معرض محیط جابه‌جایی با $T_\infty = 20\ ^\circ C$ و $h = 40\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار می‌دهیم. دمای پایه برابر ۲۰۰ °C است. اتلاف گرمای هر پره را حساب کنید. تغییر این اتلاف با قطر پین چگونه است؟

۲-۱۲۰ انتقال گرمای واحد جرم پره‌های پین‌شکل مسأله ۲-۱۱۹ را حساب کنید. تغییر آنها نسبت به قطر چگونه است؟

۲-۱۲۱ طول پره‌ای مستطیلی و مستقیم برابر ۱/۵ cm و ضخامت آن ۱/۰ mm است. ضریب جابه‌جایی برابر $20\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. آهنگ انتقال گرمای پین‌های آلومینیمی و منیزیومی را با هم مقایسه کنید.

۲-۱۲۲ فرض کنید که هر دو پره مسألهٔ ۲-۱۲۱ برابر هم گرما منتشر می‌کنند. وزن کدام یک کم‌تر است؟ فرض کنید که ضخامت هر دو پره یکسان است. طول‌ها را طوری تنظیم کنید که انتقال گرماها برابر شود.

۲-۱۲۳ مواد عایق را معمولاً با پوشش بازتابنده نصب می‌کنند تا انتقال گرمای تابشی بین سطح و محیط را کاهش دهند. مادهٔ عایقی را روی دیوار

کوره‌ای که دمای آن ۲۰۰ °C است نصب کرده‌اند. قیمت انرژی سوخت کوره برابر $\frac{\text{دلار } ۸/۲۵}{GJ}$ است و هزینهٔ عایق باید با صرفه‌جویی در سوخت در عرض سه سال مستهلک شود. عایق مناسبی از جدول ۲–۱ و یا جدول ۳ – A انتخاب کرده، مقدار عایقی را که در عرض سه سال قیمت خود را مستهلک می‌کند، تعیین کنید. در این محاسبه فرض کنید که سطح بیرونی عایق مثل جسم سیاه می‌تابد و اتلاف گرما را می‌توان از معادلهٔ (۱–۱۲) تعیین کرد. در این محاسبه از جدول ۱–۲ به عنوان راهنما در انتخاب ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی استفاده کنید. سپس همین نوع ماده عایق را در نظر داشته، اما فرض کنید پوشش بازتابنده دارای $\varepsilon = ۰/۱$ است. انتقال تابشی را بازهم می‌توان از معادله (۱–۱۲) محاسبه کرد. مقدار اقتصادی ماده عایق بازتابنده مورد نیاز را تعیین کنید. اکنون که از عایق بازتابنده به جای عایق معمولی بدون بازتاب استفاده شده است، چه‌قدر هزینه به ازای واحد ضخامت یا حجم، کم‌تر می‌شود. در مورد عدم اطمینان‌های احتمالی خود اظهارنظر کنید.

۲–۱۲۴ لولهٔ نازکی از جنس فولاد ضدزنگ به عنوان المان یک‌گرم‌کن برقی به کار می‌رود که ضریب جابه‌جایی آن به آب ۱۰۰ °C برابر $۵۰۰۰ \frac{W}{m^{۲}.{}^{\circ}C}$ خواهد بود. چند شکل‌بندی برای آنکه انتقال گرمای کل $۱۰\,kW$ ایجاد شود پیشنهاد کنید. طول، قطر بیرونی، ضخامت دیواره، حداکثر دمای لوله و ولتاژی که باید روی لوله اعمال کرد را مشخص کنید. مقاومت مخصوص فولاد ضدزنگ را $۷۰\,\mu\Omega.cm$ بگیرید.

۲–۱۲۵ در لوله‌ای فولادی به قطر ۲/۵ cm، بخار چگالنده به دمای ۱۰۰ °C جریان دارد دور سطح بیرونی این لوله پره‌های فولادی دایره‌ای قرار داده و از آن برای انتشار گرما در هوای اتاق ۲۰ °C استفاده می‌شود. اتلاف جابه‌جایی از لوله و پره‌ها به صورت جابه‌جایی آزاد با $h = ۸/۰ \frac{W}{m^{۲}.{}^{\circ}C}$ است. چند مورد ضخامت برای پره، فاصله پره‌ها و قطر بیرونی پره در نظر گرفته و اتلاف گرمای کل واحد طول لوله را تعیین کنید. برای پره‌های فولادی $k = ۴۳ \frac{W}{m.{}^{\circ}C}$ بگیرید. h در کل سطح، یکنواخت است. در مورد نتایج این بررسی برداشت مناسب انجام دهید.

۲–۱۲۶ در لوله‌ای به قطر ۵/۳ cm بخار جاری و دمای آن ۲۰۰ °C است. لوله از سطح بزرگ کارخانه‌ای عبور کرده، به طریق جابه‌جایی آزاد از سطح بیرون آن گرما با $h = ۷/۲ \frac{W}{m^{۲}.{}^{\circ}C}$ از دست می‌رود. با استفاده از اطلاعات جدول ۲–۱ و یا جدول ۳ – A، دو عایق مختلف انتخاب کنید تا بتوان آنها را روی لوله نصب کرد تا وقتی لوله در معرض هوای بیرونی ۲۰ °C است، دمای سطح بیرونی عایق را به ۳۰ °C برساند. هزینهٔ اتلاف انرژی این خط برابر $\frac{\text{دلار } ۸}{۱۰^{۶}\,kJ}$ باشد هزینه مجاز برای این عایق در واحد حجم آن چه‌قدر باشد تا در یک دوره سه ساله مستهلک شود. داریم:

(هزینه انرژی پس‌انداز شده در سال) × ۳ =
(هزینهٔ واحد حجم عایق نصب شده) × حجم

۲–۱۲۷ معمول آن است که پس‌انداز انرژی ناشی از نصب عایق بیش‌تر برای سقف در خانه با هزینه عایق در عرض سه سال مستهلک شود. این ادعا را ارزیابی کنید. برای این ارزیابی می‌توان فرض کرد که $۱\,kW$ انرژی برقی مورد مصرف واحد تهویه مطبوع، حدود $۱/۲۶ \times ۱۰^{۴} \frac{kJ}{h}$ سردکنندگی ایجاد کرده و هزینه برق برابر $\frac{\text{دلار } ۰/۰۸۵}{kWh}$ باشد. فرض کنید که خانه مورد نظر، عایق سقفی با مقدار $R = ۷/۰ \frac{{}^{\circ}F.ft^{۲}.h}{Btu}$ دارد و مقدار R آن به ۱۵ یا ۳۰ بالا برده می‌شود. دو عایق مختلف از جدول ۲–۱ و یا جدول ۳ – A انتخاب کرده، هزینه‌های مجاز به ازای واحد حجم عایق را برای استهلاک سه سالهٔ آن با دو مقدار R مشخص، حساب کنید. در این محاسبه:

(پس‌انداز هزینه انرژی در سال) × ۳ =
(هزینه واحد حجم عایق) × حجم

(۱) در مورد اختلاف دمای داخل خانه و فضای بیرون و (۲) ساعات کار دستگاه تهویه مطبوع در سال، فرض‌هایی در نظر بگیرید. در مورد نتایج و فرض‌ها اظهارنظر کنید.

۲–۱۲۸ دیوار پره‌داری مطابق شکل (۲–۱۰الف) از آلیاژ آلومینیم با $k = ۱۶۰ \frac{W}{m.{}^{\circ}C}$ ساخته می‌شود. ضخامت دیوار برابر ۲/۰ mm بوده و پره‌ها مستقیم و دارای نیم‌رخ مستطیلی است. دمای ثابت داخل دیوار برابر ۷۰ °C بوده، پره‌ها در معرض محیط جابه‌جایی در ۲۵ °C با $h = ۸ \frac{W}{m^{۲}.{}^{\circ}C}$ (جابه‌جایی آزاد) قرار دارد. این مجموعه از آلومینیم، ریخته شده، باید W ۳۰ گرما را تحت شرایط فوق منتشر سازد. با فرض آنکه پره مربعی باشد، ترکیب‌های مناسبی از تعداد پره‌ها، فاصله پره‌ها، ضلع مربع و ضخامت پره برای این سرد کردن، تعیین کنید. به فرض برای سطوح پره و دیوار h یکسان است.

۲–۱۲۹ مسأله ۲–۱۲۸ را برای سرد کردن با جابه‌جایی اجباری در حالی که ضریب جابه‌جایی $h = ۲۰ \frac{W}{m^{۲}.{}^{\circ}C}$ تولید کند، تکرار کنید.

❑ مراجع

1 Schneider, P.J.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass. ,1955

2 Harper, W.B., and D. R. Brown: Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-cooled Engines, *NACA Rep.* 158, 1922.

3 Gardner, K. A.: Efficiency of Extended Surfaces, *Trans. ASME,* vol. 67. pp. 621-631, 1945

4 Moore, C. J.:Heat Transfer across Surfaces in Contact: Studies of Transients in One-dimensional Composite Systems, *Southern Methodist Univ., Thermal/Fluid Sci, Ctr. Res. Rep.* 67-2, Dallas, Tex., March 1967.

5 Ybarrondo, L. J., and J. E. Sunderland: Heat Transfer from Extended Surfaces, *Bull. Mech. Eng. Educ.*, vol. 5, pp. 229-234, 1966.

6 Moore, C. J., Jr., H.A. Blum, and H. Atkins: Subject Classification Bibliography for Thermal Contaet Resistance Studies, *ASME Pap.* 68-WA/HT-18, December 1968.

7 Clausing, A. M.: Transfer at the Interface of Dissimilar Metals: The Influence of Thermal Strain, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 9, p. 791, 1966.

8 Kern, D. Q., and A. D. Kraus: "Extended Surface Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

9 Siegel, R., and J. R. Howell: "Thermal Radiation Heat Transfer,"2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

10 Fried, E.: Thermal Conduction Contribution to Heat Transfer at Contacts, "Thermal Conductivity," (R. P. Tye, ed.) vol. 2, Academic Press, Inc., New York, 1969.

11 Fletcher, L. S.: Recent Developments in contact Conductance Heat Transfer, *J. Heat Transfer,* vol. 110, no. 4(B), p. 1059, Nov. 1988.

۳

هدایت حالت پایدار - چندبعدی

❑ ۳-۱ مقدمه

انتقال گرمای حالت پایدار سیستم‌هایی که می‌شد گرادیان دما و سطح در آنها را برحسب یک مختص مکانی بیان کرد، در فصل ۲ محاسبه کردیم. اکنون مورد عمومی‌تر مختصات دوبعدی را تحلیل می‌کنیم. در حالت پایدارِ بدون تولید گرما و با فرض ضریب هدایت گرمایی ثابت ،از معادلهٔ لاپلاس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (۱-۳)$$

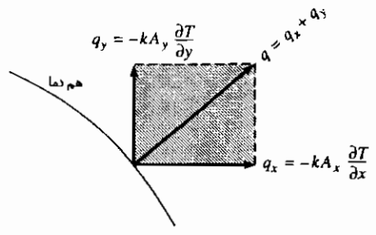
این معادله را می‌توان به روش‌های تحلیلی، عددی یا ترسیمی حل کرد.

معمولاً هدف از هر تحلیل انتقال گرما، پیش‌بینی جریان گرما یا دمای ناشی از جریان گرمای معین است. با حل معادله ۳-۱، دما در جسم دو بعدی را به صورت تابعی از دو مختص مکانی مستقل (x و y) به‌دست می‌آوریم. سپس جریان گرما در جهت x و y را می‌توان از معادلات فوریه به‌دست آورد:

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۲-۳)$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۳-۳)$$

این کمیت‌های جریان گرما یا در جهت xهستند یا در جهت y. جریان گرمای کل در نقطه‌ای از جسم برابر با برآیند q_x و q_y در آن نقطه است. بنابراین بردار جریان گرمای کل مطابق شکل (۳-۱)بر خطوطِ دماثابتِ جسم عمود است ،از این‌رو چنان‌چه توزیع دما در جسم معلوم باشد، به‌سادگی می‌توان جریان گرما را معین کرد.



شکل ۳-۱ طرح جریان گرمای دو بعدی.

❑ ۳-۲ تحلیل ریاضی هدایت گرمای دوبعدی

نخست روش تحلیلی مسأله دوبعدی و سپس روش‌های عددی و ترسیمی را بررسی می‌کنیم که کاربردشان می‌تواند در بسیاری از مسائل دیگر دارای مزیت باشد، گفتنی است که راه حل‌های تحلیلی را همیشه نمی‌توان پیدا کرد و در بسیاری از مواقع، استفاده از

آنها بسیار مشکل و سخت است. در این موارد گاهی کاربرد روش‌های عددی مزیت دارد. خواننده می‌تواند برای بررسی جامع روش‌های تحلیلی به‌کار رفته در مسائل هدایت به مراجع ۱ و ۲ و ۱۲ و ۱۳ مراجعه کند.

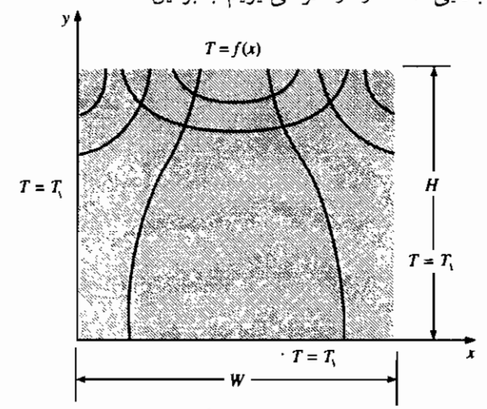
صفحه مستطیلی شکل ۳-۲ را در نظر بگیرید. دمای سه طرف صفحه ثابت و برابر T_1 بوده، بر طرف بالایی، توزیع دمایی اعمال می‌شود این توزیع به طور ساده می‌تواند دمای ثابت و یا چیزی پیچیده‌تر مثلاً یک توزیع موج سینوسی باشد. هر دو حالت را بررسی خواهیم کرد.

از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله (۳-۱) استفاده می‌کنیم. نکته اساسی در این روش، جواب معادله دیفرانسیل مزبور به شکل حاصل‌ضرب است:

$$T = XY \quad \text{در حالی که} \quad X = X(x) \quad Y = Y(y) \tag{۴-۳}$$

سپس برای تعیین شکل توابع X و Y، شرایط مرزی را به کار می‌بریم. فرض اصلی یعنی معادله (۳-۴) تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که بتوان جوابی با این شکل پیدا کرد که شرایط مرزی را برآورده سازد.

نخست شرایط مرزی توزیع دمای موج سینوسی اعمال شده بر یال بالایی صفحه را در نظر می‌گیریم. بنابر این:



شکل ۳-۲ خطوط هم‌دما و جریان گرما در صفحه مستطیلی.

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{در} \quad y = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{در} \quad x = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{در} \quad x = W \\ T &= T_m \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad \text{در} \quad y = H \end{aligned} \tag{۵-۳}$$

که T_m دامنه تابع سینوسی است. با جای‌گزینی معادله (۳-۴) در (۳-۱) داریم:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{۶-۳}$$

ملاحظه کنید که هر طرف معادله (۳-۶) مستقل از دیگری است زیرا متغیرهای x و y مستقل از هم‌اند. از این‌رو ضروری است که هر یک از طرفین، مساوی مقداری ثابت باشد. در نتیجه بر حسب این مقدار ثابت دو معادله دیفرانسیل عادی داریم،

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{۷-۳}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{۸-۳}$$

که λ^2 به ***ثابت جداسازی*** موسوم است و مقدار آن‌را باید از شرایط مرزی معین کرد. توجه داشته باشید که شکل جواب معادلات (۳-۷) و (۳-۸) به علامت λ^2 بستگی دارد؛ چنان‌چه λ^2 برابر صفر باشد شکل متفاوتی نیز نتیجه خواهد شد. تنها راه تعیین شکل صحیح، استفاده از شرایط مرزی مسأله است. از این‌رو اول تمام جواب‌های ممکن را نوشته، سپس بررسی می‌کنیم که کدام یک مناسب مسأله تحت مطالعه است.

به ازای $\lambda^2 = 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_1 + C_2 x \\ Y &= C_3 + C_4 y \\ T &= (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y) \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

این تابع نمی‌تواند مناسب شرط مرزی تابع سینوسی باشد، از این‌رو جواب $\lambda^2 = 0$ را می‌توان کنار گذاشت.

به ازای $\lambda^2 < 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x} \\ Y &= C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y \\ T &= (C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x})(C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y) \end{aligned} \tag{۱۰-۳}$$

باز هم شرط مرزی تابع سینوسی نمی‌تواند صادق باشد، پس این جواب را نیز می‌توان کنار گذاشت.

به ازای $\lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x \\ Y &= C_{11} e^{\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y} \\ T &= (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \end{aligned} \tag{۱۱-۳}$$

حال شرط مرزی تابع سینوسی صادق است؛ از این‌رو کوشش می‌کنیم که سایر شرایط صادق باشد. با جای‌گزینی:

$$\theta = T - T_1$$

جبر مسأله ساده‌تر می‌شود. در نتیجه، معادله دیفرانسیل و جواب مزبور بر حسب متغیر جدید θ هم‌شکل بوده، فقط نیاز به

تبدیل شرایط مرزی داریم. از این‌رو:

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \quad \text{در} \quad y = 0 \\ \theta &= 0 \quad \text{در} \quad x = 0 \\ \theta &= 0 \quad \text{در} \quad x = W \\ \theta &= T_m \sin\frac{\pi x}{W} \quad \text{در} \quad y = H \end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

با اعمال این شرایط داریم:

(الف) $$0 = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} + C_{12})$$

(ب) $$0 = C_9(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y})$$

(پ) $$0 = (C_9 \cos \lambda W + C_{10} \sin \lambda W)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y})$$

(ت) $$T_m \sin\frac{\pi x}{W} = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda H} + C_{12} e^{\lambda H})$$

در نتیجه:

$$C_{11} = -C_{12}$$
$$C_9 = 0$$

و از (پ) داریم:

$$0 = C_{10} C_{12} \sin \lambda W (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

و این مستلزم آن است که:

$$\sin \lambda W = 0 \tag{۱۳-۳}$$

به یاد آورید که λ ثابت جداسازی نامعین است. از معادله (۳-۱۳) برای λ چندین مقدار به‌دست می‌آید که آنها را می‌توان چنین نوشت:

$$\lambda = \frac{n\pi}{W} \tag{۱۴-۳}$$

که n عددی صحیح است. بنابراین جواب معادله دیفرانسیل فوق را می‌توان به صورت مجموعی از جواب‌ها، به ازای تمام مقادیر n، نوشت. و این مجموعه نامتناهی است. از این‌رو سری نامتناهی زیر جواب نهایی است:

$$\theta = T - T_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi y}{W} \tag{۱۵-۳}$$

که در آن ثابت‌ها ترکیب شده و جملات نمایی به تابع هیپربولیک تبدیل شده‌اند. اکنون می‌توان شرط مرزی نهایی را اعمال کرد:

$$T_m \sin\frac{\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi H}{W}$$

که مستلزم آن است که به‌ازای $n > 1$، $C_n = 0$ باشد. بنابراین جواب نهایی عبارتست از:

$$T = T_m \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{W}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi H}{W}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \tag{۱۶-۳}$$

میدان دمای این مسأله در شکل ۳-۲ نشان داده شده است. توجه کنید که خطوط جریان گرما بر منحنی‌های هم‌دما عمود هستند. اکنون مجموعه شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{در} \quad y = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{در} \quad x = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{در} \quad x = W \\ T &= T_2 \quad \text{در} \quad y = H \end{aligned}$$

با استفاده از سه شرط مرزی اولیه، جواب به شکل معادلهٔ (۳-۱۵) به‌دست می‌آید:

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi y}{W} \tag{۱۷-۳}$$

با اعمال چهارمین شرط مرزی داریم:

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi H}{W} \tag{۱۸-۳}$$

این یک سری سینوسی فوریه است و مقادیر C_n را می‌توان با بسط اختلاف دمای ثابت $T_2 - T_1$ در یک سری فوریه در بازهٔ $0 < x < W$ به‌دست آورد. این سری عبارتست از:

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{W} \tag{۱۹-۳}$$

با مقایسه معادلهٔ (۳-۱۸) و (۳-۱۹) در می‌یابیم که:

$$C_n = \frac{2}{\pi}(T_2 - T_1)\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{W}\right)}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}$$

و جواب نهایی به صورت زیر بیان می‌شود:

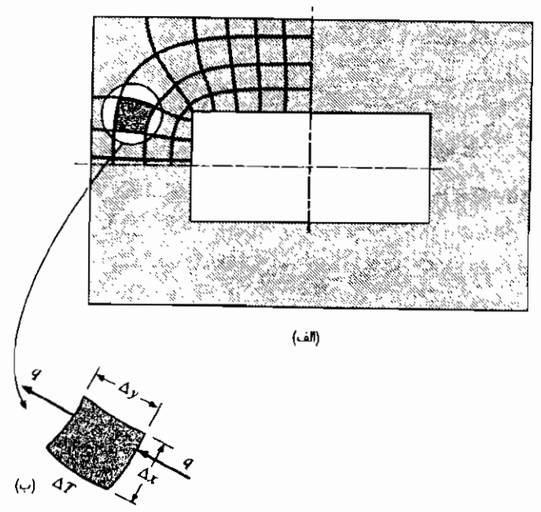
$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{W}\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{W}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{W}\right)} \tag{۲۰-۳}$$

برای مطالعهٔ همه‌جانبهٔ کاربرد روش‌های تحلیلی در انتقال گرمای هدایتی به زمینه‌ای در تئوری توابع متعامد نیازمندیم. سری‌های فوریه نمونه‌ای از توابع متعامدند و هم‌چنین‌اند توابع بسل و سایر توابع مخصوصی که در شرایط مرزی و هندسه‌های متفاوت به‌کار می‌روند. خواننده مشتاق می‌تواند به منظور کسب اطلاع بیش‌تر در این زمینه به کتاب‌های انتقال‌گرمای هدایتی مراجع فصل مراجعه کند.

❑ ۳-۳ تحلیل ترسیمی

سیستم دوبعدی شکل ۳-۳ را در نظر بگیرید. دمای سطح داخلی برابر T_1 و دمای سطح خارجی T_2 است. می‌خواهیم مقدار انتقال گرما را حساب کنیم. خطوط هم‌دما و جریان گرما را برای کمک به

این محاسبه رسم کرده‌ایم. این خطوط، گروهی از شکل‌های منحنی‌الخط را مانند شکل (۳-۳ب) تشکیل می‌دهند.



شکل ۳-۳ جزء به‌کار رفته در تحلیل مربع منحنی‌الخط جریان گرمای دو بعدی.

جریان گرما در عرض این بخش منحنی‌الخط از قانون فوریه به‌دست می‌آید. با فرض واحد بودن عمق جسم داریم:

$$q = -k\,\Delta x(1)\,\frac{\Delta T}{\Delta y} \qquad (۲۱-۳)$$

این جریان گرما در هر یک از مقاطع داخل این کوچه (منظور نوار بین دو خط جریان است. م) یکسان است و جریان گرمای کل برابر مجموع جریان‌های گرما در تمام کوچه‌ها است. اگر شکل طوری کشیده شود که در $\Delta x \cong \Delta y$ جریان گرما در عرض جزء مزبور متناسب با ΔT است و از آنجا که این جریان گرما ثابت است، ΔT در عرض هر جزء جسم داخل همان کوچه، باید یکسان باشد. بنابراین ΔT در عرض یک جزء از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{\text{کل}}}{N}$$

که N تعداد نموهای دما بین سطوح درونی و بیرونی است. به‌علاوه، جریان گرما در هر کوچه یکسان است زیرا وقتی ابعاد Δx و Δy مساوی رسم شوند، مستقل از آنهاست. بنابراین مقدار جریان گرمای کل برابر است با:

$$q = \frac{M}{N}\,k\,\Delta T_{\text{کل}} = \frac{M}{N}\,k\,(T_2 - T_1) \qquad (۲۲-۳)$$

که M تعداد کوچه‌های جریان گرما است. بنابراین برای محاسبه مقدار انتقال گرما فقط به رسم این مربع - منحنی‌الخط‌ها و شمارش تعداد نموهای دما و کوچه‌های جریان گرما نیازمندیم. باید دقت کرد که در این ترسیم $\Delta x \approx \Delta y$ و خطوط بر هم عمود باشند. تعداد نموهای دما بین سطوح داخلی و خارجی برای مقطع گوشه‌ای شکل (۳-۳الف) برابر $M = ۸/۲$ ارزیابی می‌شود. کل تعداد خطوط جریان گرما چهار برابر این مقدار است، $۴ \times ۸/۲ = ۳۲/۸$. پس نسبت $\frac{M}{N}$ برای کل مقطع دیوار برابر $\frac{۳۲/۸}{۴} = ۸/۲$ است. از این نسبت در بحث‌های بعدی با **ضریب شکل هدایتی** نام می‌بریم.

دقت این روش کاملاً به مهارت شخص ترسیم کننده مربع‌های منحنی‌الخط بستگی دارد. گرچه، حتی یک ترسیم خام می‌تواند گاهی در ارزیابی نسبتاً خوب دماهای داخل جسم به ما کمک کند. برای ترسیم مربع‌های منحنی‌الخط می‌توان از تشابه الکتریکی، مطابق بحث بخش ۳-۹ استفاده کرد. از روش ترسیمی فوق عمدتاً برای نشان دادن رابطه کوچه‌های جریان گرما و هم‌دماها استفاده می‌شود. نمی‌توان انتظار حل بسیاری از مسائل عملی رااز آن داشت.

❑ ۳-۴ ضریب شکل در هدایت

ضریب شکل در هدایت S، سیستمی دو بعدی که دو حد دمایی دارد را می‌توان به‌نحوی تعریف کرد که:

$$q = kS\,\Delta T_{\text{کل}} \qquad (۲۳-۳)$$

مقدار S تعدادی از شکل‌ها در جدول ۳-۱ آورده شده است. خلاصهٔ بسیار جامعی از ضرایب شکل اشکال مختلف هندسی توسط هاهنه *Haine* و گریگول *Grigull* [۱۸و ۲۳] داده شده‌اند. توجه داشته باشید که عکس کسینوس هیپربولیک را می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$\cosh^{-1} x = Ln\,(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

برای محاسبه جریان در یال و گوشه‌های دیواری سه بعدی، مثل کوره، از ضرایب شکل جداگانه‌ای استفاده می‌شود. وقتی که تمام ابعاد داخلی از یک‌پنجم ضخامت دیوار بزرگ‌تر باشند:

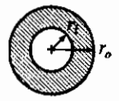
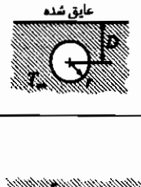
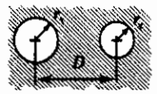
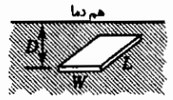
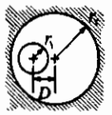
$$S_{\text{دیوار}} = \frac{A}{L} \qquad S_{\text{یال}} = ۰/۵۴D \qquad S_{\text{گوشه}} = ۰/۱۵L$$

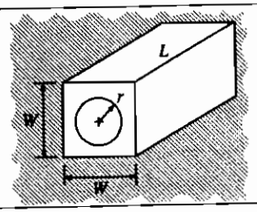
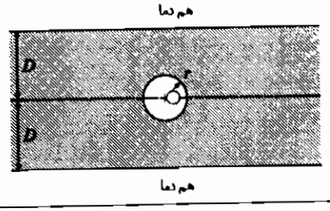
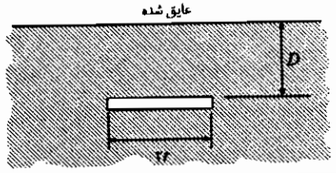
که A مساحت دیوار و L ضخامت دیوار و D طول یال است. این ابعاد در شکل ۳-۴ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که وقتی از روش مربع‌های منحنی‌الخط در محاسبات استفاده می‌شود، ضریب شکل به‌ازای واحد عمق به صورت نسبت $\frac{M}{N}$ داده می‌شود.

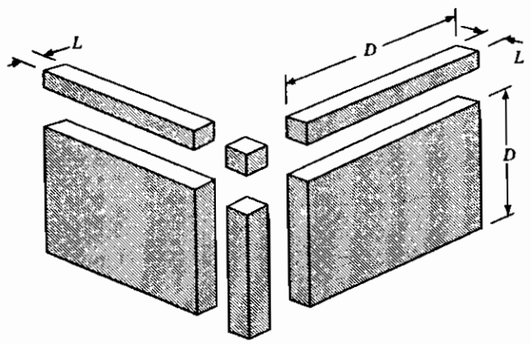
☑ **جدول ۳-۱** ضرایب شکل در هدایت، جمع‌آوری شده از مراجع ۶ و ۷

توجه: اختلاف دما برای اجسام دفن شده برابر $\Delta T = T_{\text{چشم}} - T_{\text{میدان دور}}$ دمای میدان دور برابر دمای سطح هم دمای محیط نیمه محدود است.

سیستم فیزیکی	شکل شماتیکی	ضریب شکل	محدودیت‌ها
استوانه هم‌دما به شعاع r دفن شده در محیطی نیمه بی‌نهایت با سطح هم‌دما	هم‌دما	$\frac{۲\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{r}\right)}$	$L >r$
		$\frac{۲\pi L}{\ln\left(\frac{D}{r}\right)}$	$L >r$ $D>۳r$
کره هم‌دما به شعاع r دفن شده در محیطی بی‌نهایت		$۴\pi r$	
کره هم‌دما به شعاع r دفن شده در محیطی نیمه بی‌نهایت با سطح هم‌دما $\Delta T = T_{\text{سطح}} - T_{\text{میدان دور}}$	هم‌دما	$\frac{۴\pi r}{۱ - \frac{r}{۲D}}$	
هدایت میان دو استوانه هم‌دما به‌طول L در محیطی نامتناهی دفن شده		$\frac{۲\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{۲r_1 r_2}\right)}$	$L >r$ $L >D$
مکعب توخالی به ضلع L، در محیط نیمه بی نهایت		$۸/۲۴L$	
استوانه هم‌دما به شعاع r دفن شده در محیطی نیمه بی‌نهایت مطابق شکل	هم‌دما	$\frac{۲\pi L}{\ln\left(\frac{۲L}{r}\right)}$	$L >۲r$
متوازی‌السطوح هم‌دما دفن شده در محیطی نیمه بی‌نهایت با سطح هم‌دما	هم‌دما	$۱/۶۸۵L\left[log\left(۱ + \frac{b}{a}\right)\right]^{-۰/۵۹}\left(\frac{b}{c}\right)^{-۰/۰۷۸}$ رک. به مرجع ۷	
دیوار تخت		$\frac{A}{L}$ جریان گرمای یک بعدی	

استوانه‌ای تو خالی، طول L		$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$	$L >> r$
کره تو خالی		$\frac{4\pi r_o r_i}{r_o - r_i}$	
دیسک افقی نازک دفن شده در محیطی نیمه بی‌نهایت با سطح هم‌دما		$4r$ $8r$ $\frac{4\pi r}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{r}{2D}\right)}$ به رادیان $\tan^{-1}\left(\frac{r}{2D}\right)$	$D = 0$ $D >> 2$ $\frac{D}{2r} > 1$
نیم‌کره دفن شده در محیط نیمه بی‌نهایت $\Delta T = T_{\text{کره}} - T_{\text{میدان دور}}$		$2\pi r$	
کره هم‌دما دفن شده در محیطی نیمه بی‌نهایت با سطح عایق		$\frac{4\pi r}{1 + \frac{r}{2D}}$	
دو کرهٔ هم‌دما دفن شده در محیط بی نهایت		$\frac{4\pi r_2}{\frac{r_2}{r_1}\left[1 - \frac{\left(\frac{r_1}{D}\right)^4}{1 - \left(\frac{r_2}{D}\right)^4}\right] - \frac{2r_2}{D}}$	$D > 5r_{\max}$
صفحه مستطیلی نازک به طول L دفن شده در محیط نیمه بی‌نهایت با سطح هم‌دما		$\frac{\pi W}{\ln\left(\frac{4W}{L}\right)}$ $\frac{2\pi W}{\ln\left(\frac{4W}{L}\right)}$ $\frac{2\pi W}{\ln\left(\frac{2\pi D}{L}\right)}$	$D = 0$ $W > L$ $D >> W$ $W > L$ $W >> L$ $D > 2W$
دیسک‌های موازی دفن شده در محیط بی‌نهایت		$\frac{4\pi r}{\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{r}{D}\right)\right]}$ به رادیان $\tan^{-1}\left(\frac{r}{D}\right)$	$D > 5r$
استوانه‌های خارج از مرکز به طول L		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L >> r_2$

استوانه قرار گرفته در مرکز مکعب به طول L		$\frac{2\pi L}{\ln\left(0/54\,\frac{W}{r}\right)}$	$L >> W$
استوانه افقی به طول L دفن شده در صفحه بی‌نهایت		$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4D}{r}\right)}$	
دیسک افقی نازک دفن شده در محیط نیمه بی نهایت با سطح بی در رو $\Delta T = T_{\text{دیسک}} - T_{\text{میدان دور}}$		$\frac{4\pi r}{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{r}{2D}\right)}$	$\frac{D}{2r} > 1$ به رادیان $\tan^{-1}\left(\frac{r}{2D}\right)$



شکل ۳-۴ شکلی که ابعاد به کار رفته در محاسبه ضرایب شکل سه بعدی را نشان می‌دهد.

مثال ۳-۱ لوله دفن شده

لوله‌ای به قطر ۱۵ cm و طول ۴ متر در خاک و در عمق ۲۰ cm دفن شده است. دمای دیواره لوله برابر ۷۵ °C و دمای سطح خاک ۵ °C است. به فرض ضریب هدایت گرمایی خاک $0/8\,\frac{W}{m \cdot °C}$ باشد، گرمای تلف‌شده از لوله را حساب کنید.

حل :

می‌توانیم برای محاسبه ضریب شکل این وضعیت از معادله جدول ۳-۱ استفاده کنیم. چون:

$D < 3r$:

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{r}\right)} = \frac{2\pi(4)}{\cosh^{-1}\left(\frac{20}{7/5}\right)} = 15/35 \text{ m}$$

جریان گرما را می‌توان از معادله زیر حساب کنید:

$$q = kS\,\Delta T = (0/8)(15/35)(75 - 5)$$
$$= 859/6\ W \left[2933\ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

مثال ۳-۲

کوره مکعبی کوچکی به ابعاد داخلی $50 \times 50 \times 50$ cm سانتی‌متر از آجرنسوز $\left[k = 1/04 \frac{W}{m \cdot °C}\right]$ ساخته شده است و ضخامت دیوار برابر ۱۰ cm است. دمای داخلی کوره ۵۰۰ °C و دمای بیرون آن ۵۰ °C است. اتلاف گرما از دیواره‌ها را حساب کنید.

حل :

ضریب شکل کل را با جمع ضرایب شکل دیوارها، یال‌ها و گوشه‌ها حساب می‌کنیم:

دیواره‌ها: $S = \frac{A}{L} = \frac{(0/5)(0/5)}{0/1} = 2/5 \text{ m}$

یال‌ها: $S = 0/54D = (0/54)(0/5) = 0/27 \text{ m}$

گوشه‌ها: $S = 0/15L = (0/15)(0/1) = 0/015 \text{ m}$

شش دیوار، دوازده یال و هشت گوشه وجود دارد. بنابراین ضریب شکل کل برابر است با:

$$S = (6)(2/5) + (12)(0/27) + (8)(0/015) = 18/36 \text{ m}$$

و جریان گرما به صورت زیر حساب می‌شود:

$$q = kS\,\Delta T = (1/04)(18/36)(500 - 50)$$
$$= 8/592\ kW \left[29/320\ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

مثال ۳-۳ دیسک دفن شده

دیسکی به قطر ۳۰ cm و دمای ۹۵ °C در عمق ۱/۰ m در محیطی نیمه بی‌نهایت دفن شده دارای سطح هم‌دما به دمای ۲۰ °C و ضریب هدایت گرمایی $۲/۱ \frac{W}{m.°C}$ است. کل اتلاف گرما از دیسک را حساب کنید.

حل :

این کاربردی از رابطه $q = kS\Delta T$ ضریب شکل در هدایت است. با مراجعه به جدول ۳-۱ سه رابطه برای S دیسک دفن شده در محیط نیمه بی‌نهایت با سطح هم‌دما پیدا می‌کنیم. روشن است که $D \neq ۰$ و D در مقایسه با $۲r$ بزرگ نیست. پس رابطه ضریب شکل مورد $\frac{D}{۲r} > ۱/۰$ را انتخاب می‌کنیم.

$$S = \frac{۴\pi r}{\left[\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\left(\frac{r}{۲D}\right)\right]}$$

توجه کنید که فرق این رابطه با رابطه مربوط به سطح عایق در علامت منها در مخرج کسر است. با قرار دادن $r = ۰/۱۵$ m و $D = ۱/۰$ m داریم:

$$S = \frac{۴\pi(۰/۱۵)}{\left[\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\left(\frac{۰/۱۵}{۲}\right)\right]} = \frac{۴\pi(۰/۱۵)}{\left[\frac{\pi}{۲} - ۰/۰۷۴۸۶\right]} = ۱/۲۶ \text{ m}$$

ضریب شکل اجسام دفن شده بر اساس زمین دور $\Delta T = T_{جسم} - T_{\infty}$ داده می‌شود. دمای زمین دور را همان دمای سطح هم‌دما می‌گیریم و گرمای تلف‌شده از دیسک را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$q = kS\Delta T = (۲/۱)\ (۱/۲۶)\ (۹۵ - ۲۰) = ۱۹۸/۴۵\ W$$

مثال ۳-۴ دیسک‌های موازی دفن شده

دو دیسک به قطر ۵۰ cm به فاصله ۱/۵ m در محیطی بی‌نهایت به $k = ۲/۴ \frac{W}{m.°C}$ جدا از هم دفن شده است. دمای یکی از دیسک‌ها ۸۰ °C و دمای دیگری ۲۰ °C است. انتقال گرما بین دو دیسک را بیابید.

حل :

این مسأله ضریب شکل است و انتقال گرما را می‌توان از رابطهٔ زیر حساب کرد

$$q = kS\ \Delta\ T$$

که S از جدول ۳-۱ چنین حساب می‌شود:

به ازای $D > ۵r$

$$S = \frac{۴\pi r}{\left[\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\left(\frac{r}{D}\right)\right]}$$

به‌ازای $r = ۰/۲۵$ m و $D = ۱/۵$ m داریم:

$$S = \frac{۴\pi(۰/۲۵)}{\left[\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\left(\frac{۰/۲۵}{۱/۵}\right)\right]} = \frac{۴\pi(۰/۲۵)}{\left[\frac{\pi}{۲} - ۰/۱۶۵\right]} = ۲/۲۳۵$$

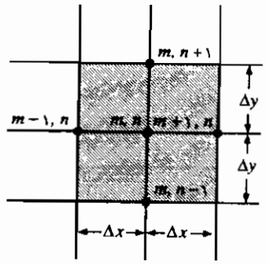
و :

$$q = kS\Delta T = (۲/۳)(۲/۲۳۵)(۸۰ - ۲۰) = ۳۰۸/۴\ \text{W}$$

☐ ۳-۵ روش تحلیل عددی

در صد سال گذشته راه‌حل‌های تحلیلی بسیاری برای مسائل انتقال گرمای هدایتی گردآوری شده است. هنوز هم در بسیاری از موارد عملی، هندسه یا شرایط مرزی طوری است که اصلاً راه حل تحلیلی به‌دست نیامده، یا اگر به‌دست آمده آن‌چنان جواب پیچیده‌ای دارد که ارزیابی عددی را بسیار مشکل می‌کند. در این موارد بهترین روش حل مسأله بر پایه روش‌های تفاضل محدود است که اصول اساسی آن‌را در این بخش مورد بررسی قرار می‌دهیم.

جسمی دو بعدی را در نظر بگیرید که باید مطابق شکل ۳-۵ به دو نمو مساوی در جهت x و y تقسیم شود. نقاط گره‌ای مطابق شکل مشخص شده‌اند که m محل نشان دهنده نمو x و n محل نشان دهنده نمو y است. می‌خواهیم دما در هر یک از این نقاط گره داخل جسم را با استفاده از معادله حاکمه (۳-۱) به‌دست آوریم. برای تقریب زدن نموهای دیفرانسیلی مختصات دما و مکان از تفاضل‌های محدود استفاده می‌کنیم؛ و هر چه این نموهای محدود کوچک‌تر انتخاب شود، تقریب توزیع دمای واقعی دقیق‌تر می‌شود.



شکل ۳-۵ شکلی که نام‌گذاری در تحلیل عددی دو بعدی هدایت گرما را نشان می‌دهد.

گرادیان دما را می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m+\frac{۱}{۲},n} \approx \frac{T_{m+۱,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m-\frac{۱}{۲},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-۱,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n+\frac{۱}{۲}} \approx \frac{T_{m,n+۱} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n-\frac{۱}{۲}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-۱}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m+\frac{۱}{۲},n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m-\frac{۱}{۲},n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+۱,n} + T_{m-۱,n} - ۲T_{m,n}}{(\Delta x)^۲}$$

$$\left.\frac{\partial^۲ T}{\partial y^۲}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n+\frac{۱}{۲}} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n-\frac{۱}{۲}}}{(\Delta)} = \frac{T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱} - ۲T_{m,n}}{(\Delta y)^۲}$$

بنابراین تقریب تفاضل محدود برای معادله (۳-۱) چنین است:

$$\frac{T_{m+۱,n} + T_{m-۱,n} - ۲T_{m,n}}{(\Delta x)^۲} + \frac{T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱} - ۲T_{m,n}}{(\Delta y)^۲} = ۰$$

اگر $\Delta x = \Delta y$ باشد داریم:

$$T_{m+۱,n} + T_{m-۱,n} + T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱} - ۴T_{m,n} = ۰ \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

چون در حال بررسی ضریب مورد با هدایت ثابت هستیم، جریان گرماها را می‌توان بر حسب دیفرانسیل‌های دما بیان کرد. از معادلهٔ (۳-۲۴) به‌سادگی مشخص می‌شود. که جریان گرمای خالص ورودی در هر نقطه، در شرایط حالت پایدار برابر صفر است. در واقع در روش تفاضل محدود به‌جای توزیع دمای پیوسته از میله‌های هادی گرمای تصوری استفاده می‌شود که نقاط گره کوچک را به‌هم وصل می‌کنند و تولید گرما نمی‌کنند.

برای به حساب آوردن تولید گرما نیز می‌توانیم از طرح تفاضل محدود استفاده کنیم. در این حالت فقط عبارت $\frac{\dot{q}}{k}$ را به معادله عمومی اضافه کرده، داریم:

$$\frac{T_{m+۱,n} + T_{m-۱,n} - ۲T_{m,n}}{(\Delta x)^۲} + \frac{T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱} - ۲T_{m,n}}{(\Delta y)^۲} + \frac{\dot{q}}{k} = ۰$$

از این رو برای شبکهٔ مربعی که در آن $\Delta x = \Delta y$ است داریم:

$$T_{m+۱,n} + T_{m-۱,n} + T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱} + \frac{\dot{q}(\Delta x)^۲}{k} - ۴T_{m,n-۱} = ۰ \qquad (۲۴\text{-}۳\text{الف})$$

برای استفاده از روش عددی باید معادله (۳-۲۴) را برای هر گره داخل جسم نوشته، دستگاه معادلات حاصل را برای به‌دست آوردن دما در گره‌های مختلف حل کرد. نمونه بسیار ساده در شکل ۳-۶ نشان داده شده است، چهار معادله مربوط به گره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چنین است:

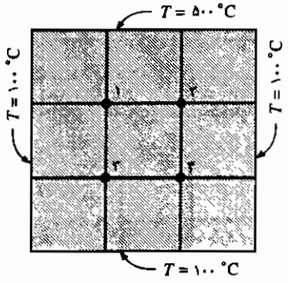
$$۱۰۰ + ۵۰۰ + T_۲ + T_۳ - ۴T_۱ = ۰$$
$$T_۱ + ۵۰۰ + ۱۰۰ + T_۴ - ۴T_۲ = ۰$$
$$۱۰۰ + T_۱ + T_۴ + ۱۰۰ - ۴T_۳ = ۰$$
$$T_۳ + T_۲ + ۱۰۰ + ۱۰۰ - ۴T_۴ = ۰$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق داریم:

$$T_۱ = T_۲ = ۲۵۰\ ^\circ\text{C} \qquad T_۳ = T_۴ = ۱۵۰\ ^\circ\text{C}$$

البته، بنا به تقارن $T_۱ = T_۲$ و $T_۳ = T_۴$ بوده، آن‌وقت تنها به دو معادله گره نیاز داریم:

$$۱۰۰ + ۵۰۰ + T_۳ - ۳T_۱ = ۰$$
$$۱۰۰ + T_۱ + ۱۰۰ - ۳T_۳ = ۰$$



شکل ۳-۶ مسأله ۴ گره.

وقتی دماها معین شد می‌توان جریان گرما را از معادله زیر حساب کرد:

$$q = \sum k\ \Delta x\ \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

که ΔT در مرزها در نظر گرفته شده است. در مثال فوق می‌توان جریان گرما را در وجه با دمای ۵۰۰ °C و یا در سه وجه با دمای ۱۰۰ °C حساب کرد. اگر از شبکه به حد کافی ریز استفاده کنیم دو مقدار به‌دست آمده تقریباً مساوی خواهند بود. به‌طور کلی معمولاً بهتر است متوسط حسابی دو مقدار مزبور را در محاسبات به‌کار ببریم. در مثال فوق این دو محاسبه چنین است:

در وجه با دمای ۵۰۰ °C:

$$q = -k\ \frac{\Delta y}{\Delta x}\left[(۲۵۰ - ۵۰۰) + (۲۵۰ - ۵۰۰)\right] = ۵۰۰\ k$$

در وجه با دمای ۱۰۰ °C:

$$q = -k\ \frac{\Delta y}{\Delta x}\left[(۲۵۰ - ۱۰۰) + (۱۵۰ - ۱۰۰) + (۱۵۰ - ۱۰۰) + (۲۵۰ - ۱۰۰) + (۱۵۰ - ۱۰۰) + (۱۵۰ - ۱۰۰)\right] = -۵۰۰k$$

و در این مورد، دو مقدار با هم می‌خوانند. محاسبه جریان گرما برای مواردی که مرزها منحنی بوده، یا شکل پیچیده دارند در مراجع ۲، ۳ و ۱۵ انجام شده است.

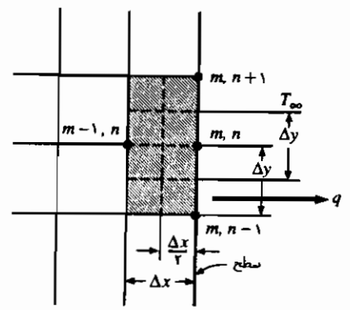
وقتی جسم صلب یک شرط مرزی جابه‌جایی دارد، دماها در سطح را باید با روشی متفاوت با آنچه در بالا گفته شد محاسبه کرد. مرز نشان داده شده در شکل ۳-۷ را در نظر بگیرید. توازن انرژی در گره (m,n) چنین است:

$$-k\Delta y\ \frac{T_{m,n} - T_{m-۱,n}}{\Delta x} - k\ \frac{\Delta x}{۲}\ \frac{T_{m,n} - T_{m,n+۱}}{\Delta y} - k\ \frac{\Delta x}{۲}\ \frac{T_{m,n} - T_{m,n+۱}}{\Delta y} = h\Delta y(T_{m,n} - T_\infty)$$

اگر $\Delta x = \Delta y$ باشد دمای مرزی از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$T_{m,n}\left(\frac{h\Delta x}{k} + ۲\right) - \frac{h\ \Delta x}{k}\ T_\infty - \frac{۱}{۲}\left(۲T_{m-۱,n} + T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱}\right) = ۰ \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

معادله‌ای از این نوع را باید برای هر گره در طول سطح نشان داده شده در شکل ۳-۷ نوشت. بنابراین وقتی شرط مرزی جابه‌جایی وجود داشته باشد، معادله (۳-۲۵) را در مرز به‌کار برده، از معادله‌ای مثل معادله (۳-۲۴) برای نقاط داخلی استفاده می‌کنیم.



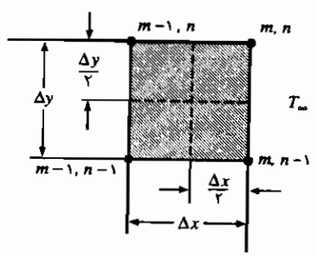
شکل ۳-۷ نام‌گذاری برای معادله گرهی با شرط مرزی جابه‌جایی.

از معادله (۳-۲۵) برای سطح تختی که دارای مرز جابه‌جایی است استفاده می‌شود و از آن در وضعیت‌های دیگر، مثلاً در مورد دیوار عایق و یا گوشهٔ بامرز جابه‌جایی استفاده نمی‌شود. گوشهٔ شکل ۳-۸ را درنظر بگیرید. توازن انرژی برای گوشه مزبور چنین است:

$$-k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_{m,n}-T_{m-1,m}}{\Delta x}-k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n}-T_{m,n-1}}{\Delta y}=h\frac{\Delta x}{2}(T_{m,n}-T_\infty)+h\frac{\Delta y}{2}(T_{m,n}-T_\infty)$$

اگر $\Delta x = \Delta y$ باشد:

$$2T_{m,n}\left(\frac{h\,\Delta x}{k}+1\right)-2\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty-(T_{m-1,n}+T_{m,n-1})=0 \qquad (۳-۲۶)$$



شکل ۳-۸ نام‌گذاری برای معادله گرهی با هدایت در گوشه.

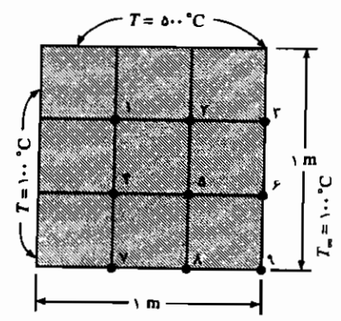
سایر شرایط مرزی را می‌توان به طریقی مشابه بررسی کرد. برای وضعیت‌های مرزی و هندسی مختلف، خلاصه ساده‌ای از معادلات گرهی در جدول ۳-۲ آورده شده است. به وضعیت‌های ج و چ توجه خاص می‌شود زیرا معادلات محاسباتی‌ای در آنها عرضه می‌شود که در مرزهای منحنی به‌کار می‌روند در حالی‌که باز هم نموهای Δx و Δy در آنها یکنواخت‌اند.

مثال ۳-۵ مسئله نُه گره

مربع شکل ۳-۹ را درنظر بگیرید. دمای وجه سمت چپ برابر ۱۰۰ °C و از وجه فوقانی ۵۰۰ °C است، در حالی‌که دو وجه دیگر در معرض محیطی به دمای ۱۰۰ °C قرار دارند:

$$k = ۱۰\ \frac{W}{m.°C} \quad , \quad h = ۱۰\frac{W}{m^۲.°C}$$

بلوک مزبور مربعی به ضلع یک متر است. دمای گره‌های مختلف در شکل ۳-۹ و جریان گرماها در مرزها را حساب کنید.



شکل ۳-۹ نام‌گذاری برای مثال ۳-۵.

حل :

معادله گرهی برای گره‌های ۱ و ۲ و ۴ و ۵ چنین است:

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=0$$

معادله مربوط به گره‌های ۳ و ۶ و ۷ و ۸ به صورت معادله (۳-۲۵) بوده و معادله مربوط به گره ۹ نیز به صورت معادله (۳-۲۶) است:

$$\frac{h\Delta x}{k}=\frac{(۱۰)(۱)}{(۳)(۱۰)}=\frac{۱}{۳}$$

پس معادلات مربوط به گره‌های ۳ و ۶ چنین است:

$$2T_۲+T_۶+۵۶۷-۴/۶۷T_۳=0$$

$$2T_۵+T_۳+T_۹+۶۷-۴/۶۷T_۶=0$$

معادلات مربوط به گره‌های ۷ و ۸ چنین است:

$$2T_۴+T_۸+۱۶۷-۴/۶۷T_۷=0$$

$$2T_۵+T_۷+T_۹+۶۷-۴/۶۷T_۸=0$$

و معادله مربوط به گره ۹ :

$$T_۶+T_۸+۶۷-۲/۶۷T_۹=0$$

از این‌رو ۹ معادله و ۹ دمای گرهی مجهول داریم. روش‌های حل را مختصراً بحث می‌کنیم ولی در حال حاضر تنها جواب‌ها را فهرست می‌کنیم:

گره	دمای گره °C
۱	۲۸۰/۶۷
۲	۳۳۰/۳۰
۳	۳۰۹/۳۸
۴	۱۹۲/۳۸
۵	۲۳۱/۱۵
۶	۲۱۷/۱۹
۷	۱۵۷/۷۰
۸	۱۸۴/۷۱
۹	۱۷۵/۶۲

جریان گرماها در مرزها به دو روش محاسبه می‌شود: به صورت جریان‌های هدایتی برای وجه‌های با دمای ۱۰۰ °C و ۵۰۰ °C و به صورت جریان‌های جابه‌جایی برای دو وجه دیگر. برای وجه با دمای ۵۰۰ °C، جریان گرما **به‌داخل** وجه برابر است با:

$$q=\sum k\,\Delta x\frac{\Delta T}{\Delta y}=(۱۰)\left[۵۰۰-۲۸۰/۶۷+۵۰۰-۳۳۰/۳۰+(۵۰۰-۳۰۹/۳۸)\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]=۴۸۴۳/۴\ \frac{W}{m}$$

$$q=\sum k\,\Delta y\frac{\Delta T}{\Delta x}=(۱۰)\left[۲۸۰/۶۷-۱۰۰+۱۹۲/۳۸-۱۰۰+(۱۵۷/۷۰-۱۰۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]=۳۰۱۹\ \frac{W}{m}$$

جریان گرمای **خارج شده** از وجه دست راست از رابطه جابه‌جایی به‌دست می‌آید:

$$q=\sum h\,\Delta y\,(T-T_\infty)=(۱۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[۳۰۹/۳۸-۱۰۰+۲۱۷/۱۹-۱۰۰+(۱۷۵/۶۲-۱۰۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]=۱۲۱۴/۶\ \frac{W}{m}$$

و بالاخره جریان گرمای خارج شده از وجه تحتانی برابر است با:

$$q=\sum h\,\Delta x(T-T_\infty)=(۱۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[۱۰۰-۱۰۰\left(\frac{۱}{۲}\right)+۱۵۷/۷۰-۱۰۰+۱۸۴/۷۱-۱۰۰+(۱۷۵/۶۲-۱۰۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]=۶۰۰/۷\ \frac{W}{m}$$

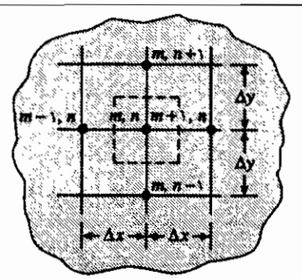
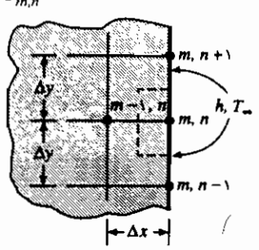
کل جریان گرمای خارج شده برابر است با:

$$q_{\text{خروجی}}=۳۰۱۹+۱۲۱۴/۶+۶۰۰/۷=۴۸۳۴/۳\frac{W}{m}$$

این مقدار تفاوت چندانی با $۴۸۴۳/۴\ \frac{W}{m}$ که به وجه فوقانی هدایت شده، ندارد.

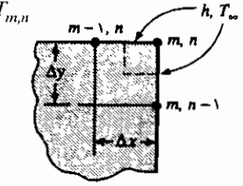
و جریان گرمای **خارج شده** از وجه با دمای ۱۰۰ °C برابر است با:

☑ **جدول ۳-۲** خلاصه‌ای از فرمول‌های گرهی برای محاسبات تفاضل محدود (خط چین‌ها حجم جزئی را نشان می‌دهد.)✣

موقعیت فیزیکی	معادلات گرهی برای نموهای مساوی در x و y (معادلهٔ دوم در هر وضعیت به شکل تکرار گوس-سایدل است)
(الف) گره داخلی	 $۰=T_{m+1,n}+T_{m,n+1}+T_{m-1,n}+T_{m,n-1}-۴T_{m,n}$ $T_{m,n}=\frac{(T_{m+1,n}+T_{m,n+1}+T_{m-1,n}+T_{m,n-1})}{۴}$
(ب) گره مرز جابه‌جایی	 $۰=\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty+\frac{۱}{۲}(۲T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1})-\left(\frac{h\,\Delta x}{k}+۲\right)T_{m,n}$ $T_{m,n}=\frac{T_{m-1,n}+\frac{T_{m,n+1}+T_{m,n-1}}{۲}+Bi\ T_\infty}{۲+Bi}$ $Bi=\frac{h\Delta x}{k}$

(پ) گوشهٔ بیرونی با مرز جابه‌جایی

$$0 = 2\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) - 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n}$$

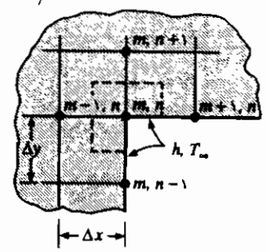


$$T_{m,n} = \frac{\frac{T_{m-1,n} + T_{m,n-1}}{2} + Bi\,T_\infty}{1 + Bi}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k}$$

(ت) گوشه داخلی با مرز جابه‌جایی

$$0 = 2\frac{h\Delta x}{k}T_\infty + 2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} - 2\left(3 + \frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n}$$

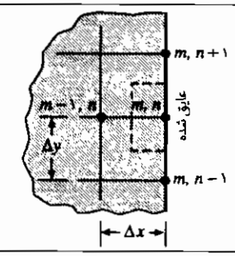


$$T_{m,n} = \frac{Bi\,T_\infty + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + \frac{T_{m+1,n} + T_{m,n-1}}{2}}{3 + Bi}$$

$$Bi = \frac{h\,\Delta x}{k}$$

(ث) مرز عایق‌شده

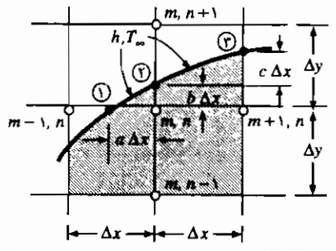
$$0 = T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n}$$



$$T_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n}}{4}$$

(ج) گره داخلی نزدیک مرز منحنی ✤

$$0 = \frac{2}{b(b+1)}T_2 + \frac{2}{a+1}T_{m+1,n} + \frac{2}{b+1}T_{m,n-1} + \frac{2}{a(a+1)}T_1 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)T_{m,n}$$



(چ) گره مرزی با جابه‌جایی در طول مرز منحنی - گره ۲ برای (ج) بالا §

$$0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}T_1 + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}}T_3 + \frac{a+1}{b}T_{m,n} + \frac{h\Delta x}{k}\left(\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}\right)T_\infty - \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+1}{b} + \left(\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}\right)\frac{h\,\Delta x}{k}\right]T_2$$

✢ مرز جابه‌جایی را می‌توان با قرار دادن $h = o\ (Bi = 0)$ به سطح عایق‌شده تبدیل کرد.

✤ این معادله را می‌توان با ضرب فرمول مقاومت در $\frac{2}{(a+1)(b+1)}$ به‌دست آورد.

§ این رابطه از تقسیم فرمول مقاومت بر ۲ به‌دست می‌آید.

روش‌های حل :

از بحث قبل متوجه شدیم که به‌طور ساده، روش عددی وسیله‌ای برای تقریب زدن توزیع دمای پیوسته با اجزای گرهی محدود است. هر چه تعداد گره‌ها بیش‌تر باشد تقریب نزدیک‌تر است؛ ولی هر چه تعداد معادلات بیش‌تر باشد البته حل مسأله مشکل‌تر است. خوشبختانه با کامپیوترها و حتی ماشین‌های حساب قابل برنامه‌ریزی می‌توان مسأله را زود حل کرد.

در مسائل عملی، انتخاب تعداد زیاد گره به‌علت عدم اطمینان در شرایط مرزی، غیر ضروری است. مثلاً وجود حدود ۱۵ ± تا ۲۰ درصد خطا در ضریب جابه‌جایی h غیر عادی نیست.

معادلات گرهی را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \ldots + a_{1n}T_n &= C_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \ldots &= C_2 \\ a_{31}T_1 + \ldots &= C_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}T_1 + a_{n2}T_2 + \ldots + a_{nn}T_n &= C_n \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

که T_1 و T_2 و ... و T_n دماهای گره‌ای مجهول می‌باشند. با استفاده از نشانگان ماتریسی:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots \\ a_{31} \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix} \qquad [T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n \end{bmatrix}$$

معادله (۳-۲۷) را می‌توان چنین بیان کرد:

$$[A][T] = [C] \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

و مسأله عبارتست از یافتن معکوس $[A]$ به‌طوری که:

$$[T] = [A]^{-1}[C] \qquad (۳\text{-}۲۹)$$

که $[A]^{-1}$ چنین است:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11}\ b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\ b_{n2} \ldots b_{nn} \end{bmatrix}$$

دماهای مجهول نهایی به‌شکل بسط‌یافتهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} T_1 &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \ldots + b_{1n}C_n \\ T_2 &= b_{21}C_1 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_n &= b_{n1}C_1 + b_{n2}C_2 + \ldots + b_{nn}C_n \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۰)$$

واضح است که هر چه تعداد گره‌ها بیش‌تر باشد، حتی با کمک کامپیوتر سرعت زیاد نیز، راه‌حل پیچیده‌تر و وقت‌گیرتر است. در بسیاری از مسائل مربوط به هدایت تعداد زیادی عضو صفر در ماتریس مذکور وجود دارد و روش فوق را می‌توان ساده کرد. مثلاً نشانگان ماتریسی مربوط به دستگاه مثال ۳-۵ چنین است:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4/67 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4/67 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4/67 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4/67 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2/67 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ -500 \\ -567 \\ -100 \\ 0 \\ -67 \\ -167 \\ -67 \\ -67 \end{bmatrix}$$

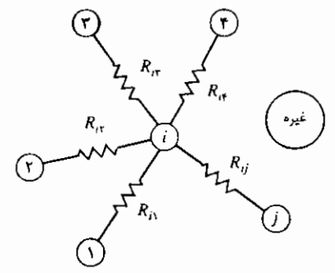
ملاحظه می‌شود که به علت ساختار معادلات، ماتریس ضرایب خیلی تُنُک است. به این دلیل، روش‌های تکراری می‌توانند خیلی مؤثر باشندپ. احتمالاً روش گوس سایدل *Gauss - Seidel* بیش‌تر از همه برای حل این معادلات در مسائل انتقال گرما به‌کار می‌رود و این روش را در بخش ۳-۷ بحث خواهیم کرد.

در سایر راه‌حل‌ها ،تحلیلی‌گذرا وجود دارد که به حالت پایدار (فصل چهارم را ببینید)، حذف مستقیم [حذف گوس (۹)]، یا روش‌های تکراری مشکل‌تر [۱۴] منتهی می‌شود. برای حل مسائل انتقال گرما می‌توان از برنامه‌های کامپیوترهای بزرگ موجود استفاده کرد. کرن *Kern* و کراوس *Kraus* [۱۹] برنامه حالت پایدار و برنامه حالت‌گذرا را ارائه کرده‌اند که تا ۳۰۰ گره را مورد بررسی قرار می‌دهد. در مرجع ۱۷ برنامهٔ تحلیل مدار کلی قابل استفاده در مسائل انتقال گرما آمده است و اغلب مراکز کامپیوتری بزرگ نوعی برنامه محلی قابل استفاده در محاسبات انتقال گرما دارند. برای کسب اطلاع بیش‌تر در زمینه روش‌های عددی به مراجع ۱۱ تا ۱۹ و ۲۴ تا ۲۷ مراجعه کنید.

❑ ۳-۶ فرمول‌بندی عددی برحسب اجزای مقاومت

نشان دادیم که چگونه می‌توان مسائل مربوط به هدایت را با تقریب تفاضل محدود در معادلات دیفرانسیلی حل کرد. برای هر گره یک معادله گره و برای دماها در جسم یک سری معادله فرمول‌بندی شد. می‌توانستیم در فرمول‌بندی معادلات فوق از مفهوم مقاومت برای نوشتن انتقال گرما در بین گره‌ها استفاده کنیم. اگر گره مورد نظر را با

زیرنویس i و گره‌های اتصالی را با زیرنویس j مشخص کنیم، موقعیت گره - هدایت عمومی شکل ۳-۱۰ را خواهیم داشت.



شکل ۳-۱۰ گره هدایت عمومی.

مقدار گرمای خالص داده شده به گره i در حالت پایدار باید برابر صفر باشد:

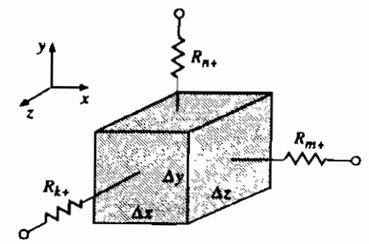
$$q_i + \sum_j \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = ۰ \qquad (۳-۳۱)$$

که q_i گرمای انتقال یافته به گره i از طریق تولید گرما، تابش و غیره است. R_{ij} می‌تواند به شکل مرزهای جابه‌جایی، هدایت درونی و غیره بوده، معادله (۳-۳۱) را می‌توان در راه حل کاهشی برابر یک‌باقی‌مانده و در روش ماتریسی برابر صفر قرار دارد.

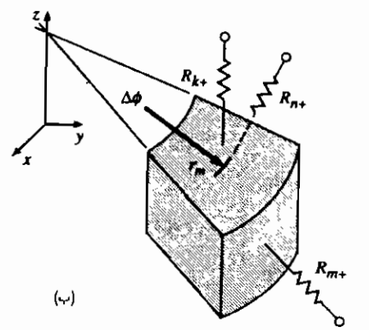
در استفاده از فرمول‌بندی مقاومت اطلاعات تازه‌ای به‌دست نمی‌آید ولی ممکن است بعضی این فرمول‌بندی را راحت‌تر درک کنند. فرمول‌بندی مقاومت مخصوصاً در استفاده از راه‌حلی عددی که تغییرات خاصیت در آن به‌حساب آمده، مفید خواهد بود. به‌علاوه، در بسیاری از مسائل انتقال گرما، بهتر است شرایط مرزی جابه‌جایی و تابشی را بر حسب مقاومت گرمایی که بر سیستم اعمال می‌کنند در نظر بگیریم. بزرگی نسبی مقاومت‌های جابه‌جایی، تابشی و هدایتی ممکن است در این موارد تأثیر مهمی بر رفتار مدل گرمایی داشته باشد. مقاومت‌های مرزی مختلف را در مثال‌ها بررسی می‌کنیم. روشن خواهد شد که اگر بخواهیم از جریان گرما جلوگیری کنیم باید مقاومت‌ها زیاد و اگر بخواهیم انتقال گرما را زیاد کنیم باید مقاومت گرمایی را کم کنیم.

برای راحتی خواننده، اجزای مقاومت مربوط به گره‌های جدول ۳-۲ در جدول ۳-۳ فهرست شده است. توجه داشته باشید که کلیه اجزای مقاومت برای واحد عمق جسم و $\Delta x = \Delta y$ است. در نام‌گذاری جدول مزبور R_{m+} مربوط به مقاومت در طرف x مثبت گره (m,n) و R_{n-} مربوط به مقاومت در طرف y منفی گره (m,n) و الی آخر است.

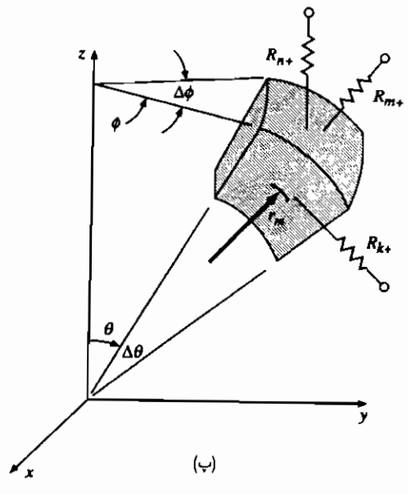
فرمول‌بندی مقاومت در حل عددی اشکال سه‌بعدی پیچیده نیز مفید است. اجزای حجمی مربوط به سه دستگاه مختصات در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده و مقاومت‌های گرهی داخلی هر دستگاه در جدول ۳-۴ داده شده‌اند. نام‌گذاری زیرنویس‌های (m,n,k) در بالای جدول داده شده و علامت مثبت و منفی روی زیرنویس‌های مقاومت، مقاومت در جهت مثبت یا منفی از گره مرکزی (m,n,k) را نشان می‌دهد. در هر دستگاه مختصات، حجم جزئی ΔV نیز نشان داده شده است. البته در مسأله عملی، معمولاً نموهای مختصاتی طوری انتخاب می‌شود که $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ و غیره، مقاومت‌ها ساده می‌شود.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۳-۱۱ حجم جزءهای مقاومتی دستگاه مختصات: (الف) قائم؛ (ب) استوانه‌ای؛ (پ) کروی.

☑ **جدول ۳-۳** مقاومت‌ها برای گره‌های جدول ۲-۳ $\quad \Delta x = \Delta y \ , \ \Delta z = ۱$

موقعیت فیزیکی	Δv	R_{n-}	R_{n+}	R_{m-}	R_{m+}
(الف) گره داخلی	$(\Delta x)^۳$	$\frac{۱}{k}$	$\frac{۱}{k}$	$\frac{۱}{k}$	$\frac{۱}{k}$
(ب) مرزجابه‌جایی	$\frac{(\Delta x)^۳}{۲}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۱}{k}$	$\frac{۱}{h\Delta x}$
(پ) گوشه‌خارجی، جابه‌جایی	$\frac{(\Delta x)^۳}{۴}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۲}{h\Delta x}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۲}{h\Delta x}$
(ت) گوشه داخلی، جابه‌جایی*	$\frac{۳(\Delta x)^۳}{۴}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۱}{k}$	$\frac{۱}{k}$	$\frac{۲}{k}$
(ث) مرز عایق‌شده	$\frac{(\Delta x)^۳}{۲}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۱}{k}$	∞
(ج) گره داخلی نزدیک مرز منحنی	$۰/۲۵(۱+a)(۱+b)(\Delta x)^۳$	$\frac{۲}{(a+۱)k}$ به گره $(m,n-۱)$	$\frac{۲b}{(a+۱)k}$ به گره ۲	$\frac{۲a}{(b+۱)k}$ به گره ۱	$\frac{۲}{(b+۱)k}$ به گره $(m+۱,n)$

(چ) گره مرزی با گره مرز منحنی ۲ برای (چ) بالا $\quad \Delta V = ۰/۱۲۵[(۲+a)+c](\Delta x)^۳$

$$R_{۳۳} = \frac{۲\sqrt{c^۲+۱}}{bk}$$

$$R_{۲۱} = \frac{۲\sqrt{a^۲+b^۲}}{bk}$$

$$R_{۲-\infty} = \frac{۲}{h\Delta x(\sqrt{c^۲+۱}+\sqrt{a^۲+b^۲})}$$

$$R_{n-} = \frac{۲b}{k(a+۱)} \quad \text{به گره } (m,n)$$

* همچنین $R_\infty = \frac{۱}{h\Delta x}$ برای جابه‌جایی به T_∞.

☑ **جدول ۳-۴** مقاومت‌های گرهی داخلی برای دستگاه‌های مختصات مختلف

	قائم	استوانه‌ای	کروی
نام‌گذاری برای نمونها	x,m y,n z,k	r,m ϕ,n z,k	r,m ϕ,n θ,k
ΔV جزء حجم	$\Delta x\ \Delta y\ \Delta k$	$r_m\ \Delta r\ \Delta\phi\ \Delta z$	$r_m^2 \sin\theta\ \Delta r\ \Delta\phi\ \Delta\theta$
R_{m+}	$\dfrac{\Delta x}{\Delta y\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{\Delta r}{\left(r_m + \dfrac{\Delta r}{2}\right)\Delta\phi\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{\Delta r}{\left(r_m + \dfrac{\Delta r}{2}\right)^2 \sin\theta\ \Delta\phi\ \Delta\theta\ k}$
R_{m-}	$\dfrac{\Delta x}{\Delta y\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{\Delta r}{\left(r_m - \dfrac{\Delta r}{2}\right)\Delta\phi\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{\Delta r}{\left(r_m + \dfrac{\Delta r}{2}\right)\sin\theta\ \Delta\phi\ \Delta\theta\ k}$
R_{n+}	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{r_m \Delta\phi}{\Delta r \Delta z\ k}$	$\dfrac{\Delta\phi \sin\theta}{\Delta r\ \Delta\theta\ k}$
R_{n-}	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{r_m \Delta\phi}{\Delta r\ \Delta z\ k}$	$\dfrac{\Delta\phi \sin\theta}{\Delta r\ \Delta\theta\ k}$
R_{k+}	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x\ \Delta y\ k}$	$\dfrac{\Delta z}{r_m\ \Delta\phi \Delta r\ k}$	$\dfrac{\Delta\theta}{\sin\left(\theta + \dfrac{\Delta\theta}{2}\right)\Delta r\ \Delta\phi\ k}$
R_{k-}	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x\ \Delta y\ k}$	$\dfrac{\Delta z}{r_m\ \Delta\ \phi\ \Delta r\ k}$	$\dfrac{\Delta\ \phi}{\sin\left(\theta - \dfrac{\Delta\theta}{2}\right)\Delta r\ \Delta\phi\ k}$

☐ ۳-۷ تکرار گوس - سایدل *Gauss - Seidel iteration*

وقتی تعداد گره‌ها خیلی زیاد است، گاه حل معادلات گره به روش تکرار، مؤثرتر از روش مستقیم معکوس‌کردن ماتریس است. یکی از این روش‌ها به ***تکرار گوس - سایدل*** معروف بوده، به طریق زیر به کار می‌رود. با حل معادله (۳-۳۱) و به‌دست آوردن دمای T_i بر حسب مقاومت‌ها و دماهای گره‌های مجاور T_j داریم:

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j \left(\dfrac{T_j}{R_{ij}}\right)}{\sum_j \left(\dfrac{1}{R_{ij}}\right)} \qquad (۳-۳۲)$$

در روش تکرار گوس - سایدل از معادلات تفاضلی که به شکل معادلهٔ (۳-۳۲) بیان شده‌اند به روش زیر استفاده می‌شود.

۱- یک سری مقادیر اولیه برای T_i فرض می‌شود. این فرض اولیه را می‌توان با روشی مقتضی به‌دست آورد. وقتی تعداد گره‌ها زیاد است و می‌خواهیم آنها را با کامپیوتر حل کنیم، گاهی مقادیر T_i در شروع محاسبات را صفر در نظر می‌گیریم.

۲- سپس، مقادیر جدید دما در گره‌ها T_i بر اساس معادله (۳-۳۲) محاسبه می‌شوند. همیشه ***جدیدترین مقادیر*** T_i به‌کار می‌رود.

۳- این روند را تا جایی تکرار می‌کنیم که محاسبات متوالی تفاوت نسبتاً کمی داشته باشد. در برنامهٔ کامپیوتری برای متوقف کردن محاسبات، آزمونی وجود دارد که چنین است:

$$|T_{i_{n+1}} - T_{i_n}| \le \delta \qquad \text{برای تمام } T_i \text{ها}$$

که δ ***ثابت انتخابی*** و n تعداد دفعات تکرار است. گاهی از آزمونی غیر ابعادی چنین استفاده می‌شود:

$$\varepsilon \ge \left| \frac{T_{i_{n+1}} - T_{i_n}}{T_{i_n}} \right|$$

واضح است که هر چه مقدار δ کوچک‌تر باشد زمان محاسبه برای به‌دست آوردن نتیجه مطلوب بیش‌تر خواهد شد. گرچه، خواننده باید توجه داشته باشد که دقت جواب مسأله فیزیکی فقط به مقدار δ بستگی ندارد. این مقدار ثابت در دقت جواب سری معادلات تفاضلی، تعیین کننده است. جواب مسأله فیزیکی نیز به انتخاب **نمو** Δx بستگی دارد.

همان طور که در مبحث راه‌حل‌ها ذکر کردیم، ماتریس‌هایی که در فرمول‌بندی عددی با آنها مواجهیم خیلی تُنُک‌اند، یعنی تعداد صفرهای آنها زیاد است. در حل مسأله‌ای با تعداد زیادی گره، وارد کردن تمام این صفرها وقت زیادی را می‌گیرد و بهتر است از صورت سادهٔ معادله گوس - سایدل استفاده شود.

صورت معادله (۳-۳۲) در گره‌هایی با $\Delta x = \Delta y$ و فاقد تولید گرما به شکل معادله دوم جدول ۳-۲ فهرست شده است. گروه بی‌بعد زیر به **عدد بیو** موسوم است.

$$\frac{h\ \Delta x}{k} = Bi$$

☐ ۳-۸ ملاحظات مربوط به دقت

گفتیم که هر چه نموهای Δx و Δy کوچک‌تر به کار رود، تقریب تفاضل محدود به مسأله‌ای فیزیکی، دقیق‌تر است. ولی در مورد چگونگی ارزیابی این تقریب صحبتی نکردیم. برای این کار دو روش موجود است:

۱- مقایسه راه حل عددی با راه حل تحلیلی مسأله، اگر وجود داشته باشد، یا مقایسه با راه حل تحلیلی مسأله‌ای مشابه آن.

۲- انتخاب مقادیری برای Δx که به‌تدریج کوچک‌تر می‌شوند و مشاهده رفتار جواب حاصله. چنان‌چه مسأله مورد نظر به‌خوبی فرموله و حل شود، هر چه مقدار Δx کوچک‌تر شود دماهای گرهی هم‌گرا می‌شود. باید توجه کرد که خطاهای محاسباتی ناشی از گردشدن، با افزایش تعداد گره‌ها زیاد می‌شود زیرا تعداد محاسبات ماشین زیاد می‌شود و به همین دلیل باید هم‌گرایی جواب مشاهده شود.

می‌توان نشان داد که خطاهای تقریب تفاضل محدود به $\dfrac{\partial T}{\partial x}$، هم مرتبهٔ $\left(\dfrac{\Delta x}{L}\right)^2$ است که در آن L بعد مشخصه‌ای از جسم است.

فایده راه‌حل‌های تحلیلی در بررسی دقت یک مدل عددی، محدود است، زیرا در حل اکثر مسائل نیاز به استفاده از روش عددی است چون یا اصولاً راه‌حلی تحلیلی ندارند و یا اگر دارند محاسبات آنها خیلی پُر زحمت است.

در بحث مربوط به روش‌های حل معادلات گره‌ها گفتیم که جواب دقیق این معادلات به معنی جواب دقیق مسأله فیزیکی نیست. در بسیاری از موارد به علت عدم فرمول‌بندی مسأله در بدو امر، جواب نهایی خیلی خطا دارد. هیچ کامپیوتر یا معیار تبقاربی این قسم خطا را اصلاح نمی‌کند. یک روش بررسی خطاهای ناشی از فرمول‌بندی، برقراری قسمتی توازن انرژی با استفاده از جواب نهایی است. سرشت این توازن از مسأله‌ای به مسأله دیگر متفاوت است ولی در حالت پایدار، همواره به شکل مساوی قرار دادن انرژی ورودی با انرژی خروجی است. اگر توازن در حد قابل قبولی نباشد، احتمال این که مسأله درست فرموله نشده باشد وجود دارد. ممکن است یک ثابت در جایی اشتباه باشد و یا نقطه مربوط به اطلاعات ورودی نادرست باشد، یا از یک گزاره کامپیوتری غلط استفاده کرده باشید و یا یک یا چند معادلهٔ گرهی را اشتباه نوشته باشید. با فرض برقراری توازن انرژی، مجدداً مقدار کوچک‌تری Δx را آدرس می‌دهیم تا دقت بیش‌تری به‌دست آید.

در مثال‌های آتی ، برای بررسی فرمول‌بندی مسأله از توازن انرژی استفاده شده است.

دقت خواص و شرایط مرزی

گفتیم که ضرایب هدایت گرمایی مصالح با دما تغییر می‌کند؛ گر چه، در محدوده دمایی ۱۰۰ تا ۲۰۰ °C این تغییر زیاد نیست (درحد ۵ تا ۱۰٪) و ما می‌توانیم برای ساده کردن حل مسأله، این ضریب را ثابت فرض کنیم. شرایط مرزی جابه‌جایی و تابش مخصوصاً به خاطر غیر ثابت بودنشان معروفند. حتی بدتر این‌که در بسیاری از مسائل عملی، ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی مورد استفاده تا ۲۵ درصد بالا و پایین دارند. خطای درحد ۱۰± درصد در خواص تابش سطحی چیز بعیدی نیست. مثلاً چنان‌چه صفحهٔ آلومینیمی بسیار صیقلی، شدیداً اکسیده شود، ۳۰۰ درصد بیش‌تر از موقعی که صیقلی بود تابش جذب می‌کند.

اعداد فوق برای هشدار به خواننده نیستند بلکه صرفاً برای آن است تا نشان دهیم که انتخاب تعداد زیادگره در فرمول‌بندی عددی، ضرورتاً جواب دقیقی برای مسأله فیزیکی به‌دست نمی‌دهد؛ باید خطا در شرایط مرزی را نیز امتحان کنیم. تا اینجا خواننده درست مجهز به ارزیابی این خطاها نشده و فصول بعدی که مربوط به جابه‌جایی و تابش‌اند موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۳-۶ محاسبه گوس-سایدل

با استفاده از روش گوس - سایدل دمای چهار نقطه در شکل ۳-۶ را به‌دست آورید.

حل :

برای حل این مسأله از فرمول‌بندی مقاومت استفاده می‌کنیم زیرا تمام مقاومت‌های اتصالی بین گره‌های شکل ۳-۶ مساوی‌اند، یعنی:

$$R = \frac{\Delta y}{k\ \Delta y} = \frac{\Delta x}{k\ \Delta y} = \frac{1}{k} \qquad \text{(الف)}$$

بنابراین، با استفاده از معادله (۳-۲۲) برای هر کدام از گره‌ها داریم ($q_i = 0$)

$$T_i = \frac{\sum_j k_j T_j}{\sum_j k_j} \qquad \text{(ب)}$$

از آنجا که به هر کدام از گره‌ها چهار مقاومت وصل شده است و k را ثابت فرض کرده‌ایم:

$$\sum_j K_j = ۴\,k$$

و:

$$T_i = \frac{۱}{۴}\sum_j T_j \qquad \text{(پ)}$$

اکنون جدول تکرار را مطابق آنچه نشان داده شده تشکیل می‌دهیم و دماهای فرضی اولیهٔ ۳۰۰ و ۲۰۰ °C را به کار می‌بریم. سپس معادله (پ) را مکرراً به کار می‌بریم تا تقارب مورد قبولی حاصل شود. در جدول مزبور با پنج بار تکرار، تقاربی با ۱۳٪ درجه به‌وجود می‌آید. برای تشریح این محاسبات می‌توان دو مورد مخصوص زیر را ذکر کرد:

$$(T_۲)_{n=۱} = \frac{۱}{۴}(۵۰۰ + ۱۰۰ + T_۴ + T_۱)$$

$$= \frac{۱}{۴}(۵۰۰ + ۱۰۰ + ۲۰۰ + ۲۷۵) = ۲۶۸/۷۵$$

$$(T_۳)_{n=۴} = \frac{۱}{۴}(۱۰۰ + T_۱ + T_۴ + ۱۰۰)$$

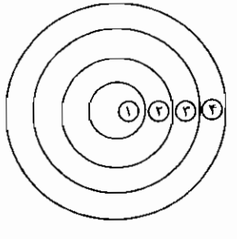
$$= \frac{۱}{۴}(۱۰۰ + ۲۵۰/۵۲ + ۱۵۰/۵۲ + ۱۰۰) = ۱۵۰/۲۶$$

توجه داشته باشید که در محاسبه $(T_۳)_{n=۴}$ ما از جدیدترین مقدار $T_۱$ و $T_۴$ استفاده کرده‌ایم.

تعداد تکرار n	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$
۰	۳۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۲۰۰
۱	۲۷۵	۲۶۸/۷۵	۱۶۸/۷۵	۱۵۹/۳۸
۲	۲۵۹/۳۸	۲۵۴/۶۹	۱۵۴/۶۹	۱۵۲/۳۵
۳	۲۵۱/۷۶	۲۵۱/۰۳	۱۵۱/۰۳	۱۵۰/۵۲
۴	۲۵۰/۵۲	۲۵۰/۲۶	۱۵۰/۲۶	۱۵۰/۱۳
۵	۲۵۰/۱۳	۲۵۰/۰۷	۱۵۰/۰۷	۱۵۰/۰۳

مثال ۳-۷ فرمول‌بندی عددی با تولید گرما

فرمول‌بندی مقاومت در مختصات استوانه‌ای را با بررسی سیمی به قطر ۴ میلی‌متر با تولید گرمای یکنواخت $۵۰۰\ \frac{MW}{m^۳}$ تشریح می‌کنیم. دمای سطح بیرونی سیم ۲۰۰ °C و ضریب هدایت گرمایی $۱۹\ \frac{W}{m\,.\,°C}$ است. می‌خواهیم توزیع دما در سیم را حساب کنیم. برای این منظور طبق شکل بالا چهار گره انتخاب می‌کنیم.



شکل مثال ۳-۷ الف شماتیک.

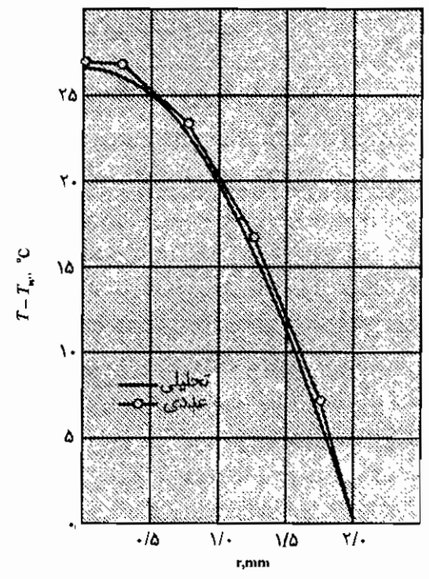
محاسبات را بر مبنای طول انجام می‌دهیم. بنابراین $\Delta z = ۱/۰$ می‌گیریم. از آنجا که سیستم یک بعدی است، $\Delta\phi = ۲\pi$ می‌گیریم. Δr تمام اجزا را برابر ۰/۵ mm انتخاب کرده‌ایم. سپس مقاومت‌ها و اجزای حجمی را با استفاده از روابط جدول ۳-۶ حساب می‌کنیم و مقادیر مربوطه را در زیر می‌آوریم. محاسبه R_{m+} برای گره ۴ متفاوت با سایرین است زیرا مسیر جریان گرما کوتاه‌تر است. مقدار r_m برای گره ۴، ۱/۷۵ mm است، بنابراین مقاومت مثبتی که به این دمای سطحی معلوم می‌رسد برابر است با:

$$R_{m+} = \frac{\frac{\Delta r}{۲}}{\left(r_m + \frac{\Delta r}{۴}\right)\Delta\phi\ \Delta z\ k} = \frac{۱}{۱۵\,\pi k}$$

معادلهٔ دمایی برای گره ۴ چنین است:

$$T_۴ = \frac{۲۷۴۹ + ۶\pi k T_۳ + ۱۵\pi k(۲۰۰)}{۲۱\pi k}$$

که ۲۰۰ مقدار دمای سطحی بیرونی معلوم است.



شکل مثال ۳-۷ ب مقایسه حل‌های تحلیلی و عددی.

گره	r_m, mm	R_{m+}, $\frac{°C}{W}$	R_{m-}, $\frac{°C}{W}$	$\Delta v = r_m \Delta r \Delta\phi \Delta z$, $\mu m^۳$	$q_i = \dot{q}\Delta v$, W
۱	۰/۲۵	$\frac{۱}{۲\pi k}$	∞	۰/۷۸۵	۳۹۲/۵
۲	۰/۷۵	$\frac{۱}{۴\pi k}$	$\frac{۱}{۲\pi k}$	۲/۳۵۶	۱۱۷۸
۳	۱/۲۵	$\frac{۱}{۶\pi k}$	$\frac{۱}{۴\pi k}$	۳/۹۲۷	۱۹۶۴
۴	۱/۷۵	$\frac{۱}{۱۵\pi k}$	$\frac{۱}{۶\pi k}$	۵/۴۹۸	۲۷۴۹

خلاصه مقادیر $\sum(\frac{۱}{R_{ij}})$ و T_i بر طبق معادله (۳-۲۲) در زیر آمده، باید در طرح تکرار گوس - سایدل به کار رود.

گره	$\sum\frac{۱}{R_{ij}}, \frac{W}{C}$	$T_i = \frac{q_i + \sum\left(\frac{T_j}{R_{ij}}\right)}{\sum\left(\frac{۱}{r_{ij}}\right)}$
۱	$۲\pi K = ۱۱۹/۳۸$	$T_۱ = ۳/۲۸۸ + T_۲$
۲	$۶\pi k = ۳۵۸/۱۴$	$T_۲ = ۳/۲۸۹ + \frac{۱}{۳}T_۱ + \frac{۲}{۳}T_۳$
۳	$۱۰\pi k = ۵۹۶/۹۰$	$T_۳ = ۳/۲۹۰ + ۰/۴\,T_۲ + ۰/۶\,T_۴$
۴	$۲۱\pi k = ۱۲۵۳/۵۰$	$T_۴ = ۲/۱۹۳ + \frac{۲}{۷}T_۳ + ۱۴۲/۸۵۷$

در زیر سیزده عمل تکرار به جدول درآمده‌اند:

تکرار n	دمای گره °C $T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$
۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۲۰	۲۱۰
۱	۲۳۳/۲۹	۲۲۷/۷۲	۲۲۰/۳۸	۲۰۸/۰۲
۲	۲۳۱/۰۱	۲۲۷/۲۱	۲۱۸/۹۹	۲۰۷/۶۲
۳	۲۳۰/۵۰	۲۲۶/۱۲	۲۱۸/۳۱	۲۰۷/۴۲
۴	۲۲۹/۴۱	۲۲۵/۳۰	۲۱۷/۸۶	۲۰۷/۳۰
۵	۲۲۸/۵۹	۲۲۴/۷۳	۲۱۷/۵۶	۲۰۷/۲۱
۶	۲۲۸/۰۲	۲۲۴/۳۴	۲۱۷/۳۵	۲۰۷/۱۵
۷	۲۲۷/۶۳	۲۲۴/۰۷	۲۱۷/۲۱	۲۰۷/۱۱
۸	۲۲۷/۳۶	۲۲۳/۸۸	۲۱۷/۱۱	۲۰۷/۰۸
۹	۲۲۷/۱۷	۲۲۳/۷۵	۲۱۷/۰۴	۲۰۷/۰۶
۱۰	۲۲۷/۰۴	۲۲۳/۶۶	۲۱۶/۹۹	۲۰۷/۰۴
۱۱	۲۲۶/۹۵	۲۲۳/۶۰	۲۱۶/۹۵	۲۰۷/۰۴
۱۲	۲۲۶/۸۹	۲۲۳/۵۵	۲۱۶/۹۳	۲۰۷/۰۳
۱۳	۲۲۶/۸۴	۲۲۳/۵۲	۲۱۶/۹۲	۲۰۷/۰۳
وارسی تحلیلی	۲۲۵/۹۰۴	۲۲۲/۶۱۵	۲۱۶/۰۳۶	۲۰۶/۱۶۸
گوس - سایدل	۲۲۵/۹۰۳	۲۲۲/۶۱۴	۲۱۶/۰۳۷	۲۰۶/۷۷۵
حل دقیق معادلات گرهی	۲۲۶/۷۵	۲۲۳/۴۶۲	۲۱۶/۸۸۴	۲۰۷/۰۱۷

می‌توانیم راه حل تکراری را با محاسبه دقیقی مقایسه کنیم که با استفاده از معادلهٔ (۲-۲۵الف) انجام می‌شود:

$$T - T_w = \frac{\dot{q}}{۴k}(R^۲ - r^۲)$$

که T_w دمای سطحی ۲۰۰ °C، $R = ۲/۰$ mm و r برای هر گره r_m است. مقادیر به‌دست آمده از طریق تحلیلی در زیر آخرین تکرار نشان داده شده‌اند و این مقادیر با روش گوس - سایدل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای سه گره اولیه تطابق عالی و برای گره چهارم تطابق خوبی وجود دارد.

دست آخر، جواب دقیق معادلات گرهی را برای مقایسه نشان داده‌ایم. این اعداد مقادیری هستند که اگر روش تکراری بیش‌تر ادامه یابد به آنها نزدیک می‌شویم. در این حد، محاسبات تحلیلی و عددی به اندازه مقدار ثابتی، در حدود ۰/۸۵ °C، متفاوت‌اند و این تفاوت اساساً از طرز برخورد با مقاومت سطحی و شرایط مرزی ناشی می‌شود. هر چه مقدار Δr نزدیک به سطح کم‌تر باشد سازگاری بهتری ایجاد می‌شود. مقایسه ترسیمی جواب‌های تحلیلی و عددی در شکل همراه نشان داده شده‌اند.

کل گرمای تلف‌شده از سیم برابر با هدایت از R_{m+} در نقطه ۴ است. بنابراین:

$$q = \frac{T_۴ - T_w}{R_{m+}} = ۱۵\pi k\ (۲۰۷/۰۳ - ۲۰۰)$$

$$= ۶/۲۸۴\ \frac{kW}{m}\ \left[۶۵۴۸\ \frac{Btu}{h\,.\,ft}\right]$$

این مقدار باید برابر با کل گرمای تولیدی در سیم باشد، یا:

$$q = \dot{q}V = (۵۰۰ \times ۱۰^۶)\pi\,(۲ \times ۱۰^{-۳})^۲$$

$$= ۶/۲۸۳\ \frac{kW}{m}\ \left[۶۵۳۶\ \frac{Btu}{h\,.\,ft}\right]$$

تفاوت بین دو مقدار، از عدم دقت در تعیین $T_۴$ ناشی شده است. با استفاده از مقدار جواب دقیق، ۲۰۷/۰۱۷ °C، اتلاف گرما برابر ۶/۲۸۲۷ kW خواهد شد. در این مسأله مقدار دقیق جریان گرما برابر ۶/۲۸۳ kW است زیرا محاسبهٔ تولید گرما از فرمول‌بندی تفاضل محدود مستقل است.

مثال ۳-۸ تولید گرما با اجزای گرمی غیر یکنواخت

بر روی سطح بالایی لایه‌ای شیشه $\left[k = ۰/۸\ \frac{W}{m\,.\,°C}\right]$ به ضخامت ۳ میلی‌متر، مطابق شکل نوارهای نازک هادی برق به ضخامت یک میلی‌متر چسبانده‌اند، سطح زیرین شیشه عایق‌شده، سطح بالایی در معرض محیط جابه‌جای به دمای ۳۰ °C و $h = ۱۰۰\ \frac{W}{m^۲\,.\,°C}$ قرار دارد. نوارهای مزبور با آهنگ ۴۰ یا ۲۰ وات بر متر طول گرما تولید می‌کنند. پخش دمایی حالت پایدار را در مقطع نمونهٔ شیشه با استفاده از روش عددی به ازای هر دو آهنگ تولید گرما به‌دست آورید.

حل:

شبکه گرهی برای مقطع نمونه شیشه‌ای در شکل نشان داده شده است. در این مثال $\Delta x = \Delta y$ انتخاب نکرده‌ایم. به علت تقارن، $T_۱ = T_۷$، $T_۴ = T_۶$ و $T_۲$ و غیره و فقط احتیاج به محاسبهٔ دمای ۱۶ گره داریم. از فرمول‌بندی مقاومت استفاده می‌کنیم. مطابق شکل $\Delta x = ۵$mm و $\Delta y = ۱$mm انتخاب کرده‌ایم. اکنون مقاومت‌های مختلف را محاسبه می‌کنیم:

گره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴:

$$\frac{۱}{R_{m+}} = \frac{۱}{R_{m-}} = \frac{k\left(\frac{\Delta y}{۲}\right)}{\Delta x} = \frac{(۰/۸)\left(\frac{۰/۰۰۱}{۲}\right)}{۰/۰۰۵} = ۰/۰۸$$

$$\frac{۱}{R_{n+}} = hA = (۱۰۰)(۰/۰۰۵) = ۰/۵$$

$$\frac{۱}{R_{n-}} = \frac{k\,\Delta x}{\Delta y} = \frac{(۰/۸)(۰/۰۰۵)}{۰/۰۰۱} = ۴/۰$$

گره‌های ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸:

$$\frac{۱}{R_{m+}} = \frac{۱}{R_{m-}} = \frac{k\Delta y}{\Delta x} = \frac{(۰/۸)(۰/۰۰۱)}{۰/۰۰۵} = ۰/۱۶$$

$$\frac{۱}{R_{n+}} = \frac{۱}{R_{n-}} = \frac{k\Delta x}{\Delta y} = ۴/۰$$

گره‌های ۲۲ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۵:

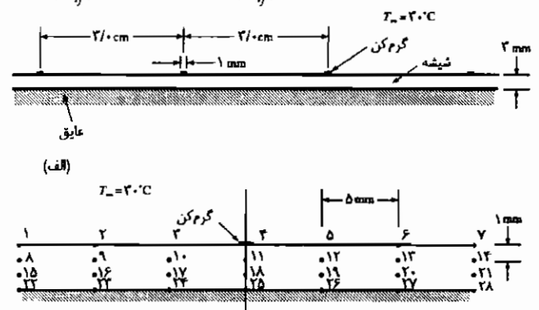
$$\frac{۱}{R_{m+}} = \frac{۱}{R_{m-}} = \frac{k\left(\frac{\Delta y}{۲}\right)}{\Delta x} = ۰/۰۸$$

$$\frac{۱}{R_{n+}} = \frac{k\,\Delta x}{\Delta y} = ۴/۰$$

$$\frac{۱}{R_{n-}} = ۰ \qquad \text{(سطح عایق‌شده)}$$

شکل عمومی معادلات گرهی را از معادله (۳-۳۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\sum \left(\frac{T_j}{R_{ij}}\right) + q_i - T_i \sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right) = 0$$



شکل مثال ۳-۸ (الف) سیستم فیزیکی (ب) مرزهای گرهی.

فقط گره ۴ دارای جمله تولید گرما است و برای سایر گره‌ها $q_i = 0$ است. از مقاومت‌های فوق می‌توان $\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right)$ را محاسبه کرد.

گره	$\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right)$
۱ و ۲ و ۳ و ۴	۴/۶۶
۸ و . . . و ۱۸	۸/۳۲
۲۲ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۵	۴/۱۶

برای گره ۴ معادله چنین است:

$$(2)(0/08)T_3 + 4/0T_5 + (0/5)(30) + q_4 - 4/66\,T_4 = 0$$

دلیل وجود ضریب ۲ برای T_3 آن است که به **علت تقارن** $T_3 = T_5$ است. وقتی تمام معادلات را نوشته، ماتریس مربوطه را حل کنیم، دماها چنین به‌دست می‌آیند:

دمای گره	$\frac{q}{L}$, $\frac{W}{m}$	
°C	۲۰	۴۰
۱	۳۱/۹۰۳۰۹	۳۳/۸۰۶۱۷
۲	۳۲/۷۸۷۱۶	۳۵/۵۷۴۳۳
۳	۳۶/۳۵۴۹۶	۴۲/۷۰۹۹۳
۴	۴۹/۸۱۲۶۶	۶۹/۶۲۵۳۲
۸	۳۲/۱۰۵۶۱	۳۴/۲۱۱۲۲
۹	۳۳/۰۸۱۸۹	۳۶/۱۶۳۷۷
۱۰	۳۶/۹۵۱۵۴	۴۳/۹۰۳۰۷
۱۱	۴۷/۸۲۷۵۵	۶۵/۶۵۵۱۰
۱۵	۳۲/۲۳۰۰۳	۳۴/۴۶۰۰۶
۱۶	۳۳/۲۶۰۸۷	۳۶/۵۲۱۷۴
۱۷	۳۷/۲۶۷۸۵	۴۴/۵۳۵۷۱
۱۸	۴۶/۷۱۲۵۲	۶۳/۴۲۵۰۴
۲۲	۳۲/۲۷۱۹۸	۳۴/۵۴۳۹۷
۲۳	۳۳/۳۳۰۸۱	۳۶/۶۴۱۶۲
۲۴	۳۷/۳۶۶۶۷	۴۴/۷۳۳۳۳
۲۵	۴۶/۳۵۳۰۶	۶۲/۷۰۶۱۳

نتایج ناشی از مدل مزبور و محاسبات را می‌توان با محاسبه گرمای تلف‌شده به طریق جابه‌جایی از سطح بالایی مقایسه کرد. از آنجاکه تمام انرژی تولیدی در نوار گرم‌کن کوچک، باید به طریق جابه‌جایی (سطح زیرین شیشه عایق بوده، بنابراین اتلاف گرمایی از آن وجود ندارد) تلف شود مقدار عددی جابه‌جایی را می‌دانیم. اتلاف گرمای جابه‌جایی در سطح بالایی برابر است با:

$$q_c = \sum h_i A_i (T_i - T_\infty)$$
$$= (2)(100)\left[\frac{\Delta x}{2}(T_1 - T_\infty) + \Delta x\,(T_2 + T_3 - 2T_\infty) + \frac{\Delta x}{2}(T_4 - T_\infty)\right]$$

ضریب ۲ به‌خاطر آن است که دو طرف مقطع را به‌حساب آورده‌ایم. وقتی $T_\infty = 30\ ^\circ C$ باشد داریم:

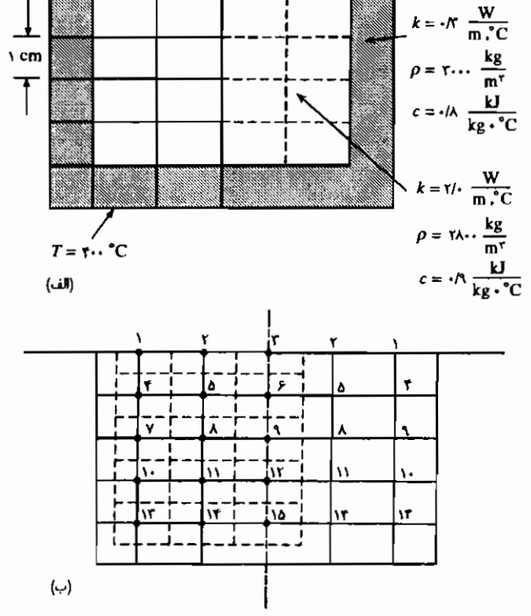
$$\frac{q}{L} = 20\ \frac{W}{m} \quad \text{برای} \quad q_c = 19/9999995$$

$$\frac{q}{L} = 40\ \frac{W}{m} \quad \text{برای} \quad q_c = 40/000005$$

واضح است که تطابق اعداد عالی است.

مثال ۳-۹ جسم مرکب با اجزای گرهی غیر یکنواخت

جسم مرکبی در جسمی با ضریب هدایت گرمایی بالا به دمای $400\ ^\circ C$ مطابق شکل جاسازی شده است. سطح بالایی در معرض محیط جابه‌جایی به دمای $30\ ^\circ C$ و $h = 25\ \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ قرار دارد. توزیع دما و اتلاف گرمایی را از سطح بالایی برای حالت پایدار معین کنید.



شکل مثال ۳-۹ (الف) سیستم فیزیکی، (ب) مرزهای گرهی.

حل :

در این مثال مطابق شکل از گره‌های غیرمربعی استفاده کرده‌ایم. همچنین توجه داشته باشید که گره‌های ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ مرکب از دو ماده‌اند. مجدداً از فرمول‌بندی مقاومت استفاده می‌کنیم.

برای گره ۱ :

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(2/0)(0/005)}{0/015} = 0/6667$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(0/3)(0/005)}{0/01} = 0/15$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (25)(0/005 + 0/00075) = 0/3125$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \left(\frac{kA}{\Delta y}\right)_L + \left(\frac{kA}{\Delta y}\right)_R = \frac{(0/3)(0/005) + (2/0)(0/00075)}{0/01} = 1/65$$

برای گره‌های ۴ و ۷ و ۱۰ :

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{(2/0)(0/01)}{0/015} = 1/3333$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{(0/3)(0/01)}{0/01} = 0/3$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = 1/65$$

برای گره ۱۳ :

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{(2/0)(0/005) + (0/3)(0/005)}{0/015} = 0/76667$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{(0/3)(0/01)}{0/01} = 0/3$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = 1/65$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{(0/3)(0/00075) + (0/3)(0/005)}{0/01} = 0/375$$

برای گره‌های ۵ و ۶ و ۸ و ۹ و ۱۱ و ۱۲ :

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2/0)(0/01)}{0/015} = 1/3333$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = \frac{(2/0)(0/015)}{0/01} = 3/0$$

برای گره‌های ۲ و ۳ :

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2/0)(0/005)}{0/015} = 0/6667$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (2/5)(0/015) = 0/375$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = 3/0$$

برای گره‌های ۱۴ و ۱۵ :

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2/0)(0/005) + (0/3)(0/005)}{0/015} = 0/76667$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = 3/0$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{(0/3)(0/015)}{0/01} = 0/45$$

برای فرمول‌بندی معادلات گرهی از معادلهٔ (۳-۳۲) استفاده می‌کنیم. برای گره ۱،

$$\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right) = 2/7792$$ و داریم:

$$T = \frac{1}{2/7792}\left[(400)(0/15) + (30)(0/3125) + T_2(0/6667) + 1/65T_4\right]$$

برای گره ۳، $\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right) = 4/7083$ و معادله گرهی چنین است:

$$T_3 = \frac{1}{4/7083}\left[T_2\,(0/6667)(2) + 3/0\ T_6 + (0/375)(30)\right]$$

به علت تصویر آیینه‌ای T_2 در سمت راست T_3، مقدار T_2 ضریب ۲ دارد.

برای سایر گره‌ها نیز از روش مشابه استفاده کرده، ۱۵ معادله گرهی با ۱۵ دمای مجهول به‌دست می‌آوریم. سپس می‌توان این معادلات را با روش محاسبه‌ای که راحت‌تر باشد حل کرد. دماهای حاصل چنینند:

$T_1 = 254/956$	$T_2 = 247/637$	$T_3 = 244/454$
$T_4 = 287/334$	$T_5 = 273/921$	$T_6 = 269/844$
$T_7 = 310/067$	$T_8 = 296/057$	$T_9 = 291/610$
$T_{10} = 327/770$	$T_{11} = 313/941$	$T_{12} = 309/423$
$T_{13} = 343/516$	$T_{14} = 327/688$	$T_{15} = 323/220$

با جمع اتلاف گرمای ناشی از جابه‌جایی از گره‌ها، جریان گرمای بیرون رفته از رویهٔ بالایی را به‌دست می‌آوریم:

$$q_{\text{جابه‌جایی}} = \sum hA_i\,(T_i - T_\infty)$$
$$= (2)(25)\left[(0/0125)(254/96 - 30) + (0/015)(247/64 - 30) + (0/00075)(244/45 - 30)\right]$$
$$= 382/24\ W \quad \text{در متر عمق}$$

برای بررسی این مقدار، می‌توانیم گرمای هدایت شده از سطح $400\ ^\circ C$ به گره‌های ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ را به‌دست آوریم:

$$q_{\text{هدایتی}} = \sum kA_i \frac{\Delta T}{\Delta x}$$
$$q_{\text{هدایتی}} = 2\,\frac{0/3}{0/01}\left[(0/005)(400 - 254/96) + (0/01)(400 - 287/33) + (0/01)(400 - 310/07) + (0/01)(400 - 327/77) + (0/0225)(400 - 343/52) + (0/015)(400 - 327/69) + (0/00075)(400 - 323/22)\right]$$
$$= 384/29\ W \quad \text{در متر عمق}$$

ملاحظه می‌شود که دو مقدار خیلی به‌هم نزدیک‌اند.

مثال ۳-۱۰ شرط مرزی تابشی

نواری سرامیکی به‌ابعاد یک در دو سانتی متر $\left[k = 3\ \frac{W}{m \cdot ^\circ C}\right.$ و $\rho = 1600\ \frac{kg}{m^3}$ و $\left.C = 0/8\ \frac{kJ}{kg \cdot ^\circ C}\right]$ در جسمی به ضریب هدایت گرمایی بالا، مطابق شکل، جاسازی شده است به نحوی که دمای جوانب آن ثابت و برابر $900\ ^\circ C$ است. سطح زیرین سرامیک، عایق‌شده، سطح بالایی در معرض محیط جابه‌جایی و تابشی به دمای

$T_\infty = ۵۰\ ^\circ C$ و $h = ۵۰ \frac{W}{m^۲ .^\circ C}$ قرار گرفته و گرمای تلف‌شده تابشی از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$q = \sigma A\, \varepsilon (T^۴ - T_\infty^۴)$$

که A مساحت سطح و $\sigma = ۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸} \frac{W}{m^۲ .K^۴}$ و $\varepsilon = ۰/۷$ است.

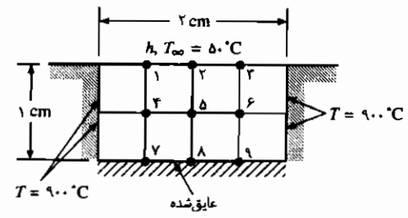
توزیع دمای حالت پایدار گره‌های نشان داده شده و آهنگ اتلاف گرما را به‌دست آورید. دماهای تابشی به درجه کلوین هستند.

حل :

از فرمول‌بندی مقاومت استفاده می‌کنیم و توجه داریم که تابش را می‌توان چنین نوشت:

(الف) $$q = \sigma \varepsilon A (T^۴ - T_\infty^۴) = \frac{T - T_\infty}{R_{\text{تابشی}}}$$

(ب) $$\frac{۱}{R_{\text{تابشی}}} = \sigma \varepsilon A\, (T^۲ - T_\infty^۲)(T + T_\infty)$$



شکل مثال ۳-۱۰

به دلیل تقارن داریم $T_۱ = T_۳$، $T_۲ = T_۶$، $T_۷ = T_۹$. بنابراین فقط شش گره مجهول داریم. اکنون مقاومت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

گره‌های ۱ و ۲ :

$$\frac{۱}{R_{m+}} = \frac{۱}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(۳/۰)(۰/۰۰۲۵)}{۰/۰۰۵} = ۱/۵$$

$$\frac{۱}{R_{n-}} = \frac{(۳/۰)(۰/۰۰۵)}{۰/۰۰۵} = ۳/۰$$

(ب) $$\frac{۱}{R_{\text{جابه‌جایی } n+}} = hA = (۵۰)(۰/۰۰۵) = ۰/۲۵$$

$$\frac{۱}{R_{\text{تابشی } n+}} = \sigma\, \varepsilon A\, (T^۴ + T_\infty^۴)(T + T_\infty)$$

جمله مربوط به تابش موجب غیرخطی شدن معادله شده، ما را مجبور به استفاده از راه حل تکراری می‌کند.

گره‌های ۴ و ۵ :

$$\frac{۱}{R} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(۳/۰)(۰/۰۰۵)}{۰/۰۰۵} = ۳/۰ \quad \text{تمام}$$

گره‌های ۷ و ۸ :

$$\frac{۱}{R_{m+}} = \frac{۱}{R_{m-}} = ۱/۵ \qquad \frac{۱}{R_{n+}} = ۳/۰$$

از آنجا که سطح زیرین عایق‌شده، $\frac{۱}{R_{n-}} = ۰$ اکنون از معادلهٔ (۳-۳۲) استفاده می‌کنیم:

$$T_i = \frac{\sum \left(\frac{T_j}{R_{ij}}\right)}{\sum \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)} \qquad (۳۲-۳)$$

و جدول زیر را داریم:

گره	$\sum \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)$
۱	$۶/۲۵ + \frac{۱}{R_{rad}}$
۲	$۶/۲۵ + \frac{۱}{R_{rad}}$
۴	۱۲
۵	۱۲
۷	۶
۸	۶

بنابراین معادلات گرهی به علت وجود جملات مربوط به تابش بر حسب درجه کلوین بیان می‌شوند و به صورت زیرند:

$$T_۱ = \frac{۱}{\sum \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)} \Big[۱/۵T_۲ + ۳T_۳ + (۱/۵)(۱۱۷۳) + (۳۲۳)(۰/۲۵) + \sigma\, \varepsilon (۰/۰۰۵)(T_۱^۲ + ۳۲۳^۲)(T_۱ + ۳۲۳)(۳۲۳) \Big]$$

$$T_۲ = \frac{۱}{\sum \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)} \Big[۱/۵T_۱(۲) + ۳T_۵ + (۳۲۳)(۰/۲۵) + \sigma\, \varepsilon (۰/۰۰۵)(T_۲^۲ + ۳۲۳^۲)(T_۲ + ۳۲۳)(۳۲۳) \Big]$$

$$T_۴ = \frac{۱}{۱۲} \left[(۱۱۷۳)(۳/۰) + ۳T_۱ + ۳T_۷ + ۳T_۵ \right]$$

$$T_۵ = \frac{۱}{۱۲} \left[۲T_۴(۳/۰) + ۳T_۴ + ۳T_۸ \right]$$

$$T_۷ = \frac{۱}{۶} \left[(۱۱۷۳)(۱/۵) + ۳T_۴ + ۱/۵T_۸ \right]$$

$$T_۸ = \frac{۱}{۶} \left[۲T_۷(۱/۵) + ۳T_۵ \right]$$

جملات مربوط به تابش موجب یک سری معادلات غیرخطی می‌شود. الگوریتم محاسباتی به کار رفته چنین است:

۱- $T_۱ = T_۲ = ۱۱۷۳\ K$ فرض می‌کنیم.

۲- $\frac{۱}{R_{\text{rad}}}$ و $\sum \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)$ را برای گره‌های ۱ و ۲ بر پایه این فرض حساب می‌کنیم.

۳- سری معادلات مزبور را حل کرده، $T_۱$ تا T_∞ را به‌دست می‌آوریم.

۴- با استفاده از مقادیر جدید $T_۱$ و $T_۲$، مقادیر $\frac{۱}{R_{\text{rad}}}$ را دوباره محاسبه می‌کنیم.

۵- معادلات را مجدداً با استفاده از مقادیر جدید حل می‌کنیم.

۶- روش مزبور را تا جایی که جواب‌ها به حد کافی هم‌گرا شوند تکرار می‌کنیم.

نتایج شش تکرار در جدول صفحه بعد نشان داده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، هم‌گرایی خیلی سریع است. دماها بر حسب درجه کلوین‌اند.

در اینجا یادآور می‌شویم که در مسأله عملی مقدار ε فقط با تولرانس چند درصد

معلوم می‌شود و بنابراین اگر این راه حل را با دقت نامناسبی اجرا کنیم، چیزی حاصل نمی‌شود.

گرمای تلف‌شده با محاسبه تابش و جابه‌جایی از سطح بالایی (گره‌های ۱ و ۲ و ۳) معین می‌شود:

$$q_{\text{تابشی}} = \sum \sigma \varepsilon A_i (T_i^۴ - ۳۲۳^۴) = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(۰/۷)(۰/۰۰۵)$$
$$[(۲)(۱۰۲۰/۸۸^۴ - ۳۲۳^۴) + ۹۸۴/۳۱۳^۴ - ۳۲۳^۴)]$$
$$= ۶۱۰/۸ \frac{W}{m^۲_{\text{عمق}}}$$

$$q_{\text{جابه‌جایی}} = \sum hA_i\, (T_i - ۳۲۳) = (۵۰)(۰/۰۰۵)$$
$$[(۲)(۱۰۲۰/۸۸ - ۳۲۳) + ۹۸۴/۳۱۳ - ۳۲۳]$$
$$= ۵۱۴/۲۷\ W$$

$$q_{\text{کل}} = ۶۱۰/۸ + ۵۱۴/۲۷ = ۱۱۲۵/۰۷ \frac{W}{m^۲_{\text{عمق}}}$$

این مقدار را می‌توان با محاسبه هدایت وارد شده از سطوح $۹۰۰\ ^\circ C$ بررسی کرد:

$$q_{\text{هدایتی}} = \sum kA_i \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{(۲)(۳/۰)}{۰/۰۰۵}$$
$$[(۰/۰۰۲۵)(۱۱۷۳ - ۱۰۲۰/۸۷۹) + (۰/۰۰۵)(۱۱۷۳ - ۱۰۹۲/۳۶۹)$$
$$+ (۰/۰۰۲۵)(۱۱۷۳ - ۱۱۱۱/۳۸۴)]$$
$$= ۱۱۲۴/۹۹ \frac{W}{m^۲_{\text{عمق}}}$$

که ملاحظه می‌شود دو مقدار خیلی به هم نزدیک‌اند.

گره	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۵$	$T_۷$	$T_۸$
۱	۹۹۰/۸۴۰	۹۴۴/۹۲۹	۱۰۷۶/۱۸۱	۱۰۴۱/۹۳۴	۱۰۹۸/۹۵۱	۱۰۷۰/۴۴۲
۲	۱۰۲۶/۲۶۳	۹۹۱/۴۴۶	۱۰۹۵/۲۷۹	۱۰۶۸/۲۳۳	۱۱۱۳/۶۲۲	۱۰۹۰/۹۲۷
۳	۱۰۱۹/۸۷۹	۹۸۲/۹۷۹	۱۰۹۱/۸۲۷	۱۰۶۳/۴۶۲	۱۱۱۰/۹۶۷	۱۰۸۷/۲۱۵
۴	۱۰۲۱/۰۵۶	۹۸۴/۵۴۸	۱۰۹۲/۴۶۴	۱۰۶۴/۲۴۴	۱۱۱۱/۴۵۷	۱۰۸۷/۹۰۱
۵	۱۰۲۰/۸۴۰	۹۸۴/۲۶۰	۱۰۹۲/۳۴۷	۱۰۶۴/۱۸۲	۱۱۱۱/۲۶۷	۱۰۸۷/۷۷۵
۶	۱۰۲۰/۸۷۹	۹۸۴/۳۱۳	۱۰۹۲/۳۶۹	۱۰۶۴/۲۱۲	۱۱۱۱/۳۸۴	۱۰۸۷/۷۹۸

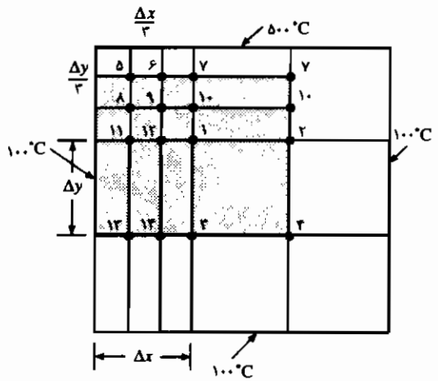
مثال ۳-۱۱ کاربرد شبکهٔ با اندازه متغیر

در مسأله با شبکه ریزتر می‌توان برای کمک به مناطقی که گرادیان دما بیش‌تر است از شبکه با اندازه متغیر استفاده کرد. مطابق شکل دماهای مرزی همان دماهای شکل ۳-۶ اند. می‌خواهیم دماهای گرهی را یافته، آنها را با جواب قبلی مقایسه کنیم. به تقارن مسأله توجه کنید؛ $T_۱ = T_۲$ ، $T_۳ = T_۴$ و الی آخر.

حل :

گره‌های ۵ و ۶، ۸ و ۹ گره‌های داخلی با $\Delta x = \Delta y$ بوده، دارای معادلات گرهی به صورت معادله (۳-۲۴) است. بنابراین:

$$۶۰۰ + T_۶ + T_۸ - ۴T_۵ = ۰$$
$$۵۰۰ + T_۵ + T_۷ + T_۹ - ۴T_۶ = ۰$$
$$۱۰۰ + T_۵ + T_۹ + T_{۱۱} - ۴T_۸ = ۰$$
$$T_۸ + T_۶ + T_{۱۰} + T_{۱۲} - ۴T_۹ = ۰$$



شکل مثال ۳-۱۱

برای گره ۷ می‌توان از فرمول‌بندی مقاومتی استفاده کرد و داریم:

$$\frac{۱}{R_{۷-۶}} = k$$

$$\frac{۱}{R_{۷-۵۰۰^\circ}} = \frac{k\left(\frac{\Delta x}{۶} + \frac{\Delta x}{۲}\right)}{\frac{\Delta y}{۳}} = ۲k$$

$$\frac{۱}{R_{۷-۱۰}} = ۲k$$

و به معادلهٔ زیر دست می‌یابیم:

$$۱۰۰۰ + T_۶ + ۲T_{۱۰} - ۵T_۷ = ۰$$

برای گره ۱۰ به مقاومت‌های مشابهی می‌رسیم:

$$\frac{۱}{R_{۱۰-۹}} = k$$

$$\frac{۱}{R_{۱۰-۷}} = ۲k = \frac{۱}{R_{۱۰-۱}}$$

بنابراین:

$$۲T_۷ + T_۹ + ۲T_۱ - ۵T_{۱۰} = ۰$$

برای گره ۱ داریم :

$$\frac{۱}{R_{۱-۱۲}} = \frac{k\left(\frac{\Delta y}{۶} + \frac{\Delta y}{۲}\right)}{\frac{\Delta x}{۳}} = ۲k$$

$$\frac{۱}{R_{۱-۳}} = \frac{k\left(\frac{\Delta x}{۶} + \frac{\Delta x}{۲}\right)}{\Delta y} = \frac{۲k}{۳}$$

$$\frac{۱}{R_{۱-۱۰}} = ۲k$$

و معادله گرهی به صورت زیر در می‌آید:

$$۳T_{۱۲} + ۳T_{۱۰} + T_۳ - ۷T_۱ = ۰$$

برای گره ۱۱ :

$$\frac{۱}{R_{۱۱-۱۰۰^\circ}} = \frac{۱}{R_{۱۱-۱۲}} = \frac{k\left(\frac{\Delta y}{۶} + \frac{\Delta y}{۲}\right)}{\frac{\Delta x}{۳}} = ۲k$$

$$\frac{۱}{R_{۱۱-۸}} = k$$

$$\frac{۱}{R_{۱۱-۱۳}} = \frac{k\left(\frac{\Delta x}{۳}\right)}{\Delta y} = \frac{k}{۳}$$

و معادله گرهی چنین است:

$$۶۰۰ + ۶T_{۱۲} + ۳T_{۸} + T_{۱۳} - ۱۶T_{۱۱} = ۰$$

به همین ترتیب، معادلهٔ گره ۱۲ عبارت است از:

$$۳T_{۹} + ۶T_{۱۱} + ۶T_{۱} + T_{۱۴} - ۱۶T_{۱۲} = ۰$$

برای گره ۱۳ :

$$\frac{۱}{R_{۱۳\text{-}۱۰۰^{\circ}}} = \frac{k\Delta y}{\frac{\Delta x}{۳}} = ۳k = \frac{۱}{R_{۱۳\text{-}۱۴}}$$

$$\frac{۱}{R_{۱۳\text{-}۱۱}} = \frac{۱}{R_{۱۳\text{-}۱۰۰}} = \frac{k}{۳}$$

و داریم:

$$۱۰۰۰ + ۹T_{۱۴} + T_{۱۱} - ۲۰T_{۱۳} = ۰$$

به همین ترتیب، برای گره ۱۴ داریم:

$$۱۰۰ + ۹T_{۱۳} + ۹T_{۴} + T_{۱۲} - ۲۰T_{۱۴} = ۰$$

و بالاخره معادله گرهی مربوط به گره ۳ با توجه به مقاومت‌های پیدا شده، چنین می‌شود:

$$۲۰۰ + ۹T_{۱۴} + ۲T_{۱} - ۱۳T_{۳} = ۰$$

این سری معادلات را با استفاده از روش تکراری گوس - سایدل حل می‌کنیم و در نتیجه آنها را به صورت $T_i = f(T_j)$ می‌نویسیم. مقادیر اولیه T_i را صفر می‌گیریم و جواب را با استفاده از کامپیوتر به‌دست می‌آوریم.

نتایج محاسبات را در جدول زیر نشان داده‌ایم.

گره	تعداد تکرار				
	۲	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰
۱	۵۹/۲۰۶۶۲	۲۳۲/۶۶۶۸	۲۴۷/۱۴۷۹	۲۴۷/۷۶۰۵	۲۴۷/۷۸۷۵
۲	۵۹/۳۰۶۶۲	۲۳۲/۶۶۶۸	۲۴۷/۱۴۷۹	۲۴۷/۷۶۰۵	۲۴۷/۷۸۷۵
۳	۵۰/۱۱۰۷۳	۱۳۹/۵۰۸۱	۱۴۷/۲۳۵۲	۱۴۷/۵۶۲۹	۱۴۷/۵۷۷۳
۴	۵۰/۱۱۰۷۳	۱۳۹/۵۰۸۱	۱۴۷/۲۳۵۲	۱۴۷/۵۶۲۹	۱۴۷/۵۷۷۳
۵	۲۰۶/۲۵	۲۸۸/۳۵۸	۲۹۳/۷۸۳۸	۲۹۴/۰۱۲۹	۲۹۴/۰۲۳
۶	۲۴۸/۷۵	۳۵۹/۰۲۵	۳۶۶/۹۸۷۸	۳۶۷/۳۲۴۳	۳۶۷/۳۳۹۱
۷	۲۹۱/۴۵	۳۹۰/۹۸۹	۳۹۸/۷۲۴۳	۳۹۹/۰۵۱۳	۳۹۹/۰۶۵۷
۸	۱۰۲/۹۲۹۷	۲۰۰/۵۶۰۸	۲۰۸/۴۰۶۸	۲۰۸/۷۳۸۴	۲۰۸/۷۵۳
۹	۱۲۱/۲۳۳۴	۲۶۴/۲۴۲۳	۲۷۵/۷۵۹۲	۲۷۶/۲۴۶۲	۲۷۶/۲۶۷۷
۱۰	۱۶۴/۵۴۹۳	۳۰۲/۳۱۰۸	۳۱۳/۵۰۰۷	۳۱۳/۹۷۴	۳۱۳/۹۹۴۸
۱۱	۷۰/۹۵۴۵۹	۱۵۶/۹۹۷۶	۱۶۴/۳۹۴۷	۱۶۴/۷۰۷۶	۱۶۴/۷۲۱۵
۱۲	۷۳/۸۹۰۵۱	۲۰۳/۶۴۳۷	۲۱۴/۵۰۳۹	۲۱۴/۹۶۳۴	۲۱۴/۹۸۳۶
۱۳	۷۰/۱۸۹۰۵	۱۱۵/۲۶۳۵	۱۱۹/۲۰۷۹	۱۱۹/۳۷۵۲	۱۱۹/۳۸۲۶
۱۴	۶۲/۸۲۹۴۲	۱۲۹/۸۲۹۴	۱۳۵/۶۲۴۶	۱۳۵/۸۷۰۳	۱۳۵/۸۸۱۱

توجه کنید که این جواب‌های $T_۱ = T_۲ = ۲۴۷/۷۹\,^{\circ}C$ و $T_۳ = T_۴ = ۱۴۷/۵۸\,^{\circ}C$ اندکی کم‌تر از مقادیر ۲۵۰ °C و ۱۵۰ °C مربوط به زمانی هستند که فقط چهار گره انتخاب شده بود، ولی فقط اندکی کم‌ترند.

نکاتی در مورد جواب‌های کامپیوتری

باید تا اینجا روشن شده باشد که روش‌های عددی و کامپیوترها ابزارهایی برای حل مسائل پیچیدهٔ انتقال‌گرما در اختیار مهندس‌اند. بسته‌های بزرگ نرم‌افزاری تجاری زیادی موجود است و بسته‌های جدید نیز مرتب به بازار عرضه می‌شوند. مشخصه مشترک تمام نرم افزارهای انتقال گرما آن است که کاربر باید چیزی راجع به موضوع انتقال گرما درک کند. بدون این درک به سادگی اشتباهات بزرگ ایجاد شده و نمی‌توان هرگز آنها را پیدا کرد. نشان دادیم که چگونه توازن انرژی راهی برای بررسی اعتبار جواب کامپیوتری است. گاهی حس مشترک نیز خوب کار می‌کند. مثلاً می‌دانیم که وقتی هوا در عرض صفحه‌ای بوزد زودتر خنک می‌شود تا وقتی که در معرض هوای ساکن است. بعداً در فصل‌های ۵ تا ۷ چگونگی به کمیّت درآوردن این آثار را خواهیم دید و خواهیم توانست اثر آنها بر راه حل عددی مسأله هدایت را پیش بینی کنیم. در مورد شرایط مرزی تابشی نیز همین مطلب صادق است و آن‌را در فصل ۸ بررسی می‌کنیم. این یافته‌ها در مورد این‌که آثار شرایط مرزی چیست و آیا جواب عددی حاصل برای مسأله‌ای، درست است یا نه «حس» می‌دهد. تا این‌جا، شرایط مرزی کمیت‌هایی توافقی بوده‌اند اما کسانی‌که عملاً در انتقال گرما کار کرده‌اند می‌دانند که تعیین آنها در دنیای واقعی به ندرت ساده است.

❑ ۳-۹ تشابه الکتریکی برای هدایت دو بعدی

هدایت برق حالت پایدار در جسم همگن با مقاومت مخصوص ثابت، مشابه هدایت گرمایی حالت پایدار در جسم با شکل هندسی مشابه است. در مورد هدایت برقی دو بعدی از معادله لاپلاس استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial^۲ E}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ E}{\partial y^۲} = ۰$$

که E پتانسیل الکتریکی است. یک راه بسیار ساده حل مسأله هدایت گرمای دو بعدی آن است که تشابهی الکتریکی برای آن ساخته، به طور تجربی ضرایب شکل هندسی را برای استفاده در معادله (۳-۲۳) معین کنیم. یک راه انجام این عمل استفاده از نوعی کاغذ تجاری است که روی آن را لایهٔ نازکی هادی پوشانده‌اند. این کاغذ را می‌توان به صورت مدل هندسی دقیق سیستم هدایت گرمای دو بعدی، برید. در لبه‌های کاغذ، هادی‌های الکتریکی خوبی می‌چسبانیم تا شرایط مرزی دمای مسأله را شبیه سازی کنیم. سپس این مدل را تحت اختلاف پتانسیل الکتریکی قرار می‌دهیم. می‌توان توجه کرد که مقاومت کاغذ در مقایسه با هادی‌های چسبانده شده به لبه‌ها خیلی بالا است به‌طوری که شرایط پتانسیل ثابت را می‌توان در منطقه تماس تأمین کرد.

وقتی که پتانسیل الکتریکی روی کاغذ اعمال شود، برای رسم خطوط پتانسیل الکتریکی ثابت می‌توان از ولت‌متر معمولی استفاده کرد. با در دست داشتن این خطوط پتانسیل ثابت، خطوط شار را می‌توان به‌سادگی رسم کرد زیرا عمود بر خطوط پتانسیل‌اند. این خطوط هم پتانسیل و شار دقیقاً همان آرایش خطوط هم دما و شار گرمایی مسأله هدایت گرما را دارد. ضریب شکل را می‌توان سریعاً با استفاده از روشی که در مورد مربع‌های منحنی‌الخط اعمال شد، محاسبه کرد.

تشابه ورق - هدایتی را نمی‌توان در مورد مسائل با تولید گرما به‌کار برد؛ گرچه شرایط مرزی جابه‌جایی را می‌توان با اندکی زحمت با افزودن مقاومت‌های مناسب، بررسی کرد. اشنایدر *Schneider*[۲] و اوزیسیک [۱۲] روش ورق هدایتی و سایر تشابه‌ها را در بررسی مسائل انتقال گرمای هدایتی مورد بحث قرار می‌دهند و کایان *kayan* [۴ و ۵] بررسی مشروحی از روش ورق هدایتی عرضه می‌کند.

❑ ۳-۱۰ خلاصه

هزاران راه حل تحلیلی برای مسائل انتقال گرمای حالت پایدار در ادبیات فنی وجود دارد. در عصر کامپیوتر، اغلب این راه‌حل‌ها، علی‌رغم تسهیلاتی که در ریاضی به وجود می‌آورند، کم‌فایده است، یعنی نمی‌توانیم از نتایج تجربه گذشته برای پیش‌بینی جواب مسائل جدید استفاده کنیم بلکه، در اغلب مواقع، مسأله مورد نظر را می‌توان مستقیماً با روش‌های عددی حل کرد، به‌جز وقتی که راه ساده‌تری برای انجام آن وجود داشته باشد. به‌طور خلاصه، چند پیشنهاد زیر ارائه می‌شود:

۱- در موقع حل مسأله انتقال گرمای دو یا سه بعدی، نخست سعی کنید آن‌را به مسأله‌ای یک بعدی تبدیل کنید. مثالی از این قسم، استوانه‌ای با طول خیلی بزرگ‌تر از قطرش است.

۲- در صورت امکان مدل ضریب شکل ساده‌ای انتخاب کنید که بتواند دقیقاً یا تقریباً وضعیت فیزیکی را نمایندگی کند. توصیه‌های ۴ و ۵ را ملاحظه کنید.

۳- راه‌حل‌های تحلیلی ساده‌ای را جستجو کنید ولی چنانچه راه حل‌ها خیلی پیچیده‌اند مستقیماً از روش‌های عددی استفاده کنید.

۴- توجه داشته باشید که در مسائل عملی شرایط مرزی جابه‌جایی و تابش زیاد خطا دارند و این بدان معنی است که در اغلب وضعیت‌های عملی، توجه بیش از حد به دقت جواب معادله گرهی عددی بی‌مورد است.

۵- به طور کلی، راه‌حل را از جهت ساده به پیچیده پی‌گیری کرده، در طول مسیر علامت تأیید روی آنها بگذارید.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ فرض اصلی در روش جداسازی متغیرها برای حل معادله لاپلاس چیست؟

۲ ضریب شکل هدایت را تعریف کنید.

۳ روش اساسی در راه‌حل عددی مسأله دو بعدی چیست؟

۴ وقتی معادلات تفاضل محدود مسأله هدایت به‌دست آمد روش‌های موجود حل آنها چیست؟ مزیت‌ها و عیب‌های هر روش چیست و هرکدام از آنها را در کجا باید به کار برد؟

۵ ببینید در مرکز کامپیوتر دانشگاه شما برای حل مسائل انتقال گرمای هدایتی چه برنامه‌های فرعی موجود است.

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۳-۱ لوله دفن شده

۳-۲ کوره مکعبی

۳-۳ دیسک دفن شده

۳-۴ دیسک‌های دفن شده موازی

۳-۵ مسأله نُه گره

۳-۶ محاسبه گوس ـ سایدل

۳-۷ فرمول‌بندی عددی با تولید گرما

۳-۸ تولید گرما با اجزای گرهی غیر یکنواخت

۳-۹ ماده مرکب با اجزای گرهی غیر یکنواخت

۳-۱۰ هدایت مرزی تابشی

۳-۱۱ کاربرد شبکه با اندازه متغیرها

❑ مسائل

۳-۱ با شروع از جواب‌های جداسازی متغیرها برای $\lambda^۲ = ۰$ و $\lambda^۲ < ۰$ [معادلات (۳-۹) و (۳-۱۰)] نشان دهید که در هیچ‌کدام از این دو شکل جواب، چنان‌چه دما در $y = H$ ثابت باشد، شرایط مرزی صادق نیست. یعنی نشان دهید که برای آنکه شرایط مرزی زیر صادق باشد:

$$T = T_۱ \quad \text{در} \quad y = ۰$$
$$T = T_۱ \quad \text{در} \quad x = ۰$$
$$T = T_۱ \quad \text{در} \quad x = W$$
$$T = T_۲ \quad \text{در} \quad y = H$$

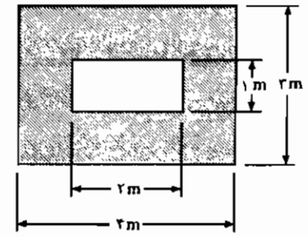
با استفاده از معادلهٔ (۳-۹) و یا (۳-۱۰) جواب بدیهی یا از نظر فیزیکی بی‌معنی به‌دست می‌آید.

۳-۲ چهار جمله غیر صفر اولیهٔ سری داده شده در معادله (۳-۲۰) را بنویسید. چنانچه در $y = H$ و $x = \frac{W}{۲}$ فقط این چهار جمله اولیه را به‌کار ببریم درصد خطا چه‌قدر است؟

۳-۳ لوله‌ای به قطر ۶ cm که دمای سطحی آن ۲۱۰ °C است از مرکز دال بتنی به ۴۵ cm عبور می‌کند. دمای سطح بیرونی دال برابر ۱۵ °C است. با استفاده از منحنی شار، اتلاف گرمای لوله را در واحد طول حساب کنید.

۴-۳ لوله جدار ضخیمی از جنس مونل Monel (نام تجارتی آلیاژی مقاوم در مقابل خوردگی با ۶۷٪ نیکل و ۳۰٪ مس و ۳٪ آلومینیوم و یا سیلیس. م) به قطر درونی ۲/۵ cm و قطر بیرونی ۵ cm را با لایه‌ای پشم‌شیشه به ضخامت ۲/۵ cm پوشانده‌اند. دمای درونی لوله ۳۰۰ °C و دمای بیرونی عایق ۴۰ °C است. اتلاف گرما به ازای فوت طول چه‌قدر است؟ برای مونل $k = ۱۱ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$ در نظر بگیرید.

۵-۳ دیواره کوره‌ای متقارن دارای ابعاد نشان داده شده زیر است. با استفاده از منحنی شار، ضریب شکل این دیواره را به‌دست آورید.



شکل م ۳-۵.

۶-۳ کوره‌ای به ابعاد داخلی ۱ در ۲ در ۳ فوت از ماده‌ای به ضریب هدایت گرمایی $۰/۵ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$ ساخته شده است. ضخامت دیواره ۶ in است. دمای سطح درونی و بیرونی به ترتیب ۱۰۰۰ و ۲۰۰ °F‌اند. اتلاف گرما از دیواره کوره را حساب کنید.

۷-۳ مکعبی به ضلع بیرونی ۳۵ cm از آجر نسوز ساخته شده است. ضخامت دیواره آن ۵ cm و دمای سطح درونی ۵۰۰ °C و سطح بیرونی ۸۰ °C است. جریان گرما را بر حسب وات حساب کنید.

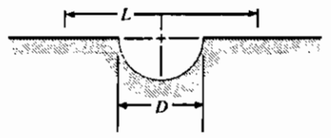
۸-۳ دو استوانه بلند به قطرهای ۸/۰ و ۳/۰ cm با ماده‌ای به $k = ۱/۴ \frac{W}{m.^\circ C}$ کاملاً پوشانده شده‌اند. فاصله بین مراکز آنها ۱۰ cm بوده و دمای آنها ۲۰۰ و ۳۵ °C است. آهنگ انتقال گرما در واحد طول را حساب کنید.

۹-۳ کره‌ای به قطر ۱ متر و دمای ۳۰ °C را در خاک و در جایی که $k = ۱/۷ \frac{W}{m.^\circ C}$ است دفن کرده‌ایم. عمق تا خط مرکزی برابر ۲/۴ متر بوده، دمای سطح خاک ۰ °C است. گرمای تلف‌شده از کره را حساب کنید.

۱۰-۳ کره‌ای به قطر ۲۰ cm را به طور کامل در مقدار زیادی پشم شیشه پوشانده‌ایم. در داخل کره گرم‌کنی وجود دارد که دمای سطح بیرونی آن‌را در حالی که دمای لبه بیرونی پشم شیشه ۲۰ °C است در ۱۷۰ °C ثابت نگه می‌دارد. مقدار توانی را که باید برای تأمین شرایط تعادل به گرم‌کن داد حساب کنید.

۱۱-۳ مخزنی کروی و بزرگ به قطر ۲ متر را در خاک و در جایی که ضریب هدایت گرمایی آن $۱/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ است دفن کرده‌ایم. مخزن را برای ذخیره مخلوط یخ در ۰ °C به کار می‌بریم و دمای محیط خاک ۲۰ °C است. اتلاف گرما از این مخزن را حساب کنید.

۱۲-۳ جسم صلب نشان داده شده در شکل زیر دارای سطحی فوقانی با برش نیم استوانه به دمای ۱۰۰ °C است. در عمق زیاد در این جسم، دما برابر ۳۰۰ K و $k = ۱ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. انتقال گرما از سطح را برای ناحیه‌ای که $L = ۳۰ cm$ و $D = ۱۰ cm$ است حساب کنید.



شکل م ۳-۱۲.

۱۳-۳ در بعضی مناطق، انتقال قدرت به وسیله کابل‌های زیرزمینی صورت می‌گیرد. در یک نمونه، کابلی به قطر ۸/۰ cm در عمق ۱/۳ متر دفن شده و مقاومت کابل $۱/۱ \times ۱۰^{-۴} \frac{\Omega}{m}$ می‌باشد. دمای سطح زمین ۲۵ °C و $k = ۱/۲ \frac{W}{m.^\circ C}$ برای خاک است. اگر دمای بیرونی کابل نتواند بیش از ۱۱۰ °C باشد حداکثر شدت جریان مجاز را حساب کنید.

۱۴-۳ کره‌ای از جنس مس به قطر ۴/۰ cm در دمای ثابت ۷۰ °C قرار دارد و در ناحیه وسیع خاکی که $k = ۱/۳ \frac{W}{m.^\circ C}$ است فرو برده شده است. دما در فاصله‌ای خیلی دور از این کره ۱۲ °C است. گرمای تلف‌شده از کره را حساب کنید.

۱۵-۳ دو استوانه بلند خارج از مرکز به ترتیب دارای قطرهای ۱۵ و ۴ cm بوده، به دمای ۱۰۰ و ۲۰ °C رسیده و با ماده‌ای با $k = ۳/۰ \frac{W}{m.^\circ C}$ از هم جدا شده‌اند. فاصلهٔ بین دو مرکز ۴/۵ cm است. انتقال گرما را به ازای واحد طول بین دو استوانه حساب کنید.

۱۶-۳ دو لوله در خاک دفن شده و دمای آنها ۳۰۰ و ۱۲۵ °C است. قطرها به ترتیب ۸ و ۱۶ cm بوده و فاصلهٔ بین دو مرکز ۴۰ cm است. آهنگ انتقال گرما به‌ازای واحد طول را در صورتی که ضریب هدایت گرمایی خاک در این محل $۰/۷ \frac{W}{m.^\circ C}$ باشد حساب کنید.

۱۷-۳ کره داغی به قطر ۱/۵ متر و دمای ۳۰۰ °C در ماده‌ای به $k = ۱/۲ \frac{W}{m.^\circ C}$ دفن شده و دمای سطح بیرونی آن ۳۰ °C است. عمق خط مرکز کره ۳/۷۵ متر است. گرمای تلف‌شده را بیابید.

۱۸-۳ برای اندازه‌گیری ضریب هدایت گرمایی خاک، میله بلندی که به طریق الکتریکی گرم شده به طور عمودی در زمین فرو می‌کنند. در این طرح قطر میله ۲/۵ cm و طول آن ۱ متر است. برای اجتناب از تغییرات نادرست خاک، در موقعی که دمای آن ۱۰ °C است، حداکثر دمای سطحی میله ۵۵ °C می‌باشد. به فرض ضریب هدایت خاک $۱/۷ \frac{W}{m.^\circ C}$ باشد مقدار توان لازم گرم‌کن را بر حسب وات بیابید.

۱۹-۳ دو لوله در مادهٔ عایقی به $k = ۰/۸ \frac{W}{m.^\circ C}$ دفن شده‌اند. قطر یکی از آنها ۱۰ cm بوده، سیال گرمی به دمای ۳۰۰ °C و لولهٔ دیگر به قطر ۲/۸ cm بوده، سیال سردی به دمای ۱۵ °C را حمل می‌کنند. لوله‌ها به موازات هم و به فاصلهٔ مرکز به مرکز ۱۲ cm قرار دارند. آهنگ انتقال گرمای بین دو لوله را به ازای متر طول حساب کنید.

۲۰-۳ در محلی ضریب هدایت‌گرمایی خاک برابر $۱/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ است در آنجا کرهٔ هم‌دمایی به دمای ۵ °C و قطر ۲ m در عمق ۵ m تا مرکز کره، دفن کرده‌اند. دمای زمین ۲۵ °C است. گرمای تلف‌شده از کره را حساب کنید.

۲۱-۳ گاهی بی احتیاطی کرده، لوله‌های بخار را بدون عایق در زمین دفن می‌کنند. لوله‌ای به قطر ۴ in. حاوی بخار ۳۰۰ °F در نظر بگیرید که در عمقی به فاصله ۹ in. با مرکز لوله دفن شده باشد. طول لوله دفن شده ۱۰۰ یارد است. به فرض ضریب هدایت‌گرمایی خاک $۱/۲ \frac{W}{m.^\circ C}$ و دمای سطح آن ۶۰ °F باشد اتلاف گرما از لوله را برآورد کنید.

۲۲-۳ دو لوله موازی با هم به قطرهای ۵ cm و ۱۰ cm را کاملاً در آزبست شل بسته پیچیده‌اند. فاصلهٔ بین مراکز لوله‌ها ۲۰ cm است. یکی از لوله‌ها حاوی بخار ۱۱۰ °C و دیگری حاوی آب سرد به دمای ۳ °C اتلاف گرما از لولهٔ گرم به ازای واحد طول لوله را حساب کنید.

۲۳-۳ دمای سطح استوانه‌ای بلند ۱۳۵ °C بوده و در ماده‌ای به ضریب هدایت گرمایی $۱۵/۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ دفن شده است. قطر لوله ۳ cm بوده و در عمق ۵ cm تا مرکز دفن شده است. دمای سطح ماده ۴۶ °C است. گرمای تلف‌شده از متر طول استوانه را حساب کنید.

۲۴-۳ کره‌ای به قطر ۳ m حاوی مخلوطی از یخ و آب به دمای ۰ °C بوده، در محیطی نیمه بی‌نهایت به ضریب هدایت گرمایی $۰/۲ \frac{W}{m.^\circ C}$ دفن می‌شود. دمای سطح فوقانی محیط دفن ۳۰ °C و ثابت است و خط مرکزی دفن کره تا سطح ۸/۵ m است. اتلاف گرما از کوره را بیابید.

۲۵-۳ گرم‌کنی برقی که به صورت صفحه‌ای ۵۰ در ۱۰۰ cm است بر سطح فوقانی ماده‌ای عایق نیمه بی‌نهایت به ضریب هدایت گرمایی $۰/۷۴ \frac{W}{m.^\circ C}$ قرار داده شده است. دمای صفحهٔ گرم‌کن در تمام سطح ۱۲۰ °C و دمای مادهٔ عایق در فاصلهٔ بسیار دور از گرم‌کن ۱۵ °C است. گرمای هدایت شده به داخل ماده عایق را بیابید.

۲۶-۳ ابعاد داخلی کوره‌ای کوچک ۶۰ در ۷۰ در ۸۰ cm و ضخامت دیوارهٔ آن ۵ cm است. ضریب شکل را بیابید.

۲۷-۳ دمای لوله‌ای حاوی بخار به قطر ۱۵ cm برابر ۱۵۰ °C بوده و لوله در داخل خاک و در نزدیکی لوله‌ای به قطر ۵ cm حاوی آب سرد ۵ °C دفن شده است. فاصلهٔ مرکز به مرکز دو لوله برابر ۱۵ cm و ضریب هدایت گرمایی خاک محل $۰/۷ \frac{W}{m.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از لوله بخار را به ازای واحد طول لوله حساب کنید.

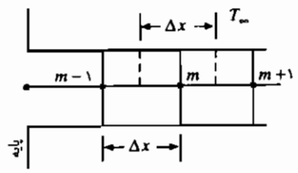
۲۸-۳ برای گره داخلی در مسأله انتقال گرمای سه بعدی، معادله‌ای هم‌ارز معادله (۳-۲۴) به‌دست آورید.

۲۹-۳ برای گره داخلی در مسأله انتقال گرمای یک بعدی، معادله‌ای هم‌ارز معادله (۳-۲۴) به‌دست آورید.

۳۰-۳ برای شرط مرزی جابه‌جایی یک بعدی، معادله‌ای هم‌ارز معادله (۳-۲۵) به‌دست آورید.

۳۱-۳ با بررسی مسائل پره یک بعدی فصل ۲، نشان دهید که معادله گرهی برای گره‌های در طول پرهٔ شکل زیر را می‌توان چنین بیان کرد:

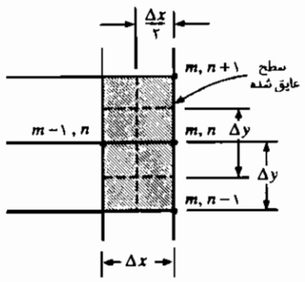
$$T_m\left[\frac{hP(\Delta x)^۲}{kA} + ۲\right] - \frac{hP(\Delta x)^۲}{kA}T_\infty - (T_{m-۱} + T_{m+۱}) = ۰$$



شکل م ۳-۳۱.

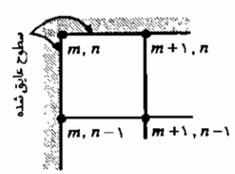
۳۲-۳ نشان دهید که معادله گرهی دیوار عایق شکل زیر عبارت است از:

$$T_{m,n+۱} + T_{m,n-۱} + T_{m-۱,n} - ۴T_{m,n} = ۰$$



شکل م ۳-۳۲.

۳۳-۳ برای مقطع گوشه عایق‌شده شکل زیر، معادلهٔ گرهی مربوط به گره (m,n) را در شرایط حالت پایدار به‌دست آورید.



شکل م ۳-۳۳.

۳۴-۳ معادلهٔ جدول (۳-۲ چ) را به‌دست آورید.

۳۵-۳ معادله‌ای برای گرهٔ مرزی که تحت شار گرمایی ثابت محیط است به‌دست آورید. از نام‌گذاری شکل ۳-۷ استفاده کنید.

۳۶-۳ معادلات گرهی را برای مثال ۳-۵ در حالی به‌دست آورید که نیمه سمت چپ سیم عایق بوده، نیمه سمت راست در معرض محیط جابه‌جایی به $h = ۲۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T = ۲۰ ^\circ C$ قرار گرفته باشد.

۳-۳۷ در کاری که برای استفاده از انرژی آفتابی در نظر گرفته شده، شار آفتابی بر لوله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ به‌قطر خارجی ۵cm، $\left[k = ۱۶ \frac{W}{m.°C}\right]$ و به‌طول ۲ متر متمرکز شده است. شار انرژی روی سطح لوله $۲۰۰۰۰ \frac{W}{m^۲}$ بوده و ضخامت دیوارهٔ لوله ۲ میلی‌متر است. در داخل لوله‌ها آب جوش جریان دارد که ضریب جابه‌جایی آن $۵۰۰۰ \frac{W}{m^۲.°C}$ و دمایش ۲۵۰ °C است. دوسر لوله در نگه‌دارنده‌ای مناسب سوار شده که دمایشان را در ۱۰۰ °C ثابت نگه می‌دارد. گرادیان دما در نزدیک نگه‌دارنده‌ها از نظر ملاحظات تنش گرمایی، مهم است. با فرض یک بعدی بودن سیستم، گرادیان دما در نزدیکی نگه‌دارنده‌ها را به طریق حل عددی به‌دست آورید.

۳-۳۸ میله‌ای آلومینیومی به قطر ۲/۵ cm و طول ۱۵ cm از دیواره‌ای به دمای ۳۰۰ °C بیرون آمده است. دمای محیط ۳۸ °C می‌باشد. ضریب انتقال گرما $۱۷ \frac{W}{m^۲.°C}$ است. با استفاده از روش عددی و در رابطه با نتیجه حاصل از مسأله ۳-۳۱، دماها در طول میله را به‌دست آورید. سپس جریان گرما از دیوار مزبور را در $x = ۰$ به‌دست آورید. تذکر: شرط مرزی در سر میله را می‌توان چنین بیان کرد:

$$T_m\left[\frac{h\Delta x}{k}+\frac{hp(\Delta x)^۲}{۲kA}+۱\right]-T_\infty\left[\frac{h\Delta x}{k}+\frac{hp(\Delta x)^۲}{۲kA}\right]-T_{m-۱}=۰$$

که m نشان دهندهٔ گره در نوک پره است. جریان گرما در پایه برابر است با:

$$q_{x=۰} = \frac{-kA}{\Delta x}(T_{m+۱} - T_m)$$

که T_m دمای پایه و $T_{m+۱}$ دما در اولین نمو است.

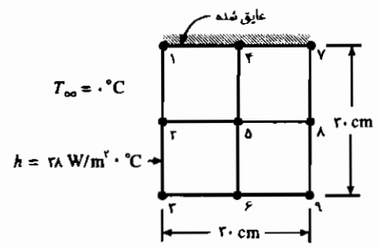
۳-۳۹ مسأله ۳-۳۸ را با استفاده از تغییر خطی ضریب انتقال گرما بین دمای پایه و نوک پره تکرار کنید. فرض کنید که در پایه $h = ۲۸ \frac{W}{m^۲.°C}$ و در نوک $h = ۱۱ \frac{W}{m^۲.°C}$ است.

۳-۴۰ در دیوارهٔ مسأله ۳-۵ از ماده‌ای به $k = ۱/۴ \frac{W}{m.°C}$ استفاده شده است. دمای سطح درونی و بیرونی دیواره به ترتیب ۶۵۰ و ۱۵۰ °C است. با استفاده از روش عددی، جریان گرما از دیواره را محاسبه کنید.

۳-۴۱ به فرض دیوار بیرونی در معرض محیطی به دمای ۳۸ °C قرار گرفته و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۱۷ \frac{W}{m^۲.°C}$ باشد، مسأله ۳-۴۰ را تکرار کنید. به فرض دمای سطح درونی ۶۵۰ °C است.

۳-۴۲ مسأله ۳-۳ را با استفاده از روش عددی تکرار کنید.

۳-۴۳ در مقطع مسأله نشان داده شده در زیر، سطح ۷-۴-۱ عایق‌شده است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح ۳-۲-۱ برابر $۲۸ \frac{W}{m^۲.°C}$ و ضریب هدایت گرمایی جسم جامد $۵/۲ \frac{W}{m.°C}$ می‌باشد. با استفاده از روش عددی، دمای نقاط ۱ و ۲ و ۴ و ۵ را بیابید.



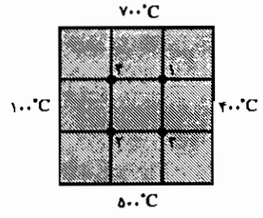
شکل م ۳-۴۳.

۳-۴۴ تیغه‌ای شیشه‌ای به ابعاد ۳ در ۱۲ در ۱۲ in. $\left[k = ۰/۷ \frac{W}{m.°C}\right]$ را در حالی که سطح ۱۲ در ۱۲ آن عمودی است در نظر بگیرید. از یک طرف اتلاف گرمای جابه‌جایی به محیط به دمای ۷۰ °F وجود دارد. وجه عمودی دیگر در تماس با بلوکی به دمای ثابت ۴۰۰ °F است. چهار وجه دیگر عایق‌شده‌اند. ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی تقریباً چنین تغییر می‌کنند:

$$h_x = ۰/۲۲ (T_s - T_\infty)^{\frac{۱}{۴}} x^{-\frac{۱}{۴}} \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft.°F}}$$

که T_S و T_∞ بر حسب درجه فارنهایت بوده و T_S دمای سطحی محل و x فاصله عمودی از کف تیغه بر حسب فوت است. اتلاف گرمای جابه‌جایی از تیغه مزبور را با استفاده از تحلیل عددی مناسب معین کنید.

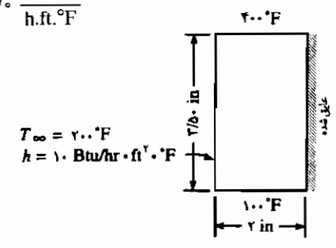
۳-۴۵ دما در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را با استفاده از روش عددی حساب کنید.



شکل م ۳-۴۵.

۳-۴۶ برای بلوک نشان داده شده در زیر، پخش دما در حالت پایدار را در گره‌های مناسب با استفاده از روش عددی حساب کنید. در صورت امکان برای حل آن از کامپیوتر رقمی استفاده کنید و چنان‌چه برنامه‌های کتابخانه‌ای در مرکز کامپیوتر موجود باشد آنها را به کار ببرید.

$k = ۲/۰ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft.°F}}$



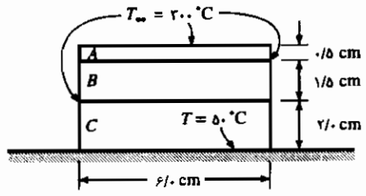
شکل م ۳-۴۶.

۳-۴۷ مسأله ۳-۴۳ را با استفاده از روش تکرار گوس - سایدل حل کنید.

۳-۴۸ نوار مرکب شکل زیر در معرض محیط جابه‌جایی به دمای ۳۰۰ °C و $h = ۴۰ \frac{W}{m^۲.°C}$ قرار گرفته است. خواص جسم عبارتند از:

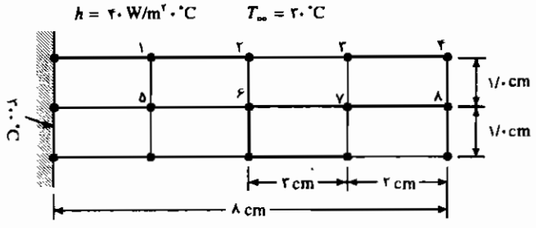
$$k_A = ۲۰ \frac{W}{m.°C}, \quad k_B = ۱/۲ \frac{W}{m.°C} \text{ و } k_C = ۰/۵ \frac{W}{m.°C}.$$

نوار را بر روی صفحه‌ای به دمای ثابت ۵۰ °C سوار کرده‌اند. انتقال گرما از نوار به صفحه را در واحد طول نوار حساب کنید. جریان گرما را دو بعدی فرض کنید.



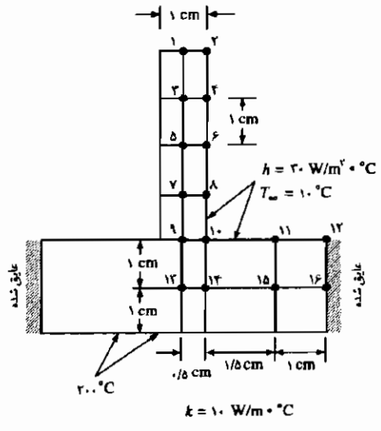
شکل م ۳-۴۸.

۳-۴۹ دمای پایه پره نشان داده شده در زیر برابر ۳۰۰ °C بوده، در معرض محیط جابه‌جایی نشان داده شده قرار می‌گیرد. دمای حالت پایدار گره‌های نشان داده شده و اتلاف گرما را با $k = ۱/۰ \frac{W}{m.°C}$ حساب کنید.



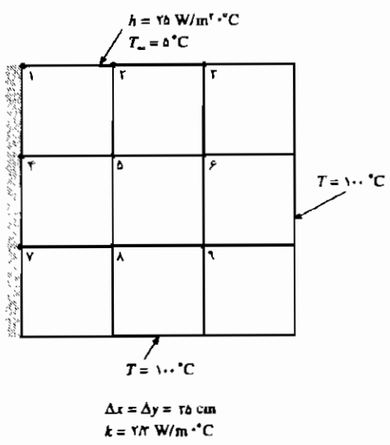
شکل م ۳-۴۹.

۳-۵۰ دمای حالت پایدار گره‌های ۱ تا ۱۶ شکل زیر را بیابید.



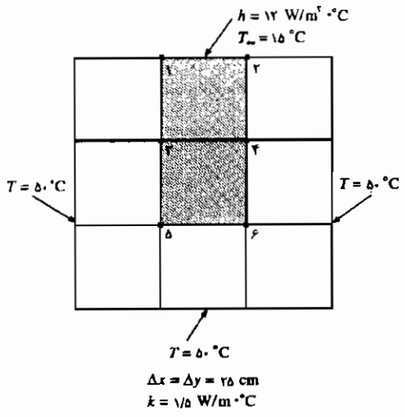
شکل م ۳-۵۰.

۳-۵۱ دمای حالت پایدار گره‌های ۱ تا ۹ شکل زیر را بیابید.



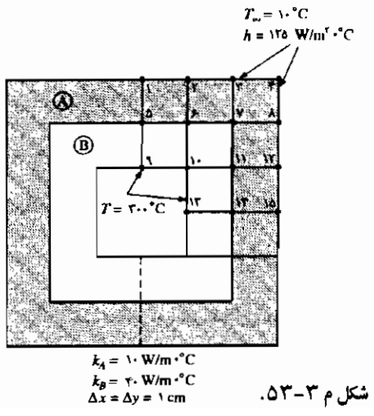
شکل م ۳-۵۱.

۳-۵۲ دمای حالت پایدار گره‌های ۱ تا ۶ شکل زیر را بیابید.



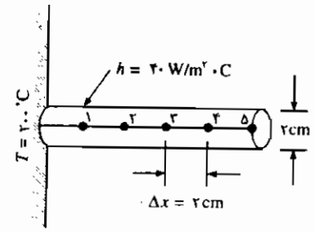
شکل م ۳-۵۲.

۳-۵۳ دمای گره‌های نشان داده شده در شکل زیر را بیابید. تمام سطح بیرونی در معرض محیط جابه‌جایی و تمام سطح داخلی در دمای ثابت ۳۰۰ °C است. خواص جسم A و B در شکل داده شده‌اند.



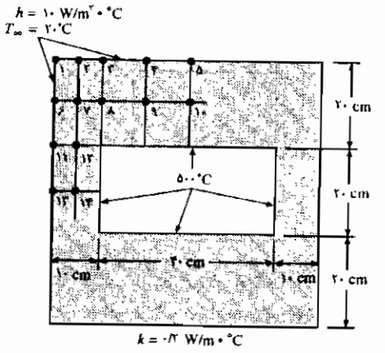
شکل م ۳-۵۳.

۳-۵۴ دمای یک سر میله‌ای به قطر ۲ cm و طول ۱۰ cm برابر ۲۰۰ °C بوده، در معرض محیط جابه‌جایی به دمای ۲۵ °C و $h = ۴۰ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ است. در داخل میله گرما با آهنگ $۵۰ \frac{MW}{m^۳}$ تولید شده و ضریب هدایت گرمایی برابر $۳۵ \frac{W}{m \cdot °C}$ است. دمای گره‌های مشخص شده در شکل را با فرض یک بعدی بودن جریان گرما بیابید.



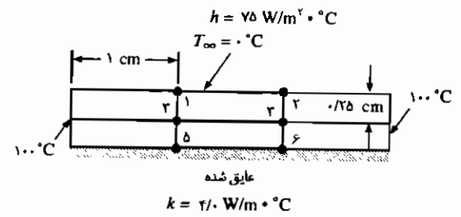
شکل م ۳-۵۴.

۳-۵۵ دمای حالت پایدار گره‌های شکل زیر را حساب کنید. تمام سطح بیرونی در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C و تمام سطح داخلی در دمای ۵۰۰ °C است. فرض کنید $k = ۰/۲ \frac{W}{m \cdot °C}$ است.



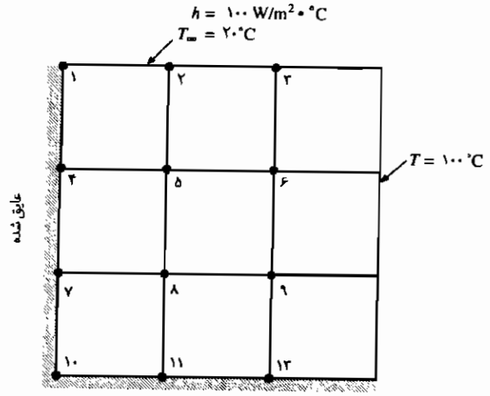
شکل م ۳-۵۵.

۳-۵۶ دمای حالت پایدار گره‌های نشان داده شده در شکل زیر را حساب کنید.



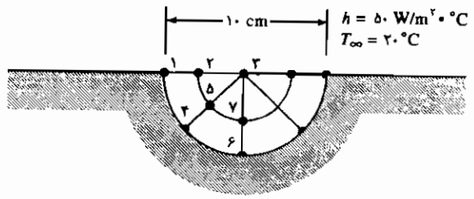
شکل م ۳-۵۶.

۳-۵۷ در داخل جسم صلب دو بعدی شکل زیر با آهنگ $۹۰ \frac{MW}{m^۳}$ گرما تولید می‌شود. با استفاده از روش عددی، دمای حالت پایدار گره‌ها را به ازای $k = ۲۰ \frac{W}{m \cdot °C}$ بیابید.



شکل م ۳-۵۷.

۳-۵۸ نیمه استوانه‌ای دارای $k = ۲۰ \frac{W}{m \cdot °C}$ بوده، در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰ °C قرار دارد. دمای سطح پایینی برابر ۳۰۰ °C است. دمای گره‌های نشان داده شده و اتلاف گرمای حالت پایدار را حساب کنید.



شکل م ۳-۵۸.

۳-۵۹ لوله‌ای به قطر داخلی ۴ mm و قطر خارجی ۵ mm و ضریب هدایت گرمایی $۲۰ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ است. گرما با آهنگ $۵۰۰ \frac{MW}{m^۳}$ به طور یکنواخت در لوله تولید شده و دمای سطح بیرونی آن ۱۰۰ °C است. می‌توان سطح داخلی را عایق‌شده فرض کرد. دیواره لوله را به چهار گره تقسیم کرده و دمای هر گره را با روش عددی محاسبه و آنها را با نتایج حاصل از محاسبه تحلیلی مقایسه کنید.

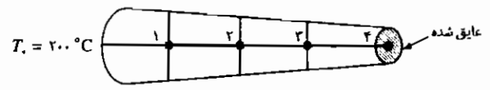
۳-۶۰ مسأله ۳-۵۹ را در حالی که سطح داخلی لوله در معرض جابه‌جایی با $h = ۴۰ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ باشد تکرار کنید و نتیجه را با محاسبه تحلیلی مقایسه کنید.

۳-۶۱ مسأله ۳-۵۰ را در حالی که سطح به جای در معرض جابه‌جایی بودن، شار گرمایی ثابت $۳۰۰ \frac{W}{m^۲}$ را جذب کند، حل کنید. سطح زیرین باز هم به دمای ۲۰۰ °C است.

۳-۶۲ مسأله ۳-۵۳ را در حالی که سطح داخلی به جای در دمای ثابت ۳۰۰ °C بودن شار گرمایی ثابت $۳۰۰ \frac{W}{m^۲}$ را جذب نماید حل کنید.

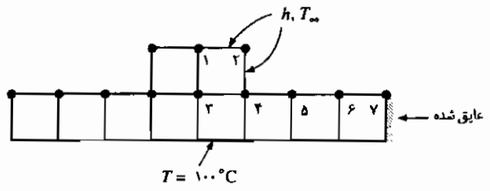
۳-۶۳ مسأله ۳-۵۷ را در حالی که سطح دارای دمای ۱۰۰ °C، شار گرمایی ثابت $۵۰۰ \frac{W}{m^۲}$ را جذب کند، حل کنید. هر تعداد گره که لازم است اضافه کنید.

۳-۶۴ پره پین شکل شیب‌دار شکل زیر از جنس آلومینیوم و دارای مقطع دایروی به قطر پایهٔ ۱ cm و قطر نوک ۰/۵ cm است. دمای پایه برابر ۲۰۰ °C است و با جابه‌جایی به محیط به دمای $T_\infty = ۱۰$ °C و $h = ۲۰۰ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ گرما می‌دهد. نوک عایق است. جریان گرما را یک بعدی گرفته و برای به‌دست آوردن دما در گره‌های ۱ تا ۴ و گرمای تلف‌شده در پره از روش تفاضل محدود استفاده کنید. طول پره ۶ cm است.



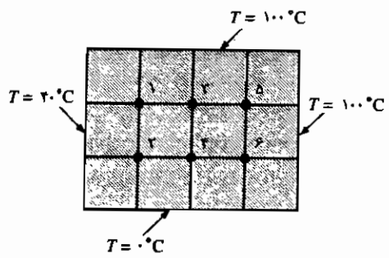
شکل م ۳-۶۴.

۳-۶۵ معادلات گرهی ۱ تا ۷ را برای جسم جامد متقارن شکل زیر بنویسید. $\Delta x = \Delta y = ۱$cm.



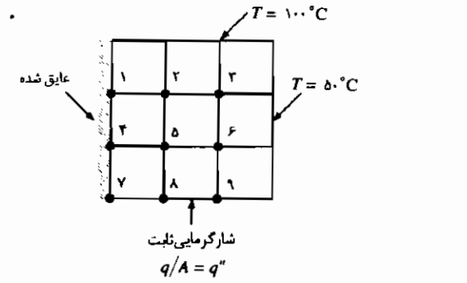
شکل م ۳-۶۵.

۳-۶۶ دمای گره‌های ۱ تا ۶ شکل زیر را به‌دست آورید. $\Delta x = \Delta y = ۱$cm.



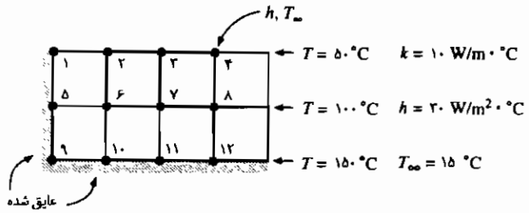
شکل م ۳-۶۶.

۳-۶۷ معادلات گرهی گره‌های ۱ تا ۹ شکل زیر را بنویسید. $\Delta x = \Delta y = ۱$cm.



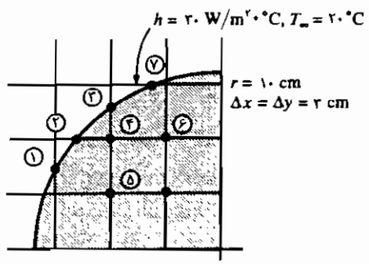
شکل ۳-۶۷.

۳-۶۸ معادله گرهی گره‌های ۱ تا ۱۲ شکل زیر را بنویسید. معادلات را در فرمت تکرار گوس - سایدل بیان کنید.



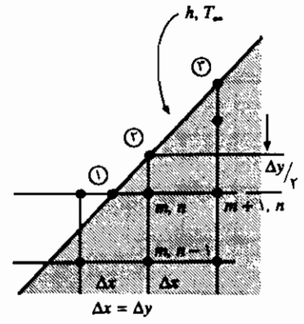
شکل م ۳-۶۸.

۳-۶۹ گاهی حتی برای سیستم دایروی نیاز به شبکه مربعی است. ربع دایره شکل زیر با $r = ۱۰$ cm را در نظر بگیرید. $\Delta x = \Delta y = ۳$cm و $k = ۱۰ \frac{W}{m \cdot °C}$. معادلات حالت پایدار گره‌های ۳ و ۴ را بنویسید. از جدول‌های ۳-۲ و ۳-۴ استفاده کنید.



شکل م ۳-۶۹.

۳-۷۰ شکل زیر را به عنوان مورد خاصی از جدول (۳-۲ چ) در نظر گرفته، معادلات گرهی گره‌های (m,n) و ۲ را برای مورد $\Delta x = \Delta y$ بنویسید.

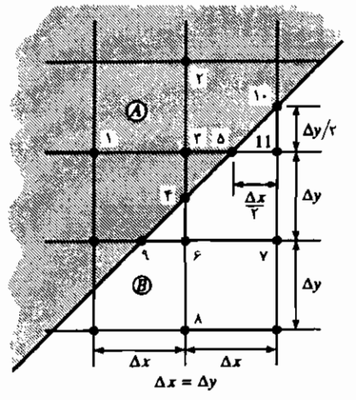


شکل م ۳-۷۰.

۳-۷۱ مسأله ۳-۷۰ را برای سطح شیب‌دار عایق تکرار کنید.

۳-۷۲ اگر سطح شیب‌دار مسأله ۳-۷۰ در T_∞ هم دما باشد، معادلهٔ گرهی گره (m,n) چیست؟

۳-۷۳ مقطع شیب‌دار شکل زیر شامل مصالح A و B است. معادلات گرهی حالت پایدار گره‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ را با استفاده از جدول ۳-۲ (چ و چ) به عنوان راهنما، بنویسید.



شکل م ۳-۷۳.

۳-۷۴ دمای مکعبی به ضلع ۲۰ cm برابر ۸۰ °C است و در محیطی وسیع به دمای ۱۰ °C و ضریب هدایت گرمایی $2/3 \frac{W}{m.^\circ C}$ دفن می‌شود. اتلاف گرما از مکعب را محاسبه کنید. این اتلاف را با گرمای هدر رفته از کره‌ای به قطر ۲۰ cm مقایسه کنید. این مقایسه را بر پایهٔ واحد حجم انجام دهید.

۳-۷۵ دمای استوانه‌ای افقی و دراز به قطر ۱۰ cm برابر ۱۰۰ °C است و در مرکز دالی به ضخامت ۳۰ cm از ماده‌ای به $k = 10 \frac{W}{m.^\circ C}$ قرار دارد. دمای بیرون دال برابر ۲۰ °C است. اتلاف گرما از استوانه به ازای واحد طول را محاسبه کنید.

۳-۷۶ مسأله ۳-۷۵ را با استفاده از طرح شار حل کنید.

۳-۷۷ صفحه‌ای افقی به ابعاد ۱۰ در ۱۰۰ cm در محیطی وسیع به عمق ۲/۰ m دفن شده و دمایش ۵۰ °C است سطح محیط به دمای ۱۰ °C و $k = 1/5 \frac{W}{m.^\circ C}$ است. گرمای تلف‌شده از صفحه را محاسبه کنید.

۳-۷۸ دمای دیسک نازکی به قطر ۵ cm برابر ۷۵ °C است و روی سطح محیط وسیعی به دمای ۱۵ °C و $k = 3 \frac{W}{m.^\circ C}$ قرار دارد. گرمای هدایت شده به محیط را محاسبه کنید.

۳-۷۹ مسأله ۳-۷۸ را برای مربعی به ضلع ۵ cm تکرار کنید. انتقال گرماها را بر پایه واحد مساحت مقایسه کنید.

۳-۸۰ لوله بخار گرمی به قطر ۱۰ cm و دمای ۲۰۰ °C بوده و در مرکز عایقی مربعی به ضلع ۲۰ cm و از جنس الیاف معدنی قرار دارد. دمای سطح بیرونی عایق برابر ۳۵ °C است. گرمای تلف‌شده از لوله‌ای به طول ۲۰ m را در صورتی که ضریب هدایت گرمایی عایق را بتوان $50 \frac{mW}{m.^\circ C}$ فرض کرد محاسبه کنید.

۳-۸۱ لوله‌ای به قطر ۱۳ cm از مرکز دال بتنی به ضخامت ۴۰ cm می‌گذرد. دمای سطح لوله با چگالش بخار در ۱۰۰ °C نگه داشته می‌شود در حالی که دمای سطوح بیرونی بتن برابر ۲۴ °C است. گرمای تلف‌شده از متر طول لوله را محاسبه کنید.

۳-۸۲ پره‌ای محیطی با نیم‌رخ مستطیلی را مطابق شکل ۲-۱۲ درنظر بگیرید. معادلات گرهی پره‌ای به ضخامت t، ضریب انتقال گرمای h، ضریب هدایت گرمایی k و آهنگ تولید گرمای q به صورت تابعی از مختص شعاع r را با نموهای Δr بنویسید. معادلات گرهی گره مجاور دمای پایهٔ T_0، گرهی در وسط پره و گره‌ای در انتهای پره را بنویسید.

۳-۸۳ با استفاده از روش عددی و معادلات گرهی مسأله ۳-۸۲، مثال ۲-۹ را حل کنید. در این حل، پنج گره انتخاب کنید.

۳-۸۴ معادلهٔ گرهی شکل مسأله ۲-۱۰۹ را با استفاده از نموهایی در ارتفاع مخروط ناقص به عنوان متغیر یک بعدی، بنویسید. سپس مسأله را به روش عددی حل کرده، نتایج را با حل تحلیلی یک بعدی مقایسه کنید.

۳-۸۵ معادلات گرهی شکل ۲-۱۰۸ را با استفاده از نموهایی در زاویه θ به عنوان متغیر یک بعدی، بنویسید. سپس مسأله را به روش عددی حل کرده، نتایج را با حل تحلیلی یک بعدی مقایسه کنید.

۳-۸۶ مکعبی به ضلع ۳ m در محیطی بی‌نهایت با ضریب هدایت گرمایی $1/8 \frac{W}{m.^\circ C}$ مدفون است. دمای سطح مکعب برابر ۳۰ °C است در حالی‌که دمای محیط ۱۵ °C است. گرمای تلف‌شده از مکعب را محاسبه کنید.

۳-۸۷ مسأله ۲-۱۱۶ را با استفاده از روش عددی با پنج گره که با نموهای زاویهٔ شعاعی θ عمل می‌کند دوباره حل کرده، نتایج را با نتایج تحلیلی مسأله ۲-۱۱۶ مقایسه کنید.

مسائل طراحی

۳-۸۸ آستری از جنس فولاد ضدزنگ $\left(k = 20 \frac{W}{m.^\circ C}\right)$ به ضخامت ۳ mm را روی سطح داخلی جسم جامد مسأله ۳-۵۵ قرار داده‌اند. اکنون فرض کنید که سطح داخلی فولاد ضدزنگ به دمای ۵۰۰ °C است و مقادیر جدید دماهای گرهی در ماده با ضریب هدایت پایین را محاسبه کنید. گره‌های مورد نیاز را در فولاد ضدزنگ در نظر بگیرید.

۳-۸۹ زیرزمین خانه‌ای به ابعاد ۵m × ۴ بوده و ارتفاع سقف آن ۳ m است. دیوارها از بتن به ضخامت ۱۰ cm است. ضریب جابه‌جایی روی سطح داخلی در زمستان برابر $10 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ بوده و خاک بیرون دارای $k = 1/7 \frac{W}{m.^\circ C}$ است. این مسأله را تحلیل کرده، ضریب انتقال گرمای کل را که با $q_{\text{اتلاف}} = UA_{\text{داخل}}(T_{\text{داخل}} - T_{\text{خاک}})$ تعریف می‌شود تعیین کنید. اتلاف گرما را وقتی $T_{\text{داخل}} = 26^\circ C$ و $T_{\text{خاک}} = 15^\circ C$ است تعیین کنید.

۳-۹۰ پمپ گرمایی آب سطحی، وسیله‌ای تبریدی است که گرما را به جای دادن به جوّ محل، از طریق لوله‌های دفن شده، پخش می‌کند. آهنگ دفع گرمای چنین ماشینی در اکلاهما در محلی که دمای زمین در عمق برابر ۱۷ °C است، ۲۲ kW می‌باشد. ضریب هدایت گرمایی خاک در این محل را می‌توان $1/6 \frac{W}{m.^\circ C}$ گرفت. آب باید در لوله افقی دفن شده به گردش درآید. دمای ورودی آب ۲۹ °C و دمای خروجی ۲۳/۵ °C است. دمای دیوار را می‌توان برابر دمای آب فرض کرد. جنس، قطر و طول مناسبی از لوله را انتخاب کنید تا بتوان توان سرمایی مورد نیاز را تأمین کرد. می‌توانید قطرهای لوله فولادی استاندارد را از جدول A-۱۱ انتخاب کنید. از سایر منابع می‌توانید قطرهای لولهٔ استاندارد یا پلاستیکی را به‌دست آورید. قبل از انتخاب نهایی، چند انتخاب را بررسی و دلایل مربوط به آن انتخاب را ارائه کنید.

۳-۹۱ آدم‌های حرفه‌ای ادعا می‌کنند که مشعل‌های فر گازی بر مشعل‌های برقی ارجحیت دارد زیرا گرم کردن با شعله گاز و محصولات احتراق اطراف کف سینی پخت، یکنواخت‌تر است. طرفداران فرهای برقی، عدم وجود محصولات احتراق در آلوده‌کردن هوا در سطح پخت را ذکر کرده، اما می گویند که گرمای گاز می‌تواند یکنواخت‌تر باشد. سازندگان وسایل پخت با کف ضخیم ادعا می‌کنند که در محصولات آنها به یکنواختی پختی به خوبی گرمای حاصل از گاز می‌توان دست یافت زیرا گرما در لایهٔ آلومینیومی به ضخامت 8mm برروی کف سینی "پراکنده" می‌شود. از شما خواسته می‌شود که در مورد این ادعا تحقیق کنید. برای ارزیابی، یک سینی به قطر ۲۰۰ mm با کف آلومینیومی به ضخامت 8mm در نظر بگیرید که داخل آن در معرض آب جوشی است که ایجاد $h = 1500 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ در ۱ atm (۱۰۰°C) می‌کند. فضای تقریبی برای المان دایروی در مشعل برقی در نظر گرفته و مدل عددی مناسبی برای تحقیق ادعای یکنواختی گرم کردن توصیه کنید. عواملی مثل مقاومت تماس بین المان مشعل و کف سینی، انتقال تابشی موجود را در نظر بگیرید. آهنگ‌های گرم کردن مختلف (دماهای مختلف المان مشعل) و اثر آنها را در نظر بگیرید. وقتی مطالعه کامل شد، توصیه‌هایی در مورد اینکه سازندگان وسایل پخت به چه چیزی می‌توانند برای محصول کف ضخیم خود ادعا کنند، ارائه کنید. در مورد عدم اطمینان‌ها در تحلیل خود بحث کنید.

۳-۹۲ در تحلیل‌های بخش ۲-۱۰، جریان گرما در پره‌ها، یک بعدی فرض شد. مدل عددی مشابه مسأله ۳-۵۰ را برای بررسی اعتبار این فرض توصیه کنید. تحلیل را محدود به آلومینیوم با $k = 200 \frac{W}{m.^\circ C}$ سازید. چند ترکیب از ضخامت پره، طول پره و ضریب جابه‌جایی را برای تعیین آثار نسبی بر تغییر دما در عرض ضخامت پره، بررسی کنید. نتایجی را که فکر می‌کنید مناسب هستند، بیان کنید.

۳-۹۳ ساختمان کوچکی به عرض ۵ m و طول ۷ m و ارتفاع ۳ m (ابعاد داخلی) بر روی دال بتنی تختی به ضخامت ۱۵ cm قرار دارد. دیوارهای ساختمان نیز بتنی و ضخامت آنها ۷cm است. از داخل ساختمان برای ذخیره سرما در ۲۰ °C- استفاده می‌شود و بیرون آن در معرض هوای محیط به دمای ۳۰ °C و ضریب جابه‌جایی $15 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. ضریب جابه‌جایی داخل ساختمان برابر $10 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ ارزیابی می‌شود و دال کف در تماس با خاک به $k = 1/8 \frac{W}{m.^\circ C}$ است. دمای خاک را می‌توان ۱۵ °C فرض کرد. گرمای دریافت شده توسط این ساختمان را در نبود هر گونه عایق بر روی سطح بیرونی محاسبه کنید. سپس دو عایق مختلف برای سطح بیرونی ساختمان از جدول ۱-۲ و / یا جدول A-۳ انتخاب کنید. هدف از عایق‌کاری، بالا بردن دمای سطح بیرونی عایق تا ۲۶ °C به ازای دمای محیط ۳۰ °C است. سیستم تبرید طوری کار می‌کند که ۱ kW تولید ۴۰۰۰ $\frac{kJ}{hr}$ سرمایش می‌کند و قیمت برق $0/085 \frac{\text{دلار}}{kWh}$ است. اقتصاد نشان می‌دهد که هزینه عایق باید در عرض سه سال مستهلک شود. هزینه مجاز واحد حجم دو عایق انتخابی برای آنکه به این هدف استهلاک برسیم چیست؟ دمای مجاز سطح بیرون عایق را برابر ۲۴ °C بگیرید. هزینه‌های مجاز برای استهلاک سه ساله در این مورد چیست؟ در مورد ساعات کار در سال سیستم سرمایش خودتان فرضیاتی در نظر بگیرید.

❑ مراجع

1 Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solids," 2d ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1959.

2 Schneider, P.J.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.

3 Dusinberre, G. M.: "Heat Transfer Calculations by Finite Differences," International Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.

4 Kayan, C. F.: An Electrical Geometrical Analogue for Complex Heat Flow, *Trans. ASME*, vol. 67, p. 713, 1945.

5 Kayan, C. F.: "Heat Transfer Temperature Patterns of a Multicomponent Structure by Comparative Methods," *Trans. ASME*, vol. 71, p. 9, 1949.

6 Rudenberg, R.: Die Ausbreitung der Luft-und Erdfelder und Hochspannungsleitungen, besonders bei Erd-und Kurzschlussen, *Elektrotech. Z.*, vol. 46, p. 1342, 1925.

7 Andrews, R. V.: Solving Conductive Heat Transfer Problems with Electrical-Analogue Shape Factors, *Chem. Eng. Prog.*, vol. 51, no. 2, p. 67, 1955.

8 Sunderland, J. E., and K. R. Johnson: Shape Factors for Heat Conduction through Bodies with Isothermal or Convective Boundary Conditions, *Trans. ASHAE*, vol. 70, pp. 237–241, 1964.

9 Richtmeyer, R. D.: "Difference Methods for Initial Value Problems," Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

10 Crank, J., and P. Nicolson: A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of P.D.E. of Heat Conduction Type, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 43, p. 50, 1947.

11 Barakat, H.Z., and J. A. Clark: On the Solution of Diffusion Equation by Numerical Methods, *J. Heat Transfer*, p. 421, November 1966.

12 Ozisik, M.N: "Boundary Value Problems of Heat Conduction," International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.

13 Arpaci, V.S.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.

14 Ames, W. F.: "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering," Academic press, Inc., New York, 1965.

15 Myers, R. F.: "Conduction Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

16 Adams, J. A., and D.F Rogers: "Computer Aided Analysis in Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

17 Bowers, J. C., and S. R. Sedore: "SCEPTRE: A computer Program for Circuit and Systems Analysis," Prentice-Hill, Inc., Englewood Cliffs, N.J.,1971.

18 Rohsenow, W. M., and J. P. Hartnett (eds.): "Handbook of Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

19 Kern, D. Q., and A. D Kraus: "Extended Surface Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

20 Strong, P. F.,*and A. G. Emslie: "The Method of Zones for the Calculation of Temperature Distribution," *NASA* CR-56800, July 1963.

21 Sepetoski, W. K., C. H. Sox, and P. F. Strong: "Description of a Transient Thermal Analysis Program for Use with the Method of Zones," *NASA* CR-56722, August 1963.

22 Schultz, H. D.: "Thermal Analyzer Computer Program for the Solution of General Heat Transfer Problems," *NASA* CR-65581, July 1965.

23 Hahne, E., and U. Grigull: Formfaktor und Formwiderstand der stationaren mehr-dimensionalen Warmeleitung, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 18, p. 751, 1975.

24 Chapra, S. C., and R. P. Canale: "Numerical Methods for Engineers, "2d ed., McGraw-Hill, 1988.

25 Constantinides, A.: "Applied Numerical Methods With Personal Computers, " McGraw-Hill, 1987.

26 Patankar, S. V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere Publishing, 1980.

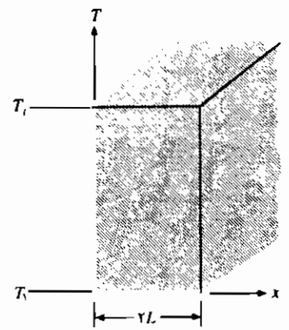
27 Minkowycz, W. J., E. M. Sparrow, G. E. Schneider, and R. H. Pletcher: "Handbook of Numerical Heat Transfer," Wiley, 1988.

۴

هدایت حالت ناپایدار

❑ ۴-۱ مقدمه

چنان‌چه ناگهان محیط جسم جامدی تغییر کند، باید زمانی سپری شود تا حالت تعادل دما در جسم برقرار شود. این حالت تعادل را حالت پایدار می‌نامیم و پخش دما و انتقال گرما را با روش‌های فصول ۲ و ۳ محاسبه می‌کنیم. باید این تحلیل را برای فرآیند گرمایش و سرمایش گذرای قبل از برقراری تعادل و در دورهٔ موقتی، اصلاح کنیم و تغییر انرژی داخلی جسم نسبت به زمان را به حساب آوریم و باید شرایط مرزی را تعدیل کنیم تا با وضعیت فیزیکی مسأله انتقال گرمای حالت ناپایدار مطابقت داشته باشد. تحلیل انتقال گرمای حالت ناپایدار از نظر عملی مهم است زیرا بسیاری از فرآیندهای گرمایش و سرمایش مورد محاسبه در کاربردهای صنعتی از این نوع‌اند.



شکل ۴-۱ صفحه نامحدودی که در معرض سرمایش ناگهانی سطوح قرار دارد.

تحلیل مسألهٔ گرمای گذرا را می‌توان با حل معادلهٔ هدایت گرمای عمومی با جداسازی متغیرها، مشابه روش تحلیلی مسأله حالت پایدار دو بعدی بخش ۲-۳ به پیش برد. این روش را برای مورد هندسی ساده توضیح خواهیم داد و خواننده می‌تواند برای تحلیل حالت‌های پیچیده‌تر به مراجع رجوع کند. صفحه نامحدودی به ضخامت $2L$ مطابق شکل ۴-۱ در نظر بگیرید. صفحه در ابتدا به دمای یکنواخت T_i بوده، در لحظهٔ صفر دمای سطوح آن ناگهان به $T = T_1$ کاهش داده می‌شود. معادله دیفرانسیل چنین است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial T} \qquad (۱-۴)$$

معادله فوق را می‌توان با معرفی متغیر $\theta = T - T_1$ ساده‌تر کرده بنابراین:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \qquad (۲-۴)$$

و شرایط اولیه مرزی چنین است:

(الف) $\theta = \theta_i = T_i - T_\infty$ در $\tau = 0 , 0 \le x \le 2L$

(ب) $\theta = 0$ در $x = 0 , \tau > 0$

(پ) $\theta = 0$ در $x = 2L , \tau > 0$

با فرض جواب حاصل‌ضربی $\theta(x,\tau) = X(x)\mathscr{G}(\tau)$ به دو معادله دیفرانسیل عادی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d\mathscr{G}}{d\tau} + \alpha\lambda^2\mathscr{G} = 0$$

که λ^2 ثابت جداسازی است. برای برقراری شرایط مرزی، باید $\lambda^2 > 0$ باشد و در نتیجه جواب چنین است:

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)\, e^{-\lambda^2 \alpha \tau}$$

از شرط مرزی (ب)، به ازای $\tau > 0$ داریم $C_1 = 0$. چون C_2 نیز نمی‌تواند صفر باشد از شرط مرزی (پ) در می‌یابیم که $\sin 2L\lambda = 0$، یا:

$$\lambda = \frac{n\pi}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

شکل نهایی سری جواب چنین است:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left[\frac{n\pi}{2L}\right]^2 \alpha\tau} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

این معادله بسط سینوسی فوریه است که ثابت C_n آن از شرط اولیه (الف) و معادله زیر معین می‌شود:

$$C_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \theta \sin \frac{n\pi x}{2L}\, dx = \frac{4}{n\pi}\theta_i \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

بنابراین سری جواب نهایی چنین است:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left[\frac{n\pi}{2L}\right]^2 \alpha\tau} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots \qquad (۴\text{-}۳)$$

البته توجه دارید که سری سمت راست معادلهٔ (۴-۳) باید در لحظهٔ صفر ($\tau = 0$) به ازای تمام مقادیر x به واحد هم‌گرا شود.

در بخش ۴-۴ شکل ترسیمی این جواب برای اهداف محاسباتی عرضه می‌شود. تا اینجا، چگونگی حل معادله هدایت گرمای ناپایدار برای حداقل یک مورد، با روش جداسازی متغیرها را نشان دادیم. برای کسب اطلاع بیش‌تر در مورد روش‌های تحلیلی در مسائل حالت ناپایدار به مراجع مراجعه کنید.

۴-۲ سیستم ظرفیت گرمایی فشرده

بحث هدایت گرمای گذرا را با تحلیل سیستم‌هایی که می‌توان دمای آنها را یکنواخت فرض کرد، دنبال می‌کنیم. این تحلیل را روش ظرفیت گرمایی فشرده می‌نامند. واضح است که این سیستم‌ها ایده‌آل‌اند زیرا چنان‌چه قرار باشد گرما به داخل جسم هدایت و یا از آن خارج شود، باید در آن گرادیان دما وجود داشته باشد، به طور کلی، هر چه اندازه فیزیکی جسم کوچک‌تر باشد، فرض یکنواخت بودن دما در سرتاسر جسم به حقیقت نزدیک‌تر است؛ همان‌طور که در به‌دست آوردن معادلهٔ عمومی هدایت گرما عمل شد در اینجا هم می‌توان یک حجم دیفرانسیلی را در حد به کار برد.

چنان‌چه گلوله فولادی داغی را در ظرف آب خنکی فرو بریم و فرض یکنواختی دمای گلوله در فرآیند سرمایش صادق باشد، می‌توان روش تحلیلی ظرفیت گرمایی فشرده را به کار برد. واضح است که پخش دما در گلوله به ضریب هدایت گرمایی ماده گلوله و شرایط انتقال گرما از سطح گلوله به سیال احاطه کننده، یعنی ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی سطح، بستگی دارد. چنان‌چه مقاومت در مقابل انتقال گرمای هدایتی در مقایسه با مقاومت جابه‌جایی در سطح کوچک باشد، به نحوی که گرادیان دمای بزرگ‌تر در لایه سیال در سطح اتفاق بیفتد، پخش دمای نسبتاً یکنواختی خواهیم داشت. بنابراین در تحلیل ظرفیت گرمایی فشرده فرض بر آن است که مقاومت داخلی جسم در مقایسه با مقاومت بیرونی قابل صرف‌نظر باشد.

اتلاف گرمای جابه‌جایی از جسم به صورت کاهش انرژی داخلی جسم ظاهر می‌شود، که در شکل ۴-۲ نشان داده شده است. بنابراین:

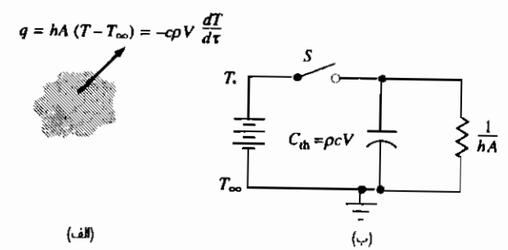
$$q = hA\,(T - T_\infty) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau} \qquad (۴\text{-}۴)$$

که A مساحت سطح جهت جابه‌جایی و V حجم است. شرط اولیه چنین است:

$$T = T_0 \quad \text{در} \quad \tau = 0$$

بنابراین جواب معادله (۴-۴) چنین است:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left[\frac{hA}{\rho cV}\right]\tau} \qquad (۴\text{-}۵)$$



شکل ۴-۲ نام‌گذاری برای تحلیل ظرفیت گرمایی فشرده یکنایی.

که T_∞ دمای محیط جابه‌جایی است. شبکه گرمایی سیستم تک ظرفیتی در شکل (۴-۲ ب) نشان داده شده است. در این شبکه خازن گرمایی سیستم نخست با بستن کلید S با پتانسیل T_0 باردار می‌شود. سپس وقتی کلید باز می‌شود، انرژی ذخیره شده در خازن گرمایی از طریق مقاومت $\frac{1}{hA}$ انتشار می‌یابد. تشابه میان این سیستم گرمایی و سیستم الکتریکی واضح است و می‌توانیم به سادگی سیستمی الکتریکی بسازیم که درست مثل سیستم گرمایی عمل کند به شرطی که نسبت:

$$\frac{hA}{\rho cV} = \frac{1}{R_{th}C_{th}} \qquad R_{th} = \frac{1}{hA} \qquad C_{th} = \rho cV$$

را برابر $\frac{1}{R_e}$ C_e بگیریم، که R_e و C_e به ترتیب مقاومت و ظرفیت خازن الکتریکی‌اند. در سیستم گرمایی انرژی ذخیره می‌کنیم در حالی‌که در سیستم الکتریکی بار الکتریکی ذخیره می‌شود. جریان انرژی در سیستم گرمایی را گرما می‌نامیم و جریان بار به شدت جریان الکتریکی موسوم است. کمیت $\frac{c\rho V}{hA}$ به **ثابت زمانی** سیستم موسوم است زیرا دارای ابعاد زمان است. وقتی $\tau = \frac{c\rho V}{hA}$ آنگاه مقدار اختلاف دما $T - T_\infty$ برابر ۳۶/۸٪ اختلاف اولیه $T_0 - T_\infty$ است.

قابلیت کاربرد تحلیل ظرفیت فشرده

یادآور شدیم که در تحلیل ظرفیت فشرده فرض بر آن است که پخش دما در سرتاسر جسم جامد یکنواخت است و اینکه این فرض معادل آن است که بگوییم مقاومت جابه‌جایی سطح در مقایسه با مقاومت هدایت داخلی بزرگ است. ارزیابی‌های حاصل از این تحلیل در صورت برقراری شرط زیر، حدود ۵ درصد است:

$$\frac{h\frac{V}{A}}{k} < 0/1 \qquad (۴\text{-}۶)$$

که k ضریب هدایت گرمایی جسم جامد است. در بخش‌های بعدی حالت‌های بدون شرط فوق را مورد آزمایش قرار داده، خواهیم دید که تحلیل ظرفیت فشرده رابطه مستقیمی با روش عددی بخش ۴-۷ دارد. چنان‌چه نسبت $\frac{V}{A} = s$ را بعد **مشخصهٔ** جسم جامد در نظر بگیریم، گروه بی‌بعد زیر به **عدد بیو** (*Biot number*) موسوم است.

$$\frac{hs}{k} = \text{عدد بیو} = Bi$$

نتایج حاصل از روش ظرفیت فشرده در بسیاری از موارد عملی، خوب است. مثال‌های جدول ۴-۱ اعتبار نسبی این موارد را نشان می‌دهند.

باید گفت که ۲۵ ± درصد عدم اطمینان در ضریب جابه‌جایی کاملاً عادی است و از این رو شرط $Bi = h\frac{V}{A}$ اجازهٔ کمی انحراف را خواهد داد.

تحلیل ظرفیت فشرده را به خاطر سادگی‌اش کنار نگذارید. در بسیاری از موارد، ضریب جابه‌جایی موجود دقت ندارد و در نتیجه نیازی به روش‌های تحلیلی مشکل‌تر نیست.

جدول ۴-۱ مثال‌هایی از سیستم‌های ظرفیت فشرده

موقعیت فیزیکی	$k, \frac{W}{m.°C}$	مقدار تقریبی h $\frac{W}{m^2.°C}$	$\frac{h\left(\frac{V}{A}\right)}{k}$
۱- سرد کردن مکعب فولادی به‌ضلع ۳/۰Cm در هوای اتاق	۴۰	۷/۰	$۸/۷۵\times۱۰^{-۴}$
۲- استوانه از جنس شیشه به قطر ۵/۰cm خنک شده توسط جریان هوا به سرعت $۵۰\frac{m}{s}$	۰/۸	۱۸۰	۲/۸۱
۳- مثل حالت ۲ ولی جنس استوانه از مس	۳۸۰	۱۸۰	۰/۰۰۶
۴- مکعب از جنس مس داغ به ضلع ۳/۰cm غوطه‌ور در آب به طوری که آب به جوش می‌آید	۳۸۰	۱۰۰۰۰	۰/۱۳۲

مثال ۴-۱ سرد کردن گلوله فولادی در هوا

گلوله‌ای فولادی $\left[c = ۰/۴۶\ \frac{kJ}{kg.°C}\right.$ و $\left.k = ۳۵\ \frac{W}{m.°C}\right]$ با قطر ۵/۰ cm و به دمای اولیه و یکنواخت ۴۵۰ °C را ناگهان در محیط کنترل شده‌ای به دمای ۱۰۰ °C قرار می‌دهند. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۱۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ است. زمان لازم برای آن‌که دمای گلوله به ۱۵۰ °C برسد را محاسبه کنید.

حل:

از آنجا که مقدار h کم و مقدار k زیاد است احتمالاً باید از روش ظرفیت فشرده استفاده کرد. این موضوع را می‌توان با استفاده از معادله (۴-۶) بررسی کرد:

$$\frac{h\left(\frac{V}{A}\right)}{k} = \frac{(۱۰)\left[\left(\frac{۴}{۳}\right)\pi(۰/۰۲۵)^3\right]}{۴\pi(۰/۰۲۵)^2(۳۵)} = ۰/۰۰۲۳ < ۰/۱$$

بنابراین می‌توان از معادله (۴-۵) استفاده کرد و داریم:

$T = ۱۵۰°C$ $\quad \rho = ۷۸۰۰\ \frac{kg}{m^3}$ $\quad \left[۴۸۶\ \frac{lb_m}{ft^3}\right]$

$T_\infty = ۱۰۰°C$ $\quad h = ۱۰\ \frac{W}{m^2.°C}$ $\quad \left[۱/۷۶\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$

$T_o = ۴۵۰°C$ $\quad c = ۴۶۰\ \frac{J}{kg.°C}$ $\quad \left[۰/۱۱\ \frac{Btu}{lb_m.°F}\right]$

$$\frac{hA}{\rho cV} = \frac{(۱۰)\ ۴\pi\ (۰/۰۲۵)^2}{(۷۸۰۰)\ (۴۶۰)\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)(۰/۰۲۵)^3} = ۳/۳۴۴\times۱۰^{-۴}\ s^{-۱}$$

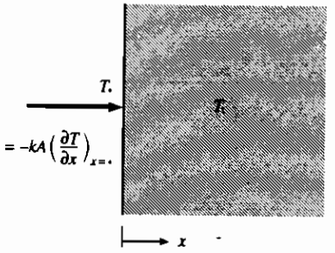
$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left[\frac{hA}{\rho cV}\right]\tau}$$

$$\frac{۱۵۰ - ۱۰۰}{۴۵۰ - ۱۰۰} = e^{-۳/۳۴۴\times۱۰^{-۴}\tau}$$

$$\tau = ۵۸۱۹s = ۱/۶۲h$$

❑ ۴-۳ جریان گرمای گذرا در جسم یک طرف نامحدود

جسم جامد یک طرف نامحدود شکل ۴-۳ را که دمای اولیه آن T_i است در نظر بگیرید. دمای سطح آن ناگهان کاهش داده شده، به T_o می‌رسد. می‌خواهیم عبارت پخش دما در جسم را به صورت تابعی از زمان به‌دست آوریم. سپس از این پخش دما می‌توان برای محاسبه جریان گرما در هر فاصله x در جسم به صورت تابعی از زمان، استفاده کرد.



شکل ۴-۳ نام‌گذاری برای جریان گرمای گذرا در جسم جامد یک طرف نامحدود.

با فرض ثابت بودن خواص جسم، معادله دیفرانسیل پخش دما $T(x,\tau)$ چنین است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۷-۴)$$

شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$$T(x,\ o) = T_i$$

$$T(o,\ \tau) = T_o \qquad \text{به ازای } \tau > o$$

این مسأله را می‌توان با روش تبدیل لاپلاس حل کرد. جواب در مرجع ۱ چنین ارائه شده است:

$$\frac{T(x,\tau) - T_o}{T_i - T_o} = \text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \qquad (۸-۴)$$

که تابع خطایی گوس در آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}} e^{-\eta^2}\,d\eta \qquad (۹-۴)$$

می‌دانید که در این تعریف η متغیری ظاهری است و انتگرال تابعی از حد بالایی خود است. اگر تعریف تابع خطا را در معادلهٔ (۸-۴) جای‌گزین کنیم، رابطهٔ پخش دما چنین می‌شود:

$$\frac{T(x,\tau) - T_o}{T_i - T_o} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}} e^{-\eta^2}\,d\eta \qquad (۱۰-۴)$$

جریان گرما در فاصله x را می‌توان از معادله زیر به‌دست آورد:

$$q_x = -kA\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

با مشتق‌گیری جزئی از معادلهٔ (۴-۱۰) داریم:

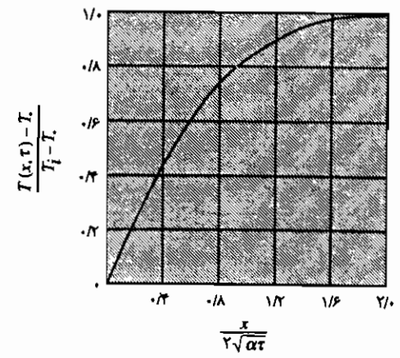
$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_o)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha\tau}}\;\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \qquad (۱۱-۴)$$

$$= \frac{T_i - T_o}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha\tau}}$$

جریان گرما در سطح ($x = o$) برابر است با:

$$q_o = \frac{kA\,(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} \qquad (۱۲-۴)$$

شار گرمایی سطح را می‌توان با اندازه‌گیری گرادیان دما در $x=o$ از معادله (۴-۱۱) تعیین کرد. نمودار پخش دمای جسم یک طرف نامحدود در شکل ۴-۴ ارائه شده است. مقادیر تابع خطا در مرجع ۳ جدول شده و جدول خلاصه‌ای نیز در پیوست A این کتاب آورده شده است.



شکل ۴-۴ پخش دما در جسم یک طرف نامحدود.

شار گرمایی ثابت روی جسم یک‌طرف نامحدود

با همین پخش دمای یکنواخت می‌توانیم این سطح را ناگهان در معرض شار گرمایی سطحی ثابت $\frac{q_o}{A}$ قرار دهیم. بنابراین شرایط اولیه و مرزی معادله (۴-۷) چنین می‌شود:

$$T(x,\ o) = T_i$$

$$\frac{q_o}{A} = -k\,\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=o} \qquad \text{به ازای } \tau > o$$

جواب این مورد عبارتست از:

$$T - T_i = \frac{2q_o\sqrt{\frac{\alpha\tau}{\pi}}}{kA}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_o x}{kA}\left(1 - \text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \qquad (۱۳-۴)$$

مثال ۴-۲ جسم یک طرف نامحدود با تغییر ناگهانی در شرایط سطح

دمای اولیه و یکنواخت بلوک بزرگ فولادی $\left[\alpha = 1/4\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s}\text{ و }k = 45\,\frac{W}{m.^\circ C}\right]$ برابر ۳۵ °C است. سطح آن را در معرض شار گرمایی (الف) با بالا بردن ناگهانی دمای سطحی به ۲۵۰ °C و (ب) از طریق شار گرمایی سطحی ثابت به مقدار $3/2\times10^5\,\frac{W}{m^2}$، قرار می‌دهیم. دما در عمق ۲/۵cm را پس از ۰/۵ دقیقه برای هر دو مورد حساب کنید.

حل :

می‌توان از جواب‌های جسم یک‌طرف نامحدود که به صورت معادلات (۴-۸) و (۴-۱۳) ارائه شده‌اند، استفاده کرد. برای مورد الف:

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{0/025}{(2)\left[(1/4\times10^{-5})(30)\right]^{\frac{1}{2}}} = 0/61$$

تابع خطا را می‌توان از پیوست A چنین تعیین کرد:

$$erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = erf\ 0/61 = 0/611644$$

داریم $T_i = 35^\circ C$ و $T_o = 250^\circ C$، بنابراین دما در $x = 2/5$ cm را از معادله (۴-۸) چنین تعیین می‌کنیم:

$$T(x,\tau) = T_o + (T_i - T_o)\,\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$= 250 + (35 - 250)\,(0/611644) = 118/5\ ^\circ C$$

در مورد ب که شار گرمایی ثابت است از معادله (۴-۱۳) استفاده می‌کنیم. چون $\frac{q_o}{A}$ برابر $3/2\times10^5\,\frac{W}{m^2}$ است، می‌توانیم مقادیر عددی را جای‌گزین کنیم:

$$T(x,\tau) = 35 + \frac{(2)(3/2\times10^5)\left[(1/4\times10^{-5})(30)/\pi\right]^{\frac{1}{2}}}{45}\,e^{-(0/61)^2} - \frac{(0/025)(3/2\times10^5)}{45}\,(1 - 0/611644)$$

$$= 79/3^\circ C \qquad x = 2/5 cm\,,\ \tau = 30\ s$$

در مورد شار گرمایی ثابت، دمای **سطح** پس از گذشت ۳۰ ثانیه را می‌توان با قرار دادن $x = o$ در معادله (۴-۱۳) به‌دست آورد. بنابراین:

$$T(x=o) = 35 + \frac{(2)(3/2\times10^5)\left[(1/4\times10^5)(30)/\pi\right]^{\frac{1}{2}}}{45} = 199/4^\circ C$$

مثال ۴-۳ دفع گرما از جسم یک طرف نامحدود

دمای سطحی تیغه‌ای بزرگ و آلومینیومی به دمای یکنواخت ۲۰۰°C را ناگهان پایین آورده، به ۷۰°C می‌رسانیم. کل گرمای خروجی از تیغه در واحد سطح را وقتی که دما در عمق ۴/۰cm به ۱۲۰°C افت کرده باشد حساب کنید.

حل :

نخست زمان لازم برای رسیدن به دمای ۱۲۰°C را پیدا کرده، سپس کل گرمای خروجی طی این زمان را با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۲) پیدا می‌کنیم. برای آلومینیم:

$$\alpha = 8/4\times10^{-5}\,\frac{m^2}{s} \qquad k = 215\,\frac{W}{m.^\circ C}\left[124\,\frac{Btu}{h.ft.^\circ F}\right]$$

و همچنین داریم:

$$T_i = 200^\circ C \qquad T_o = 70^\circ C \qquad T(x,\tau) = 120^\circ C$$

با استفاده از معادله (۴-۸) داریم:

$$\frac{120 - 70}{200 - 70} = \text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0/3847$$

از معادله ۴-۴ با پیوست A داریم:

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0/3553$$

و:

$$\tau = \frac{(0/04)^2}{(4)(0/3553)^2(8/4\times10^{-5})} = 37/72\ s$$

کل گرمای خروجی از سطح را با انتگرال‌گیری معادلهٔ (۴-۱۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{Q_o}{A} = \int_o^\tau \frac{q_o}{A}\,d\tau = \int_o^\tau \frac{k\,(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}\,d\tau = 2k\,(T_o - T_i)\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}}$$

$$= (2)\,(215)\,(70 - 200)\quad\left[\frac{37/72}{\pi(8/4\times10^{-5})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= -21/13\times10^6\,\frac{J}{m^2} \qquad \left[-1861\,\frac{Btu}{ft^2}\right]$$

❑ ۴-۴ شرایط مرزی جابه‌جایی

در بسیاری از وضعیت‌های عملی، مسألهٔ هدایت گرمای گذرا همراه با شرط مرزی جابه‌جایی در سطح جسم است. طبیعتاً شرایط مرزی معادله دیفرانسیل را باید تغییر دهیم و این انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح را به حساب آوریم. برای جسم یک طرف نامحدود فوق، این مسأله را چنین بیان می‌کنیم:

گرمای هدایت شده به‌داخل سطح = گرمای جابه‌جا شده به‌داخل سطح

یا

$$hA\,(T_\infty - T)_{x=o} = -kA\,\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=o} \qquad (۱۴-۴)$$

حل این مسأله تا حدی پیچیده است و مشروح آن توسط اشنایدر Schneider [۱] انجام شده است. نتیجه چنین است:

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \text{erf}\,X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right] \times\left[1 - \text{erf}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right] \qquad (۱۵-۴)$$

که:

$$X = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

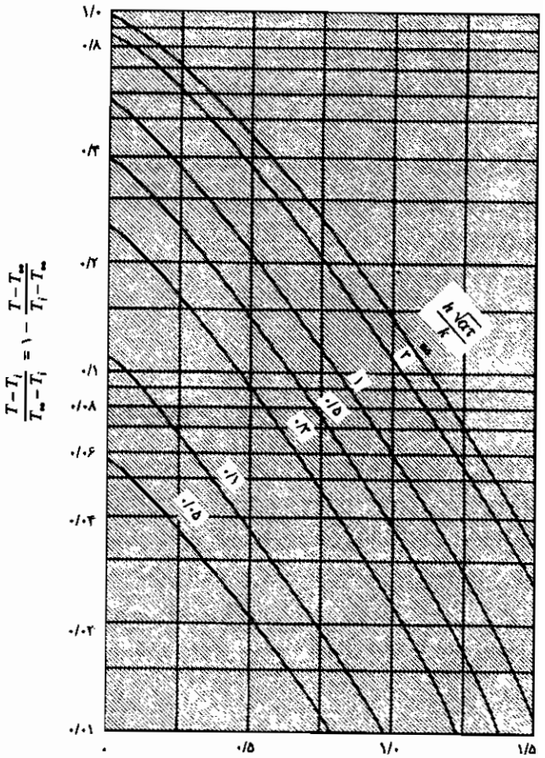
T_i = دمای اولیه جسم

T_∞ = دمای محیط

صورت ترسیمی این راه حل در شکل ۴-۵ ارائه شده است.

برای سایر اشکال هندسی راه‌حل‌هایی به‌دست آمده که مهم‌ترین آنها عبارتند از:

(۱) صفحاتی که ضخامتشان در مقایسه با سایر ابعاد کوچک است، (۲) استوانه‌هایی که قطرشان در مقایسه با ارتفاع کوچک است، و (۳) کره‌ها. نتایج حاصل از تحلیل این اشکال به صورت ترسیمی توسط هیسلر *Heisler* [۲] ارائه شده و نام‌گذاری مربوط به این سه مورد در شکل ۴-۶ نشان داده شده است. در کلیه موارد دمای محیط



شکل ۴-۵ پخش دما در جسم یک طرف نامحدود با شرط مرزی جابه‌جایی.

جابه‌جایی را با T_∞ و دمای مرکزی برای $x = 0$ یا $r = 0$ با T_0 مشخص می‌شود. فرض می‌شود که هر جسم در لحظه صفر به دمای اولیه و یکنواخت T_i باشد. دمای اجسام در شکل ۴-۷ تا ۴-۱۳ به صورت تابعی از زمان و مکان ارائه می‌شود. در این نمودارها تعاریف زیر را داریم:

$$\theta = T(x, \tau) - T_\infty \qquad \text{یا} \qquad T(r, \tau) - T_\infty$$

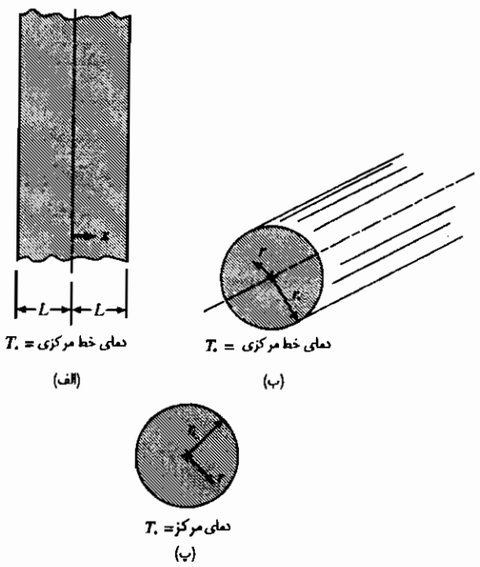
$$\theta_i = T_i - T_\infty$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty$$

چنان‌چه بخواهیم دمای خط مرکزی را به‌دست آوریم، برای تعیین مقدار θ_0 و T_0 تنها یک نمودار لازم است. برای تعیین دمای غیر از دمای مرکز، دو نمودار لازم است تا حاصل‌ضرب زیر محاسبه شود:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i}\frac{\theta}{\theta_0}$$

مثلاً برای محاسبه دمای غیر از مرکز یک صفحه نامحدود از شکل



شکل ۴-۶ اجسام جامد یک بعدی که ناگهان در معرض محیط جابه‌جایی به دمای T_∞ قرار می‌گیرند: (الف) صفحه نامحدود به ضخامت $2L$؛ (ب) استوانه نامحدود به شعاع r_0؛ (پ) کره به شعاع r_0.

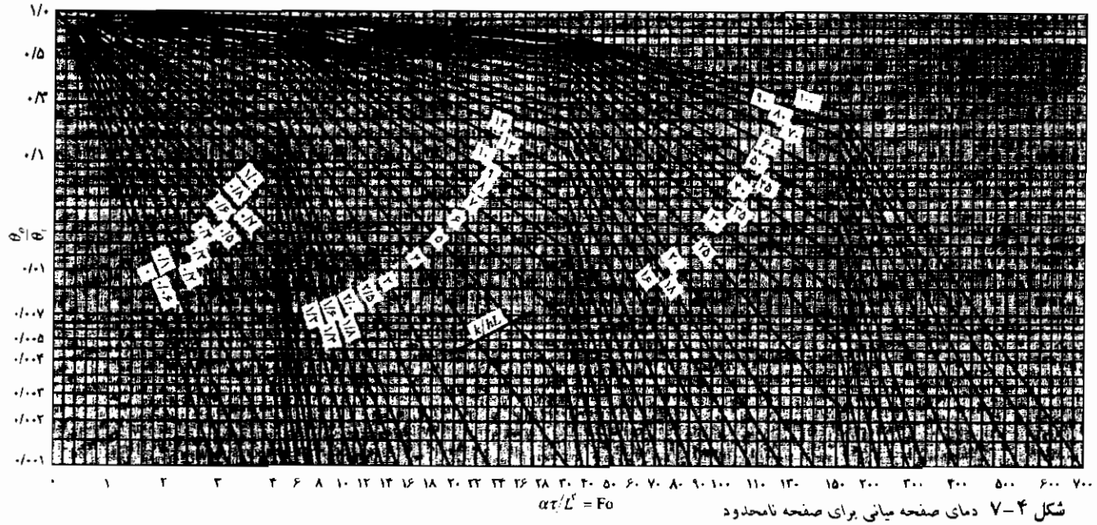
۴-۷ و ۴-۱۰ استفاده می‌شود.

اتلاف گرما از صفحه نامحدود، استوانه نامحدود و کره در اشکال ۴-۱۴ تا ۴-۱۶ داده شده‌اند که در آنها Q_0 مقدار انرژی داخلی اولیه جسم در رابطه با دمای محیط را نشان می‌دهد:

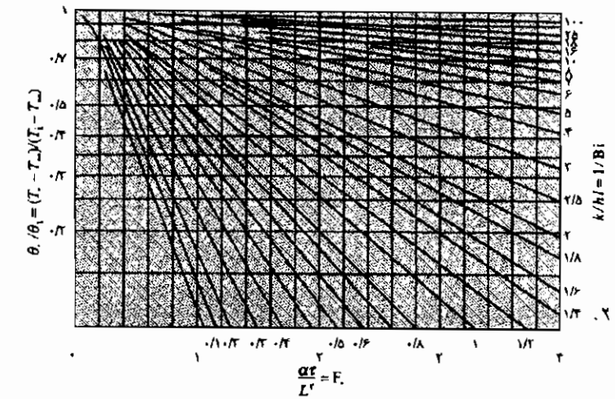
$$Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty) = \rho c V \theta_i \qquad (۱۶-۴)$$

در این اشکال Q اتلاف گرمای واقعی از جسم در مدت τ است. واضح است که بسیاری مسائل گرمایش و سرمایش عملی و جالب دیگر وجود دارند. اشنایدر [۷] راه حل تعداد زیادی از این موارد را به شکل ترسیمی ارائه کرده است و خواننده مشتاق به چنین محاسباتی، این مراجع را بسیار سودمند می‌یابد.

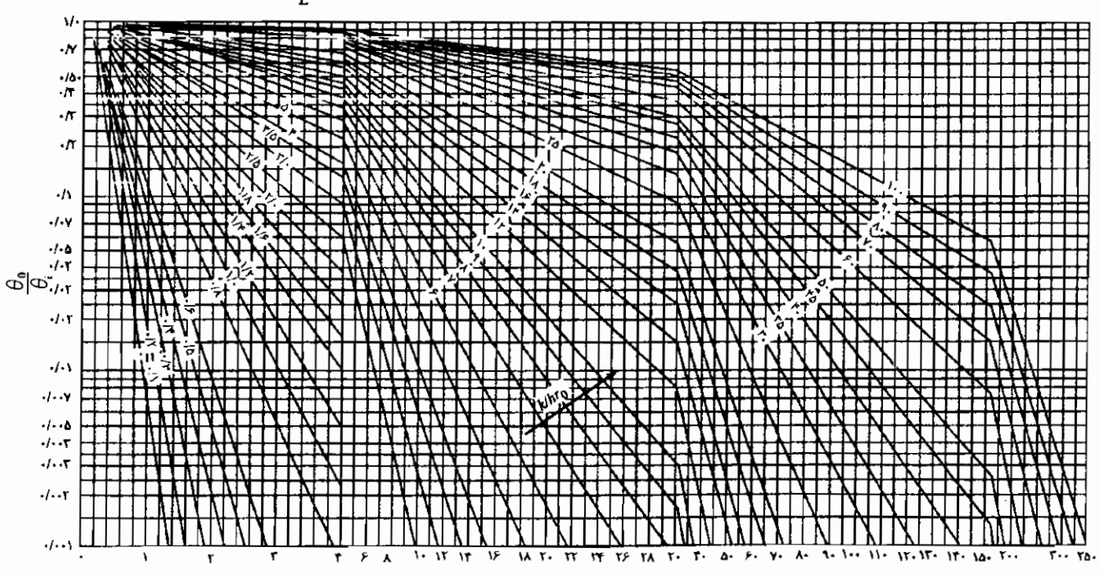
شکل ۴-۱۳ دمای مرکزی سه نوع جسم جامد را به ازای مقادیر کوچک h و یا برای شرایطی که اجسام جامد به صورت ظرفیت فشرده رفتار می‌کنند، به‌دست می‌دهد. بعد مشخصهٔ s در این شکل عبارت است از L برای صفحه و r_0 برای استوانه و کره. نمودارهای ساده‌ای نیز در مرجع [۱۷] موجود است.



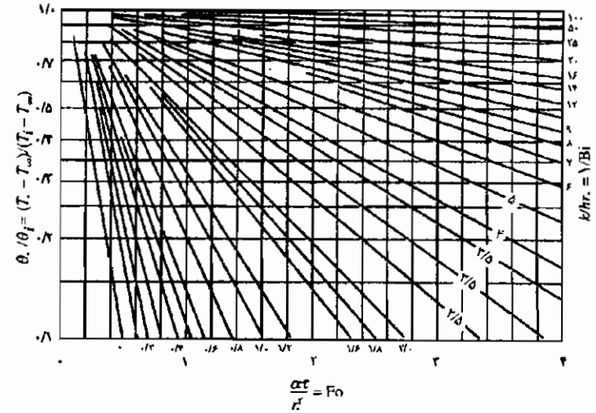
شکل ۴-۷ دمای صفحه میانی برای صفحه نامحدود به ضخامت $2L$: (الف) مقیاس کامل.



شکل ۴-۷ (ادامه)
(ب) مقیاس گسترده به ازای $F_0 > 0.2$ از مرجع ۲.

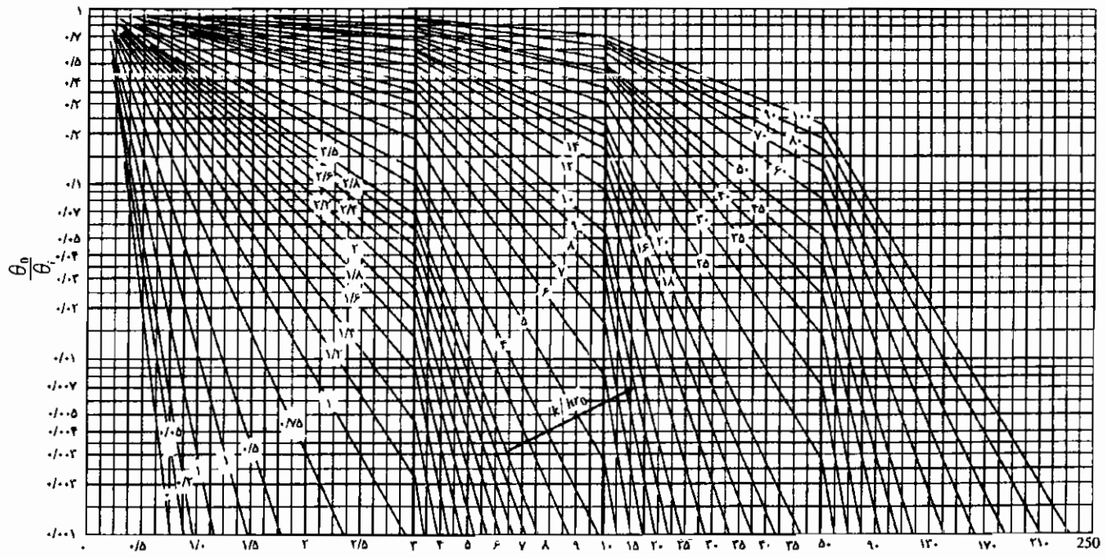


شکل ۴-۸ دمای محوری برای استوانه نامحدود به شعاع r_0: (الف) مقیاس کامل.

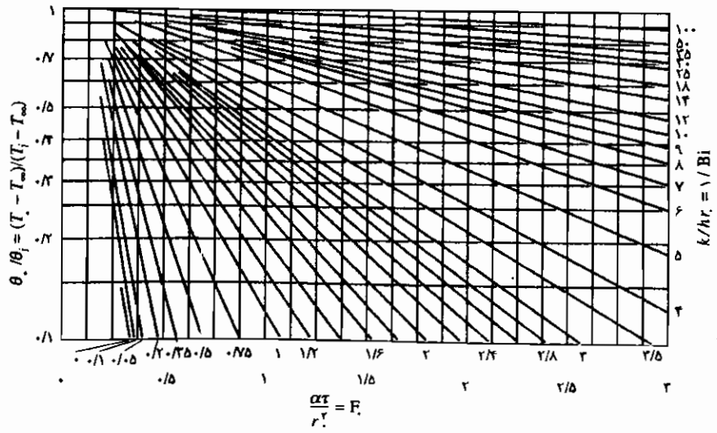


شکل ۴-۸ (ادامه)

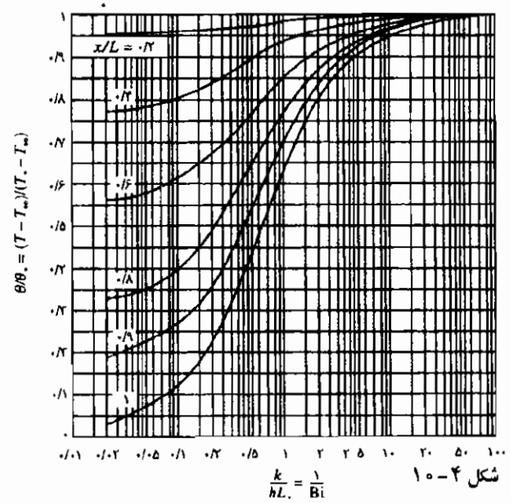
(ب) مقیاس گسترده به ازای $F_o < 4$ و $0.0 < F_o$ از مرجع ۲.



شکل ۴-۹ دمای مرکزی برای کره به شعاع r_0: (الف) مقیاس کامل.

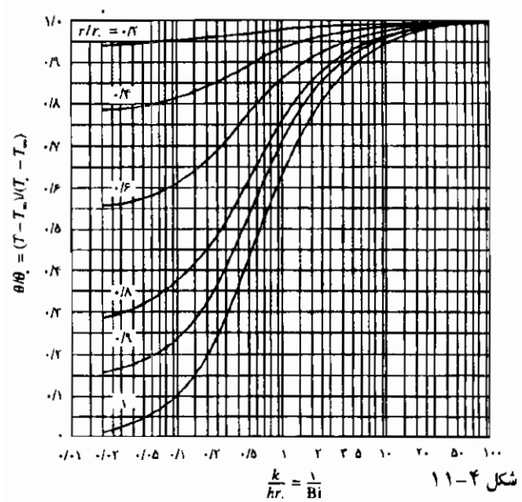


(ب) مقیاس گسترده به ازای $F_o < 3$ و $1 < F_o$ از مرجع ۲.



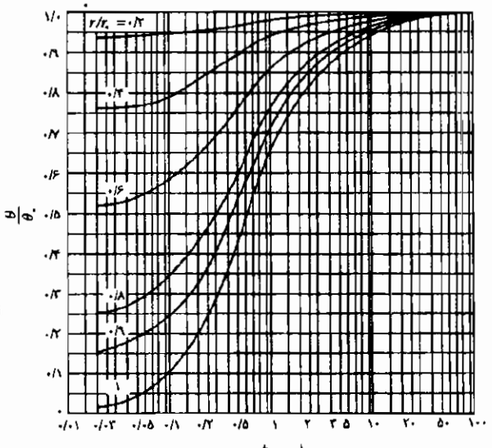
شکل ۴-۱۰

دما به صورت تابعی از دمای مرکزی در صفحه نامحدود به ضخامت $2L$، از مرجع ۲.

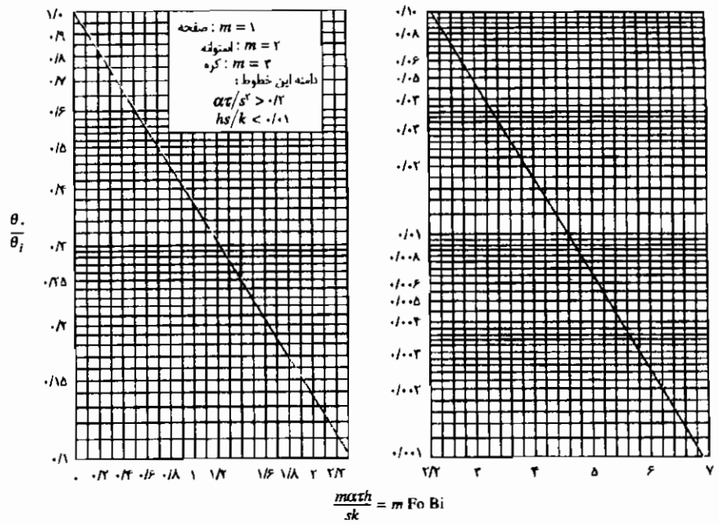


شکل ۴-۱۱

دما به صورت تابعی از دمای محوری در استوانه نامحدود به‌شعاع r_0، از مرجع ۲.



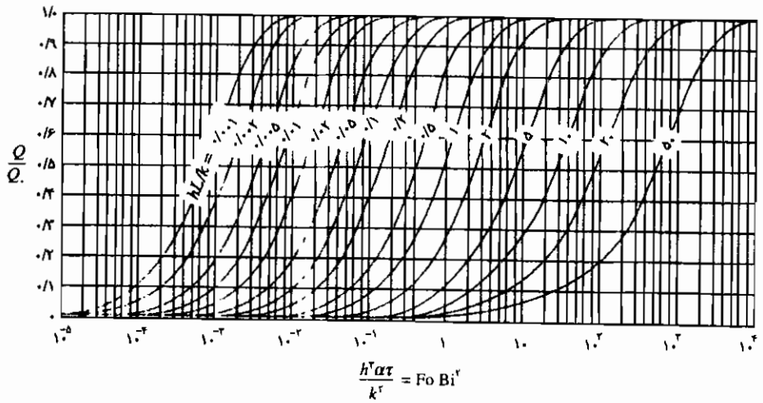
شکل ۴-۱۲ دما به صورت تابعی از دمای مرکزی برای کره به شعاع r_0، از مرجع ۲.



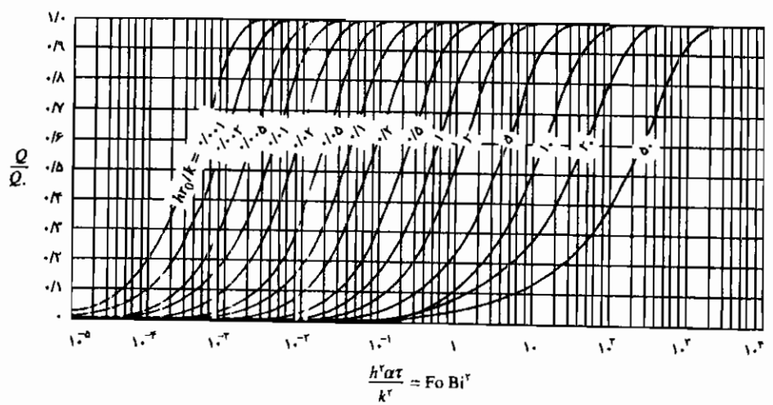
شکل ۴-۱۳

دمای مرکزی صفحات، استوانه‌ها و کره‌ها به ازای مقادیر کوچک h، طبق مرجع ۲.

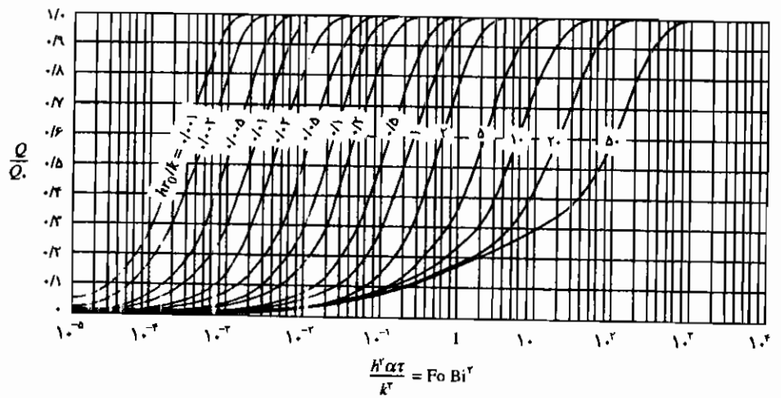
(برای صفحه $s = L$، برای استوانه و کره $s = r_0$).



شکل ۴-۱۴ اتلاف گرمای بی‌بعد $\frac{Q}{Q_0}$ صفحه نامحدود به ضخامت $2L$ با زمان، از مرجع ۶.



شکل ۴-۱۵ اتلاف گرمای بی‌بعد $\frac{Q}{Q_0}$ استوانه نامحدود به شعاع r_0 با زمان، از مرجع ۶.



شکل ۴-۱۶ اتلاف گرمای بی‌بعد $\frac{Q}{Q_0}$ کره به شعاع r_0 با زمان، از مرجع ۶.

اعداد بیو و فوریه

بررسی گذرای شکل‌های ۴-۵ تا ۴-۱۶ نشان می‌دهد که تمام نیم‌رخ‌های دما و جریان گرمای بی‌بعد را می‌توان برحسب دو سنجه بی‌بعد به نام اعداد بیو و فوریه بیان کرد:

$$\text{عدد بیو} = Bi = \frac{hs}{k}$$

$$\text{عدد فوریه} = Fo = \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho c s^2}$$

در این سنجه‌ها s بعد مشخصه‌ای از جسم را نشان می‌دهد؛ در مورد صفحه، نصف ضخامت و برای استوانه‌ها و کره عبارت است از شعاع. عدد بیو، اندازه نسبی مقاومت‌های جابه‌جایی سطحی و هدایت داخلی در مقابل انتقال گرما را مقایسه می‌کند. عدد فوریه یک بعد مشخصه جسم را با عمق تقریبی نفوذ موج دما در مدت معلوم τ مقایسه می‌کند.

عددِ بیو خیلی کوچک به معنی آن است که مقاومت هدایت داخلی در مقایسه با مقاومت جابه‌جایی سطحی قابل صرف‌نظر است و این یعنی دما در سرتاسر جسم تقریباً یکنواخت بوده، رفتار آن را می‌توان به روش تحلیل ظرفیت فشرده تقریب زد. ضمناً نمای معادلهٔ (۴-۵) را می‌توان، چنان‌چه نسبت $\frac{V}{A}$ را بعد مشخصه s بگیریم، برحسب اعداد بیو و فوریه بیان کرد. بنابراین:

$$\frac{hA}{\rho c s V}\tau = \frac{h\tau}{\rho c s} = \frac{hs}{k}\frac{k\tau}{\rho c s^2} = \text{Bi Fo}$$

قابلیت کاربرد نمودارهای هیسلر

در محاسبات مربوط به نمودارهای هیسلر از چند جمله از جواب‌های سری بی‌نهایت استفاده شده که اگر عدد فوریه بیش از ۰/۲ باشد، از این نمودارها استفاده می‌شود.

$$\text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{s^2} > ۰/۲$$

به ازای مقادیر کم‌تر از ۰/۲ این سنجه، باید به راه حل‌ها و نمودارهای مراجع گوناگون انتهای فصل مراجعه کرد. محاسباتی که در آنها مستقیماً از جواب‌های سری شاخه شده (منظور یک سری با چند جمله اولیه است که از یک سری با بی‌نهایت جمله انتخاب شده است. م) استفاده می‌شود در پیوست c بحث می‌شود.

مثال ۴-۴ قرار گرفتن ناگهانی تیغهٔ یک طرف نامحدود در معرض جابه‌جایی

تیغه مثال ۴-۳ را ناگهان در معرض محیط جابه‌جایی سطحی به دمای ۷۰°C و ضریب انتقال گرمای $۵۲۵\ \frac{W}{m^{2}{}^{\circ}C}$ قرار می‌دهند. زمان لازم را برای آن که دما در عمق ۴/۰cm به ۱۲۰°C برسد، حساب کنید.

حل :

برای حل این مسأله هم می‌توان از معادله (۴-۱۵) هم از شکل ۴-۵ استفاده کرد. ولی کاربرد شکل ۴-۵ ساده‌تر است زیرا زمان در آن در دو جمله ظاهر می‌شود. حتی وقتی از شکل استفاده شود به روشی تکراری نیاز است زیرا زمان در هر دو متغیر $h\sqrt{\alpha\tau}/k$ و $x/(۲\sqrt{\alpha\tau})$ ظاهر می‌شود. مابه دنبال مقداری از τ_i هستیم به طوری که:

$$\text{(الف)} \qquad \frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = \frac{۱۲۰ - ۲۰۰}{۷۰ - ۲۰۰} = ۰/۶۱۵$$

بنابراین به ازای مقادیر مختلف τ نسبت دما را از شکل ۴-۵ می‌خوانیم تا بالاخره با مقدار حاصل از معادله (الف) نزدیک شده باشد. تکرارها به صورت زیراند. مقادیر k و α را از مثال ۴-۳ برداشت کرده‌ایم.

τ , s	$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}$	$\frac{x}{۲\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i}$ از شکل ۴-۷
۱۰۰۰	۰/۷۰۸	۰/۰۶۹	۰/۴۱
۳۰۰۰	۱/۲۲۶	۰/۰۴۰	۰/۶۱
۴۰۰۰	۱/۴۱۶	۰/۰۳۵	۰/۶۸

در نتیجه، زمان لازم تقریباً ۳۰۰۰ ثانیه می‌شود.

مثال ۴-۵ صفحهٔ آلومینیومی که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد

صفحه بزرگ آلومینیومی به ضخامت ۵/۰cm با دمای اولیه ۲۰۰°C را ناگهان در معرض محیط جابه‌جایی مثال ۴-۴ قرار می‌دهیم. دما در عمق ۱/۲۵cm از یکی از رویه‌ها را یک دقیقه پس از این عمل حساب کنید. مقدار انرژی خارج شده از صفحه در عرض این مدت را به ازای واحد سطح به‌دست آورید.

حل :

برای حل این مسأله می‌توان از نمودارهای هیسلر شکل‌های ۴-۷ و ۴-۱۰ استفاده کرد. نخست دمای مرکز صفحه را با استفاده از شکل ۴-۷ یافته، سپس از شکل ۴-۱۰ برای محاسبهٔ دما در محل مشخص x استفاده می‌کنیم. از شرایط مسأله داریم:

$$\theta_i = T_i - T_\infty = ۲۰۰ - ۷۰ = ۱۳۰ \text{ و } \alpha = ۸/۴ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{m^2}{s} \quad \left[۳/۲۶\ \frac{ft^2}{h}\right]$$

$$۲L = ۵/۰cm \qquad L = ۲/۵cm \qquad \tau = ۱min = ۶۰s$$

$$k = ۲۱۵\ \frac{W}{m.^{\circ}C} \qquad \left[۱۲۴\ \frac{Btu}{h.ft.^{\circ}F}\right]$$

$$h = ۵۲۵\ \frac{W}{m^2.^{\circ}C} \qquad \left[۹۲/۵\ \frac{Btu}{h.ft^2.^{\circ}F}\right]$$

$$x = ۲/۵ - ۱/۲۵ = ۱/۲۵cm$$

آن‌گاه:

$$\frac{\alpha\tau}{L^2} = \frac{(۸/۴ \times ۱۰^{-۵})(۶۰)}{(۰/۰۲۵)^2} = ۸/۰۶۴\ \frac{k}{hL}$$

$$\frac{k}{hL} = \frac{۲۱۵}{(۵۲۵)(۰/۰۲۵)} = ۱۶/۳۸$$

$$\frac{x}{L} = \frac{۱/۲۵}{۲/۵} = ۰/۵$$

از شکل ۴-۷ داریم:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = ۰/۶۱$$

$$\theta_o = T_o - T_\infty = (۰/۶۱)(۱۳۰) = ۷۹/۳$$

از شکل ۴-۱۰ به ازای $\frac{x}{L} = ۰/۵$ داریم:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = ۰/۹۸$$

و:

$$\theta = T - T_\infty = (۰/۹۸)(۷۹/۳) = ۷۷/۷$$

$$T = ۷۷/۷ + ۷۰ = ۱۴۷/۷^\circ C$$

انرژی تلف‌شده از تیغه را با استفاده از شکل ۴-۱۴ حساب می‌کنیم. در این محاسبه به خواص زیر در مورد آلومینیم نیازمندیم:

$$\rho = ۲۷۰۰ \frac{kg}{m^۳} \qquad c = ۰/۹ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$$

برای شکل ۴-۱۴ نیاز به سنجه‌های زیر داریم:

$$\frac{h^۲\alpha\tau}{k^۲} = \frac{(۵۲۵)^۲(۸/۴ \times ۱۰^{-۵})(۶۰)}{(۲۱۵)^۲} = ۰/۰۳$$

$$\frac{hL}{k} = \frac{(۵۲۵)(۰/۰۲۵)}{۲۱۵} = ۰/۰۶۱$$

از شکل ۴-۱۴ داریم:

$$\frac{Q}{Q_o} = ۰/۴۱$$

به ازای واحد سطح:

$$\frac{Q_o}{A} = \frac{\rho c V \theta_i}{A} = \rho c (۲L)\theta_i$$

$$= (۲۷۰۰)(۹۰۰)(۰/۰۵)(۱۳۰)$$

$$= ۱۵/۸ \times ۱۰^۶ \frac{J}{m^۲}$$

بنابراین گرمای از دست‌رفته به ازای واحد سطح برابر است با:

$$\frac{Q}{A} = (۱۵/۸ \times ۱۰^۶)(۰/۴۱) = ۶/۴۸ \times ۱۰^۶ \frac{J}{m^۲} \qquad \left[۵۷۱ \frac{Btu}{ft^۲}\right]$$

مثال ۴-۶ استوانه بلندی که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد

استوانه آلومینیومی بلندی به قطر ۵/۰cm و دمای اولیه ۲۰۰°C را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۷۰°C و $h = ۵۲۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ قرار می‌دهیم. دما در شعاع ۱/۲۵cm و گرمای تلف‌شده به ازای واحد طول را یک دقیقه پس از این عمل حساب کنید.

حل :

این مسأله مانند مثال ۴-۵ است با این تفاوت که در حل آن از شکل‌های ۴-۸ و ۴-۱۱ استفاده می‌شود. داریم:

$$\theta_i = T_i - T_\infty = ۲۰۰ - ۷۰ = ۱۳۰ \qquad \alpha = ۸/۴ \times ۱۰^۵ \frac{m^۲}{s}$$

$$r_o = ۲/۵ \text{ cm} \qquad \tau = ۱\text{min} = ۶۰ s$$

$$k = ۲۱۵ \frac{W}{m.^\circ C} \qquad h = ۵۲۵ \frac{W}{m^۲.^\circ C} \qquad r = ۱/۲۵ \text{cm}$$

$$\rho = ۲۷۰۰ \frac{kg}{m^۳} \qquad c = ۰/۹ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$$

در نتیجه:

$$\frac{\alpha\tau}{r_o^۲} = \frac{(۸/۴ \times ۱۰^{-۵})(۶۰)}{(۰/۰۲۵)^۲} = ۸/۰۶۴$$

$$\frac{k}{hr_o} = \frac{۲۱۵}{(۵۲۵)(۰/۰۲۵)} = ۱۶/۳۸$$

$$\frac{r}{r_o} = \frac{۱/۲۵}{۲/۵} = ۰/۵$$

از شکل ۴-۸ داریم:

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = ۰/۳۸$$

و از شکل ۴-۱۱ به ازای $\frac{r}{r_o} = ۰/۵$ داریم:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = ۰/۹۸$$

بنابراین:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_o\,\theta}{\theta_i\,\theta_o} = (۰/۳۸)(۰/۹۸) = ۰/۳۷۲$$

و:

$$\theta = T - T_\infty = (۰/۳۷۲)(۱۳۰) = ۴۸/۴$$

$$T = ۷۰ + ۴۸/۴ = ۱۱۸/۴^\circ C$$

برای محاسبه اتلاف گرما، مقادیر زیر را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{h^۲\alpha\tau}{k^۲} = \frac{(۵۲۵)^۲(۸/۴ \times ۱۰^{-۵})(۶۰)}{(۲۱۵)^۲} = ۰/۰۳$$

$$\frac{hr_o}{k} = \frac{(۵۲۵)(۰/۰۲۵)}{۲۱۵} = ۰/۰۶۱$$

سپس از شکل ۴-۱۵ داریم:

$$\frac{Q}{Q_o} = ۰/۶۵$$

به ازای واحد طول:

$$\frac{Q_o}{L} = \frac{\rho c V \theta_i}{L} = \rho c \pi r_o^۲\,\theta_i = (۲۷۰۰)(۹۰۰)\pi(۰/۰۲۵)^۲(۱۳۰)$$

$$= ۶/۲۰۳ \times ۱۰^۵ \frac{J}{m}$$

و اتلاف گرمای واقعی به ازای واحد طول برابر است با:

$$\frac{Q}{L} = (۶/۲۰۳ \times ۱۰^۵)(۰/۶۵) = ۴/۰۳۲ \times ۱۰^۵ \frac{J}{m} \qquad \left[۱۱۶/۵ \frac{Btu}{ft}\right]$$

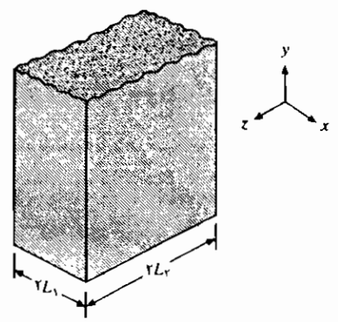
❑ ۴-۵ سیستم‌های چند بعدی

برای به‌دست آوردن پخش دما در صفحه نامحدود به ضخامت $۲L$، در استوانه بلند، یا در کره می‌توان از نمودارهای هیسلر استفاده کرد. برای دیواری که ارتفاع و طول آن در مقایسه با ضخامت بزرگ نیست و یا استوانه‌ای که ارتفاع آن در مقایسه با قطرش بزرگ نباشد، مختصات مکانی بیش‌تری برای مشخص کردن دما ضروری بوده، نمودارهای فوق دیگر به کار نرفته، مجبوریم روش حل دیگری را جستجو کنیم. خوشبختانه می‌توان راه حل‌های سیستم‌های یک بعدی را خیلی ساده ترکیب و راه حل مسائل چند بعدی را به‌دست آورد.

واضح است که میله مکعب مستطیلی نامحدود شکل ۴-۱۷ از دو صفحه نامحدود به ضخامت $۲L_۱$ و $۲L_۲$ به وجود می‌آید. معادله دیفرانسیل حاکم بر این وضعیت چنین است:

$$\frac{\partial^۲T}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲T}{\partial z^۲} = \frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۴-۱۷)$$

برای حل این مسأله می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها یک تابع حاصل ضربی به شکل زیر در نظر گرفت:



شکل ۴-۱۷ میله مکعب مستطیلی نامحدود.

$$T(x, z, \tau) = X(x)\,Z(z)\,\Theta(\tau)$$

می‌توان نشان داد که پخش دمای بی‌بعد را می‌شود به صورت حاصل‌ضرب جواب‌های دو صفحه به ضخامت‌های $۲L_۱$ و $۲L_۲$ بیان کرد:

$$\left(\frac{T - T_x}{T_i - T_x}\right)_{\text{میله}} = \left(\frac{T - T_x}{T_i - T_x}\right)_{\text{صفحه}\,۲L_۱} \left(\frac{T - T_x}{T_i - T_x}\right)_{\text{صفحه}\,۲L_۲} \qquad (۴-۱۸)$$

که T_i دمای اولیه میله و T_x دمای محیط است.

معادلات دیفرانسیل برای دو صفحه نامحدود چنین است:

$$\frac{\partial^۲T_۱}{\partial x^۲} = \frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T_۱}{\partial \tau} \qquad \frac{\partial^۲T_۲}{\partial z^۲} = \frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T_۲}{\partial \tau} \qquad (۴-۱۹)$$

و جواب‌های حاصل‌ضربی مفروض چنین است:

$$T_۱ = T_۱(x, \tau) \qquad T_۲ = T_۲(z, \tau) \qquad (۴-۲۰)$$

نشان خواهیم داد که جواب حاصل‌ضربی برای معادله ۴-۱۷ را می‌توان به صورت ضرب ساده توابع $(T_۱ \cdot T_۲)$ نوشت. یعنی:

$$T(x, x, \tau) = T_۱(x, \tau)\,T_۲(z, \tau) \qquad (۴-۲۱)$$

مشتق‌های مناسب جهت جای‌گزینی در معادلهٔ (۴-۲۳) را می‌توان از معادله (۴-۲۱) چنین به‌دست آورد:

$$\frac{\partial^۲T}{\partial x^۲} = T_۲\frac{\partial^۲T_۱}{\partial x^۲} \qquad \frac{\partial^۲T}{\partial z^۲} = T_۱\frac{\partial^۲T_۲}{\partial z^۲}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathbf{T}_۱\frac{\partial T_۲}{\partial \tau} + T_۲\frac{\partial T_۱}{\partial \tau}$$

با استفاده از معادلات (۴-۱۹) داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha T_۱\frac{\partial^۲T_۲}{\partial z^۲} + \alpha T_۲\frac{\partial^۲T_۱}{\partial x^۲}$$

با جای‌گزینی بین روابط در معادله (۴-۱۷) داریم:

$$T_۲\frac{\partial^۲T_۱}{\partial x^۲} + T_۱\frac{\partial^۲T_۲}{\partial z^۲} = \frac{۱}{\alpha}\left(\alpha T_۱\frac{\partial^۲T_۲}{\partial z^۲} + \alpha T_۲\frac{\partial^۲T_۱}{\partial x^۲}\right)$$

یعنی جواب حاصل‌ضربی مفروض معادله (۴-۲۱) در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۴-۱۷) صادق است و این بدان معنی است که پخش دمای بی‌بعد میله مکعب مستطیلی نامحدود را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب جواب‌های دو صفحه به ضخامت‌های $۲L_۱$ و $۲L_۲$ یعنی به صورت معادله (۴-۱۸) بیان کرد.

به طریق مشابه فوق می‌توان جواب بلوک سه بعدی را به صورت حاصل‌ضرب جواب‌های سه صفحه نامحدود به ضخامت سه جانب این بلوک بیان کرد. به همین ترتیب جواب استوانه به ارتفاع محدود را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب جواب‌های استوانه نامحدود و یک صفحه نامحدود به ضخامتی برابر ارتفاع استوانه بیان کرد. از ترکیب جواب‌های استوانه نامحدود و صفحه نامحدود نیز می‌توان برای پخش دما در میله‌ها و استوانه‌های یک طرف نامحدود استفاده کرد. بعضی از این ترکیبات در شکل ۴-۱۸ خلاصه شده‌اند که در آنها:

$C(\Theta)$ = جواب استوانه نامحدود

$P(X)$ = جواب صفحه نامحدود

$S(X)$ = جواب جسم یک طرف نامحدود

بنابراین ایده کلی عبارت است از:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{جسم ترکیبی}} = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{جسم ۳ متقاطع}} \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{جسم ۲ متقاطع}} \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{جسم ۱ متقاطع}}$$

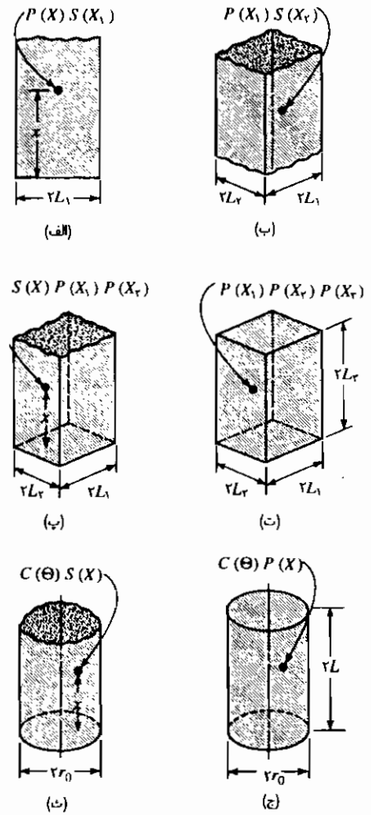
انتقال گرما در سیستم‌های چند بعدی

لانگستن [۱۶] نشان داد که می‌توان جواب‌های اتلاف گرمای اجسام یک بعدی را، مطابق شکل ۴-۱۴، ۴-۱۵ و ۴-۱۶ روی هم گذارد و اتلاف گرمای جسم چند بعدی را به‌دست آورد. نتیجه حاصل از این تحلیل برای تقاطع دو جسم عبارت است از:

$$\left(\frac{Q}{Q_o}\right)_{\text{کل}} = \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۱ + \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۲\left[۱ - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۱\right] \qquad (۴-۲۲)$$

که پانویس‌ها اجسام متقاطع را نشان می‌دهد. اتلاف گرمای جسم چند بعدی حاصل از تقاطع سه سیستم یک بعدی، عبارت است از:

$$\left(\frac{Q}{Q_o}\right)_{\text{کل}} = \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۱ + \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۲\left[۱ - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۱\right] + \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۳\left[۱ - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۲\right]\left[۱ - \left(\frac{Q}{Q_o}\right)_۱\right] \qquad (۴-۲۳)$$



شکل ۴-۱۸ جواب‌های حاصل‌ضربی دما در سیستم‌های چندبعدی: (الف) صفحه یک طرف نامحدود؛ (ب) میله مکعب مستطیلی نامحدود؛ (پ) میله مکعب مستطیلی یک طرف نامحدود؛ (ت) مکعب مستطیل؛ (ث) استوانهٔ یک طرف نامحدود؛ (ج) استوانه کوتاه.

محاسبه اتلاف گرما پس از گذشت زمانی معلوم سر راست است اما اگر بخواهیم زمان اتلاف گرمای معینی را حساب کنیم باید از روش تکرار یا آزمایش و خطا استفاده کنیم. مثال‌های زیر کاربرد نمودارهای مختلف را در محاسبه دماها و جریان‌های گرما در سیستم‌های چند بعدی نشان می‌دهد.

مثال ۴-۷ استوانه یک طرف نامحدودی که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد

قطر استوانه آلومینیومی یک طرف نامحدودی 5cm و دمای اولیه و یکنواخت آن 200°C است. این استوانه ناگهان در معرض شرط مرزی جابه‌جایی به دمای 70°C و $h = 525 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$ قرار می‌گیرد. دما در محور و سطح استوانه در 10cm مانده به انتها را یک دقیقه پس از این عمل حساب کنید.

حل:

برای حل این مسأله نیاز به ترکیب جواب‌های استوانه نامحدود و تیغه یک طرف نامحدود مطابق شکل (۴-۱۸ ث) داریم. برای تیغه داریم:

$$x = 10\ \text{cm} \qquad \alpha = 8/4 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s} \qquad k = 215\ \frac{W}{m.°C}$$

بنابراین سنجه‌های مورد نیاز در شکل ۴-۵ عبارتند از:

$$\frac{h\sqrt{\alpha \tau}}{k} = \frac{(525)\left[(8/4 \times 10^{-5})(60)\right]^{\frac{1}{2}}}{215} = 0/173$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} = \frac{0/1}{(2)\left[(8/4 \times 10^{-5})(60)\right]^{\frac{1}{2}}} = 0/704$$

از شکل ۴-۵ داریم:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{تیغهٔ یک طرف نامحدود}} = 1 - 0/036 = 0/964 = S(X)$$

در مورد استوانه نامحدود باید هم نسبت دمای محور هم نسبت دمای سطح را به‌دست آورد. سنجه‌های مورد نیاز در شکل ۴-۸ عبارتند از:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0/38 \quad \text{و} \quad \frac{\alpha \tau}{r_0^2} = 8/064 \quad \text{و} \quad \frac{k}{hr_0} = 16/38 \quad \text{و} \quad r_0 = 2/5\text{cm}$$

و این نسبت دمای محور است. برای به‌دست آوردن نسبت دمای سطح، با داشتن سنجه‌های زیر به شکل ۴-۱۱ مراجعه می‌کنیم:

$$\frac{r}{r_0} = 1/0 \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = 0/97$$

بنابراین:

$$C(\Theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{استوانهٔ نامحدود}} = \begin{cases} 0/38 & \text{در } r = 0 \\ (0/38)(0/97) = 0/369 & \text{در } r = r_0 \end{cases}$$

با ترکیب دو جواب تیغه یک طرف نامحدود و استوانه نامحدود، داریم:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{استوانه یک‌طرف‌نامحدود}} = C(\Theta)\, S(X)$$

$$= (0/38)(0/964) = 0/366 \quad \text{در } r = 0$$

$$= (0/369)(0/964) = 0/356 \quad \text{در } r = r_0$$

دماهای مربوطه چنین است:

$$T = 70 + (0/366)(200 - 70) = 117/6 \quad \text{در } r = 0$$

$$T = 70 + (0/356)(200 - 70) = 116/3 \quad \text{در } r = r_0$$

مثال ۴-۸ استوانه به ارتفاع محدود که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد

استوانه آلومینیومی کوتاهی به قطر 5/0cm و طول 10/0cm به دمای اولیهٔ 200°C است. این استوانه را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای 70°C و $h = 525 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$ قرار می‌دهند. دما در شعاع 1/25 cm و به فاصله 0/625 cm از یک سر استوانه را یک دقیقه پس از این عمل حساب کنید.

حل:

برای حل این مسأله جواب نمودارهای هیسلر استوانه نامحدود و صفحه نامحدود را مطابق شکل (۴-۱۸ ج) ترکیب می‌کنیم. برای صفحه نامحدود داریم:

$$L = 5\ \text{cm}$$

x فاصله از مرکز صفحه است به طوری که:

$$x = 5 - 0/625 = 4/375\ \text{cm} \qquad \frac{x}{L} = \frac{4/375}{5} = 0/875$$

برای آلومینیم:

$$\alpha = 8/4 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s} \qquad k = 215\ \frac{W}{m.°C}$$

بنابراین:

$$\frac{\alpha \tau}{L^2} = \frac{(8/4 \times 10^{-5})(60)}{(0/05)^2} = 2/016 \qquad \frac{k}{hL} = \frac{215}{(525)(0/05)} = 8/19$$

از شکل‌های ۴-۷ و ۴-۱۰ به ترتیب داریم:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0/75 \qquad \frac{\theta}{\theta_i} = 0/95$$

بنابراین:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{صفحه}} = (0/75)(0/95) = 0/7125$$

برای استوانه $r_0 = 2/5$ cm :

$$\frac{k}{hr_0} = \frac{215}{(525)(0/025)} = 16/38 \qquad \frac{r}{r_0} = \frac{1/25}{2/5} = 0/5$$

$$\frac{\alpha \tau}{r_0^2} = \frac{(8/4 \times 10^{-5})(60)}{(0/025)^2} = 8/064$$

و از شکل‌های ۴-۸ و ۴-۱۱ به ترتیب داریم:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0/38 \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = 0/98$$

بنابراین:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{استوانه}} = (0/38)(0/98) = 0/3724$$

با ترکیب جواب‌های صفحه و استوانه داریم:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{استوانهٔ کوتاه}} = (0/7125)(0/3724) = 0/265$$

بنابراین:

$$T = T_\infty + (0/265)(T_i - T_\infty) = 70 + (0/265)(200 - 70) = 104/5°C$$

مثال ۴-۹ اتلاف گرمای استوانهٔ به ارتفاع محدود

اتلاف گرما از استوانه کوتاه مثال ۴-۸ را حساب کنید.

حل:

نخست اتلاف گرمای بی‌بعد را برای صفحه نامحدود و استوانه نامحدودی که جسم چند بعدی را می‌سازند حساب می‌کنیم. برای صفحه $L = 5\text{cm} = 0/05\text{m}$ است. با استفاده از خواص آلومینیم از مثال ۴-۸ داریم:

$$\frac{hL}{k} = \frac{(525)(0/05)}{215} = 0/122$$

$$\frac{h^2 \alpha \tau}{k^2} \quad \frac{(525)(8/4 \times 10^{-5})(60)}{(215)^2} = 0/03$$

از شکل ۴-۱۴، برای صفحه، می‌خوانیم:

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p = 0/22$$

برای استوانه $r_0 = 2/5\text{cm} = 0/025\text{m}$، بنابراین:

$$\frac{hr_0}{k} = \frac{(525)(0/025)}{215} = 0/061$$

و از روی شکل می‌خوانیم :

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_c = 0/55$$

اکنون دو نسبت گرما را در معادلهٔ (۴-۲۲) قرار داده و داریم:

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{\text{کل}} = 0/22 + (0/55)(1 - 0/22) = 0/649$$

گرمای ویژه آلومینیم برابر $0/896 \frac{kJ}{kg.°C}$ و چگالی $2707 \frac{kg}{m^3}$ است و در نتیجه Q_0 چنین محاسبه می‌شود:

$$Q_0 = \rho c V \theta_i = (2707)(0/896)\,\pi\,(0/025)^2 (0/1)(200 - 70)$$

$$= 61/9\ \text{kJ}$$

از این رو، اتلاف گرمای واقعی در عرض یک دقیقه برابر است با:

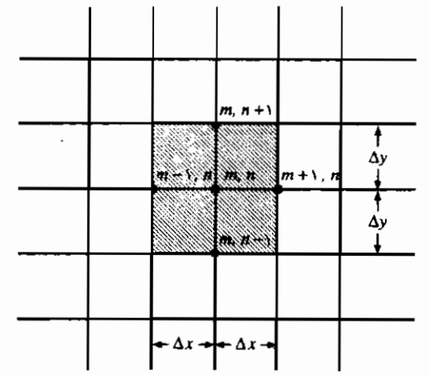
$$Q = (61/9\ \text{kJ})(0/649) = 40/2\ \text{kJ}$$

۴-۶ روش عددی گذرا

نمودارهای رسم‌شده برای محاسبه دما در بعضی اجسام منظم شکل در شرایط جریان گرمای گذرا، بسیار سودمند است. متأسفانه، بسیاری از اشکال هندسی در عمل بدین گونه نیستند؛ به علاوه گاه با مسائلی مواجه می‌شویم که شرایط مرزی آنها بر حسب زمان تغییر می‌کند. این شرایط مرزی گذرا مثل شکل هندسی جسم می‌تواند به گونه‌ای باشد که نتوان راه حلی ریاضی برای آن پیدا کرد. در این‌گونه موارد، مسأله با روش عددی و کامپیوتر بهتر حل می‌شود و اکنون می‌خواهیم همین نحوه محاسبه را توضیح دهیم. برای سادگی بحث، تحلیل را به سیستم‌های دوبعدی محدود می‌کنیم. سپس مسأله را خیلی ساده می‌توان به سیستم‌های سه بعدی بسط داد.

یک جسم دوبعدی را که به نموهایی مطابق شکل ۴-۱۹ تقسیم شده در نظر بگیرید. زیرنویس m موقعیت x و زیرنویس n موقعیت y را نشان می‌دهد. معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان گرما در داخل جسم جامد، با فرض ثابت بودن خواص، عبارت است از:

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۴-۲۴)$$



شکل ۴-۱۹ نام‌گذاری برای حل عددی مسأله هدایت حالت ناپایدار دوبعدی.

ازفصل سوم به‌خاطر آوریدکه مشتق‌های جزئی دوم تقریباً برابرند با:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\,(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}) \qquad (۴-۲۵)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}\,(T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}) \qquad (۴-۲۶)$$

مشتق دما نسبت به زمان در معادله (۴-۲۴) به طور تقریب برابر است با:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T^{p}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta \tau} \qquad (۴-۲۷)$$

در این رابطه زیرنویس‌ها نمو زمانی را مشخص می‌کنند. با ترکیب روابط فوق، معادله تفاضلی هم‌ارز معادلهٔ (۴-۲۴) به‌دست می‌آید:

$$\frac{T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} - 2T^{p}_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1} - 2T^{p}_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta \tau} \qquad (۴-۲۸)$$

بنابراین، اگر دمای گره‌های مختلف در هر لحظه خاص، معلوم باشد دما پس از نمو زمانی $\Delta\tau$ را می‌توان با نوشتن معادله‌ای شبیه معادلهٔ (۴-۲۸) برای هر نقطه و به‌دست آوردن مقادیر $T^{p+1}_{m,n}$، حساب کرد. برای به‌دست آوردن پخش، پس از هر تعداد نمو زمانی مورد نظر، می‌توان روش مزبور را تکرار کرد. چنان‌چه نمو‌های مختصات مکانی طوری انتخاب شود که:

$$\Delta x = \Delta y$$

معادله حاصل برای $T^{p+1}_{m,n}$ چنین می‌شود:

$$T^{p+1}_{m,n} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\,(T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1})$$

$$+ \left[1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p}_{m,n} \qquad (۴-۲۹)$$

اگر نمو‌های زمان و مکان، برای راحتی امر، طوری انتخاب شود که:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = 4 \qquad (۴-۳۰)$$

ملاحظه می‌شود که دمای گره (m,n) پس از یک نمو زمانی برابر با متوسط عددی چهار دمای گرهی محصور کننده این گره در شروع نمو زمانی است.

معادلهٔ سیستم یک بعدی چنین است:

$$T^{p+1}_{m} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\,(T^{p}_{m+1} + T^{p}_{m-1}) + \left[1 - \frac{2\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p}_{m} \qquad (۴-۳۱)$$

و چنان‌چه نمو‌های زمان و مکان طوری انتخاب شود که:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = 2 \qquad (۴-۳۲)$$

دمای گره m پس از نمو زمانی برابر متوسط عددی دو دمای گرهی مجاور آن در شروع نمو زمانی است.

در اینجا بعضی نکات کلّی در استفاده از روش‌های عددی برای حل مسائل هدایت گذرا ردیف شده‌اند. گفتیم که انتخاب درست مقدار سنجه:

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau}$$

حل عددی را ساده می‌کند؛ به ویژه انتخاب مقدار ۴ برای سیستم دو بعدی و مقدار ۱ برای سیستم یک‌بعدی، محاسبه را ساده می‌کند.

با مشخص شدن نمو‌های فاصله و مقدار M، نمو زمانی نیز مشخص می‌شود؛ و نمی‌توانیم آن را بدون تغییر Δx یا M یا هر دو، تغییر دهیم. واضح است که هر چه مقادیر Δx و $\Delta\tau$ بزرگ‌تر باشند، حل سریع‌تر به پیش می‌رود. از طرف دیگر، هر چه نمو متغیرهای مستقل، کوچک‌تر باشد، دقت بیش‌تر خواهد شد. ممکن است در نگاه اول به نظر آید که می‌توان از نمو‌های فاصله کوچک برای دقت بیش‌تر و از نمو‌های زمانی بزرگ، برای تسریع راه حل استفاده کرد، اما این درست نیست، زیرا معادلات تفاضل محدود، مقادیر $\Delta\tau$ پس از انتخاب Δx را محدود می‌کنند. توجه داشته باشید که اگر در معادلهٔ (۴-۳۱) $M < 2$ باشد، ضریب T^{p}_{m} منفی شده و شرطی را ایجاد کرده‌ایم که از قانون دوم ترمودینامیک عدول می‌کند. مثلاً فرض کنید که دمای گره‌های مجاور مساوی ولی کم‌تر از T^{p}_{m} باشد. T^{p}_{m} پس از نمو زمانی $\Delta\tau$، کم‌تر از این دماهای مجاور نیست؛ وگرنه گرما مجبور است که روی مقیاس دما به بالا جریان یابد و این غیرممکن است. مقدار $M < 2$ نیز چنین تأثیری دارد؛ بنابراین باید مقدار M را محدود کنیم به:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} M \geq 2 & \text{برای سیستم‌های یک بعدی} \\ M \geq 4 & \text{برای سیستم‌های دوبعدی} \end{cases}$$

این محدودیت خودبه‌خود ما را در انتخاب $\Delta\tau$، پس از تثبیت Δx، محدود می‌کند.

اغلب اتفاق می‌افتد که محدودیت‌های فوق که از نظر فیزیکی تحمیل می‌شود بر مبانی ریاضی نیز قابل حصول است. می‌توان نشان داد که راه‌حل‌های تفاضل محدود، هم‌گرا نخواهند شد مگر این شرایط برآورده شود. مسائل پایداری و هم‌گرایی راه حل‌های عددی به طور مشروح در مراجع ۷ و ۱۳ و ۱۵ مورد بحث قرار می‌گیرند.

معادلات تفاضلی فوق برای تعیین دمای داخلی جسم به صورت تابعی از مکان و زمان سودمندند. معمولاً در مرز جسم یک مقاومت جابه‌جایی در برابر جریان گرما وجود دارد و دیگر روابط فوق قابل استفاده نیستند. به طور کلی، هر نوع شرط مرزی جابه‌جایی را باید بسته به شکل هندسی خاص جداگانه بررسی کرد. مورد دیوار تخت را به عنوان مثال بررسی می‌کنیم.

برای سیستم یک بعدی شکل ۴-۲۰ می‌توان توازن انرژی در مرز جابه‌جایی را چنین نوشت:

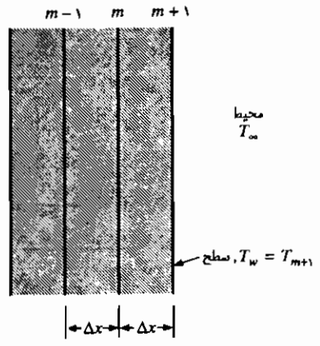
$$-kA\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{\text{دیوار}} = hA\,(T_w - T_\infty) \qquad (۴-۳۳)$$

تقریب تفاضل محدود را می‌توان چنین ارائه کرد:

$$-k\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\,(T_{m+1} - T_m) = h\,\Delta y\,(T_{m+1} - T_\infty)$$

یا:

$$T_{m+1} = \frac{T_m + \dfrac{h\,\Delta x}{k}\,T_\infty}{1 + \dfrac{h\,\Delta x}{k}}$$



شکل ۴-۲۰ نام‌گذاری برای حل عددی مسأله هدایت حالت ناپایدار با شرط مرزی جابه‌جایی.

برای اعمال این شرط، باید دمای سطحی T_{m+1} در هر نمو زمانی را محاسبه و آن را در معادلات گرهی نقاط داخلی جسم به کار ببریم. این امر تقریبی است زیرا از ظرفیت گرمایی جزء دیوار در مرز صرف‌نظر کرده‌ایم. این تقریب، وقتی که تعداد نمو‌های x زیاد باشد، خوب است زیرا قسمت صرف‌نظر شدهٔ ظرفیت گرمایی در مقایسه با کل آن کوچک خواهد شد. به طور کلی می‌توان ظرفیت گرمایی را با در نظر گرفتن دیوار دو بعدی شکل ۳-۷ که در معرض شرط مرزی جابه‌جایی است، و آن را برای راحتی به صورت شکل ۴-۲۱ آورده‌ایم، به حساب آورد. توازن انرژی گذرا در نقطه (m,n) را با مساوی قرار دادن مجموع انرژی هدایتی و جابه‌جایی به داخل گره با افزایش انرژی داخلی گره، چنین می‌نویسیم:

$$k\Delta y\,\frac{T^{p}_{m-1,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta x} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T^{p}_{m,n+1} - T^{p}_{m,n}}{\Delta y}$$

$$+ k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T^{p}_{m,n-1} - T^{p}_{m,n}}{\Delta y} + h\,\Delta y\,(T_\infty - T^{p}_{m,n})$$

$$= \rho c\,\frac{\Delta x}{2}\,\Delta y\,\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta \tau}$$

اگر $\Delta x = \Delta y$ باشد، رابطه مربوط به $T^{p+1}_{m,n}$ چنین می‌شود:

$$T^{p+1}_{m,n} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\,\frac{h\Delta x}{k}\,T_\infty + 2T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1}\right.$$

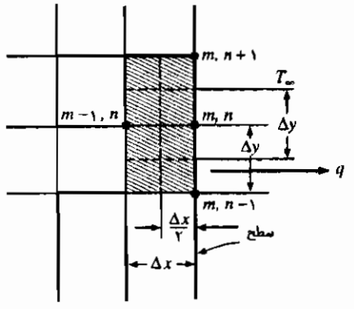
$$\left. + T^{p}_{m,n-1} + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} - 2\,\frac{h\Delta x}{k} - 4\right] T^{p}_{m,n}\right\} \qquad (۴-۳۴)$$

رابطه یک بعدی مربوطه چنین است:

$$T^{p+1}_{m} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\,\frac{h\Delta x}{k}\,T_\infty + 2T^{p}_{m-1}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} - 2\,\frac{h\Delta x}{k} - 2\right] T^{p}_{m}\right\} \qquad (۴-۳۵)$$

توجه کنید که انتخاب سنجه به سادگی انتخاب آن برای نقاط گرهی داخلی نیست زیرا ضریب انتقال گرما بر انتخاب آن مؤثر است.



شکل ۴-۲۱ نام‌گذاری برای معادله گرهی با شرط مرزی جابه‌جایی.

باز هم می‌توان مقدار این سنجه را طوری انتخاب کرد که ضریب T^p_m یا $T^p_{m,n}$ صفر شود. در نتیجه این مقادیر برابرند با:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right) & \text{برای حالت یک بعدی} \\ 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) & \text{برای حالت دو بعدی} \end{cases}$$

برای رسیدن به هم‌گرایی در راه حل عددی، تمام انتخاب‌های سنجه $\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau}$ به صورت زیر محدود شود:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} \geq \begin{cases} 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right) & \text{برای حالت یک بعدی} \\ 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) & \text{برای حالت دو بعدی} \end{cases}$$

تفاضل‌های پیش‌رو و پس‌رو

معادلات بالا بر مبنای روش ***تفاضل پیش‌رو*** به‌دست آمده است که در آن دمای گره در نمو زمانی بعدی برحسب دماهای گرهی احاطه کنندهٔ آن در شروع نمو زمانی بیان می‌شود، این روابط را فرمول‌بندی **صریح** می‌نامند زیرا می‌توانیم دماهای گرهی $T^{p+1}_{m,n}$ را به طور صریح برحسب دماهای گرهی قبلی $T^p_{m,n}$ بنویسیم. در این فرمول‌بندی، محاسبه مستقیماً از یک نمو زمانی به نمو بعدی پیش می‌رود تا پخش دما در حالت نهایی مطلوب محاسبه شود.

معادله تفاضلی را می‌توان با محاسبه مشتقات مکانی برحسب دماها در نمو زمانی $p+1$ نیز فرمول‌بندی کرد. این نوع ترتیب کار را فرمول‌بندی ***تفاضل پس‌رو*** می‌نامند زیرا مشتق زمانی از لحظات مربوط به هدایت گرما به داخل گره، به پس می‌رود. پس معادلهٔ هم‌ارز معادلهٔ (۴-۲۸) چنین است:

$$\frac{T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m-1,n} - 2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1} - 2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta \tau} \qquad (۴-۳۶)$$

هم‌ارز معادلهٔ (۴-۲۹) چنین است:

$$T^p_{m,n} = \frac{-\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\left(T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m-1,n} + T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1}\right) + \left[1 + \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p+1}_{m,n} \qquad (۴-۳۷)$$

پس در فرمول‌بندی تفاضل پس‌رو، محاسبه صریح T^{p+1} بر حسب T^p ممکن نیست، بلکه باید دستگاه کامل از معادلات را برای کل سیستم گرهی نوشته، هم‌زمان حل کرد تا دماهای T^{p+1} معین شود. بنابراین می‌گوییم که روش تفاضل پس‌رو موجب ***فرمول‌بندی غیرصریح*** دماهای آینده در تحلیل گذرا می‌شود. دستگاه معادلات را می‌توان به روش‌های فصل ۳ حل کرد.

اعداد بیو و فوریه مسائل با فرمت عددی را می‌توان چنین نیز تعریف کرد:

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} \qquad (۴-۳۸)$$

$$Fo = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \qquad (۴-۳۹)$$

جدول‌های ۴-۲ و ۴-۳ با استفاده از این نمادگذاری درست شده، خلاصه‌ای از معادلات گرهی نمونه در فرمول‌بندی صریح و غیر صریح آمده است.

حُسن روش تفاضل پیش‌رو صریح آن است که دماهای گرهی آینده مستقیماً محاسبه می‌شوند. گرچه پایداری این محاسبه به انتخاب مقادیر Δx و $\Delta \tau$ بستگی دارد. انتخاب Δx کوچک خودبه‌خود موجب انتخاب حداکثر مقدار $\Delta \tau$ می‌شود. در حالی که در حل معادلاتی که از فرمول‌بندی غیرصریح به‌دست می‌آیند چنین محدودیتی وجود ندارد. یعنی می‌توان نموهای زمانی بزرگ‌تری انتخاب کرد و محاسبات را سرعت بخشید. عیب آشکار روش غیرصریح، تعداد زیادتر محاسبات برای هر مرحله زمانی است. گرچه با استفاده از روش غیرصریح در مسائلی که تعداد گره‌ها زیاد است زمان کل حذف شدهٔ کامپیوتر برای حل نهایی کم‌تر می‌شود زیرا در روش صریح به خاطر نیازهای پایداری از نموهای زمانی خیلی کوچک استفاده می‌شود. در روش غیرصریح برای تسریع حل می‌توان از نموهای خیلی بزرگ‌تر $\Delta \tau$ استفاده کرد.

خواننده می‌تواند برای بحث در مورد بسیاری از کاربردهای تحلیل عددی در مسائل هدایت گرمای گذرا به مراجع ۴، ۸، ۱۳، ۱۴، ۱۵ رجوع کند.

اکنون روشن است که روش‌های تفاضل محدود را می‌توان تقریباً در هر وضعیت با اندکی حوصله و دقت به کار برد. وقتی امکان استفاده از کامپیوتر عددی بزرگ‌تر موجود باشد حل مسائل خیلی پیچیده کاملاً ساده می‌شود. برنامه‌های کامپیوتری مربوط به چندین مسأله جالب انتقال گرما در مراجع ۱۷، ۱۹ و ۲۱ فصل ۳ ارائه شده‌اند. روش‌های جزء محدود برای استفاده در مسائل انتقال گرمای هدایتی در مراجع ۹ تا ۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرند. برای استفاده در میکرو کامپیوترها نیز بسته‌های نرم‌افزاری در بازار موجودست.

☑**جدول ۴-۲** معادلات گرهی صریح (خط‌چین‌ها حجم جزء را نشان می‌دهند)

وضعیت فیزیکی	معادلهٔ گرهی به ازای $\Delta x = \Delta y$	نیاز پایداری
(الف) گره داخلی	$T^{p+1}_{m,n} = Fo(T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m+1,n} + T^p_{m,n-1}) + [1 - 4(Fo)]T^p_{m,n}$	$Fo \leq \frac{1}{4}$
(ب) گره مرز جابه‌جایی	$T^{p+1}_{m,n} = Fo[2T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m,n-1} + 2(Bi)T^p_\infty) + [1 - 4(Fo) - 2(Fo)(Bi)]T^p_{m,n}$	$Fo(2+Bi) \leq \frac{1}{2}$
(پ) گوشهٔ بیرونی با مرز جابه‌جایی	$T^{p+1}_{m,n} = 2(Fo)[T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n-1} + 2(Bi)T^p_\infty] + [1 - 4(Fo) - 4(Fo)(Bi)]T^p_{m,n}$	$Fo(1+Bi) \leq \frac{1}{2}$
(ت) گوشهٔ داخلی با مرز جابه‌جایی	$T^{p+1}_{m,n} \frac{2}{3} Fo[2T^p_{m,n+1} + 2T^p_{m+1,n} + T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n-1} + 2(Bi)T^p_\infty] + [1 - 4(Fo) - \frac{4}{3}(Fo)(Bi)]T^p_{m,n}$	$Fo(3+Bi) \leq \frac{3}{4}$
(ث) مرز عایق‌شده	$T^{p+1}_{m,n} = Fo[2T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m,n-1}] + [1 - 4(Fo)]T^p_{m,n}$	$Fo \leq \frac{1}{4}$

☑جدول ۴-۳ معادلات گرهی غیرصریح (خط‌چین‌ها جزء حجم را نشان می‌دهند)

وضعیت فیزیکی	معادلهٔ گرهی به ازای $\Delta x = \Delta y$
(الف) گره داخلی	$\left[۱ + ۴\,(Fo)\right] T_{m,n}^{p+۱} - Fo\left[T_{m-۱,n}^{p+۱} + T_{m,n+۱}^{p+۱} + T_{m+۱,n}^{p+۱} + T_{m,n-۱}^{p+۱}\right] - T_{m,n}^{p} = ۰$
(ب) گره مرز جابه‌جایی	$\left[۱ + ۲\,(Fo)(۲ + Bi)\right] T_{m,n}^{p+۱} - Fo\left[T_{m,n+۱}^{p+۱} + T_{m,n-۱}^{p+۱} + ۲T_{m-۱,n}^{p+۱} + ۲\,(Bi)\,T_{\infty}^{p+۱}\right] - T_{m,n}^{p} = ۰$
(پ) گوشهٔ بیرونی با مرز جابه‌جایی	$\left[۱ + ۴(Fo)(۱ + Bi)\right] T_{m,n}^{p+۱} - ۲(Fo)\left[T_{m-۱,n}^{p+۱} + T_{m,n-۱}^{p+۱} + ۲\,(Bi)\,T_{\infty}^{p+۱}\right] - T_{m,n}^{p} = ۰$
(ت) گوشهٔ داخلی با مرز جابه‌جایی	$\left[۱ + ۴(Fo)\left(۱ + \frac{Bi}{۳}\right)\right] T_{m,n}^{p+۱} - \frac{۲(Fo)}{۳} \times \left[۲T_{m-۱,n}^{p+۱} + T_{m,n-۱}^{p+۱} + ۲T_{m,n+۱}^{p+۱} + ۲T_{m+۱,n}^{p+۱} + ۲(Bi)T_{\infty}^{p+۱}\right] - T_{m,n}^{p} = ۰$
(ث) مرز عایق‌شده	$\left[۱ + ۴(Fo)\right] T_{m,n}^{p+۱} - Fo(۲T_{m-۱,n}^{p+۱} + T_{m,n+۱}^{p+۱} + T_{m,n-۱}^{p+۱}) - T_{m,n}^{p} = ۰$

❑ ۴-۷ فرمول‌بندی مقاومت گرمایی و ظرفیت

مثل فصل سوم، می‌توان هر جزء حجم را به عنوان گرهی در نظر گرفت که با مقاومت‌های گرمایی به گره‌های مجاورش متصل شده است. در شرایط حالت پایدار، انتقال انرژی خالص به درون گره صفر است. در حالی که در مسائل حالت ناپایدار این فصل، باید انتقال انرژی خالص به درون گره را به عنوان افزایش انرژی داخلی آن جزء به حساب آورد. هر جزء حجم مثل یک «ظرفیت فشرده» کوچک عمل می‌کند و بر همکنش تمام اجزاء رفتار جسم را طی فرآیند گذرا معین می‌کند. اگر بتوان انرژی داخلی گره i را برحسب گرمای ویژه و دما بیان کرد، آن وقت آهنگ تغییر آن نسبت به زمان تقریباً برابر است با:

$$\frac{\Delta E}{\Delta \tau} = \rho c\ \Delta V \frac{T_i^{p+۱} - T_i^{p}}{\Delta \tau}$$

که ΔV جزء حجم است. اگر ظرفیت گرمایی را چنین تعریف کنیم:

$$C_i = \rho_i c_i\ \Delta V_i \qquad (۴۰-۴)$$

پس فرمول‌بندی ظرفیت - مقاومت عمومی برای توازن انرژی در گره عبارت است از:

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p} - T_i^{p}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+۱} - T_i^{j}}{\Delta \tau} \qquad (۴۱-۴)$$

کلیه جملات سمت چپ، همان جملات سمت چپ معادله (۳-۳۱) است. اجزای حجم و مقاومت اقسامی از شکل‌های هندسی و شرایط مرزی در جدول ۳-۴ و ۳-۵ ارائه شده‌اند. سیستم‌های فیزیکی‌ای که انرژی داخلی E آنها تغییر فاز می‌دهد را نیز می‌توان در فرمول‌بندی فوق جا داد ولی خارج از بحث ماست.

اصل مطلب این است که با استفاده از مفاهیم مقاومت و خازن گرمایی می‌توان معادله تفاضل پیش‌رو تمام گره‌ها و شرایط مرزی را به صورت فشردهٔ معادلهٔ (۴-۴۱) نوشت. آنگاه وضع حل عددی، فرآیند خیلی سازمان‌یافته‌تری شده و می‌توان آن را سریعاً به روش‌های کامپیوتری موجود تطابق داد.

معادلهٔ (۴-۴۱) را می‌توان با استفاده از مفهوم تفاضل پیش‌رو بسط داد و برای هر $T_i^{p+۱}$ رابطه‌ای صریح ایجاد کرد. همان‌طور که در بحث قبلی توضیح دادیم، می‌توان توازن انرژی را نیز با استفاده از تفاضل‌های پس‌رو نوشت که در آن انتقال گرما به داخل i امین گره برحسب دماها در نمو زمانی $p + ۱$ محاسبه شده است. بنابراین:

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p+۱} - T_i^{p+۱}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+۱} - T_i^{j}}{\Delta \tau} \qquad (۴۲-۴)$$

اکنون این دستگاه معادلات مثل قبل دستگاهی **غیرصریح** ایجاد می‌کند که باید هم‌زمان برای $T_i^{p+۱}$ و الی آخر حل شود. این دستگاه را می‌توان به روش‌های متعدد فصل ۳ حل کرد. اگر بخواهیم از روش تکرار گوس - سایدل استفاده کنیم باید $T_i^{p+۱}$ را از معادله (۴-۴۲) به‌دست آوریم:

$$T_i^{p+۱} = \frac{q_i + \sum_j \left(\frac{T_j^{p+۱}}{R_{ij}}\right) + \left(\frac{C_i}{\Delta \tau}\right) T_i^{p}}{\sum_j \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right) + \left(\frac{C_i}{\Delta \tau}\right)} \qquad (۴۳-۴)$$

گفتنی است که این معادله در حد حالت پایدار $\Delta \tau \to \infty$ مشابه معادله (۳-۳۲) یعنی فرمول‌بندی حل تکراری فصل ۳ می‌شود.

نیاز پایداری در فرمول‌بندی صریح را می‌توان با حل معادله (۴-۴۱) برای $T_i^{p+۱}$ آزمایش کرد:

$$T_i^{p+۱} = \left(q_i + \sum_j \frac{T_j^{p}}{R_{ij}}\right) \frac{\Delta \tau}{C_i} + \left(۱ - \frac{\Delta \tau}{C_i} \sum_j \frac{۱}{R_{ij}}\right) T_i^{p} \qquad (۴۴-۴)$$

q_i بر پایداری اثر می‌گذارد ولی می‌توان با مشاهده رفتار معادله به ازای $q_i = ۰$ حدی مطمئن انتخاب کرد. با همان برهان ترمودینامیکی معادلهٔ (۴-۳۱) درمی‌یابیم که ضریب T_i^{p} نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین حداقل نیاز پایداری عبارت است از:

$$۱ - \frac{\Delta \tau}{C_i} \sum_j \frac{۱}{R_{ij}} \geq ۰ \qquad (۴۵-۴)$$

فرض کنید می‌خواهیم مسأله عددی پیچیده‌ای را حل کنیم که شرایط مرزی متنوع مثلاً غیر یکنواخت بودن مقدار نمودهای مکانی، و غیره را دارد. با فرمول‌بندی تمام مقاومت‌ها و ظرفیت‌های گرهی، انتخاب نمو زمانی $\Delta \tau$ برای محاسبهٔ بعدی می‌ماند. برای تأمین پایداری باید $\Delta \tau$ مساوی یا کم‌تر از مقدار حاصل از محدودترین رابطه گرهی، مثلاً معادلهٔ ۴-۴۵، باشد. مقدار $\Delta \tau$ را به‌دست می‌آوریم:

برای پایداری $\qquad \Delta \tau \leq \left[\frac{C_i}{\sum_j \left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)}\right]_{\min} \qquad (۴۶-۴)$

با وجود خیلی مفید بودن معادلهٔ ۴-۴۴ در تعیین حداکثر نمو زمانی مجاز، ممکن است در راه حل‌های کامپیوتری ضمن استفاده از مقاومت‌های کوچک موجب مشکل خطای ناشی از گرد کردن شود. این مشکل را می‌توان با بیان $T_i^{p+۱}$ چنین حل کرد:

$$T_i^{p+۱} = \frac{\Delta \tau}{C_i}\left[q_i + \sum_j \frac{T_j^{p} - T_i^{p}}{R_{ij}}\right] + T_i^{p} \qquad (۴۷-۴)$$

ضمناً فرمول‌بندی ظرفیت - مقاومت را می‌توان به سادگی اصلاح کرد و تغییرات خواص گرمایی نسبت به دما را به حساب آورد. در اینجا فقط باید مقادیر صحیح ρ و c و k را برای قرار دادن در C_i و R_{ij} حساب کنید. بسته به سرشت مسأله و دقت مورد نیاز، ممکن است محاسبهٔ مقادیر جدید C_i و R_{ij} برای هر نمو زمانی لازم شود. مثال ۴-۱۶ آثار ضریب هدایت متغیر را نشان می‌دهد.

حالت پایدار به عنوان مورد حدی راه حل گذرا

همان‌طور که ملاحظه کردید، فرمول‌بندی عددی حالت پایدار وقتی نتیجه می‌شود که سمت راست معادلهٔ (۴-۴۱) صفر باشد و نیز محاسبهٔ مورد ناپایدار که در آن از معادلهٔ (۴-۴۴) یا (۴-۴۷) استفاده شده، برای تعداد زیادی نمو زمانی اجرا شود. در حالی که روش اخیر در یافتن جواب حالت پایدار پرزحمت به نظر می‌آید، آن‌را می‌توان با کامپیوتر سریعاً به پیش برد.

می‌دانید که روش تکرار گوس - سایدل را برای حل بسیاری از مسائل عددی حالت پایدار به کار بردیم که البته محاسبات کامپیوتری بسیاری را می‌طلبید. چنان‌چه با مقاومت‌های گرمایی متغیر ناشی از ضریب هدایت گرمایی متغیر یا تغییر در شرایط مرز جابه‌جایی روبه‌رو باشیم، حد حالت پایدار راه حل گذرا بر رقیب جواب مستقیم حالت پایدار خود مزیت دارد. می‌دانید که وقتی مقاومت‌های گرمایی متغیر ظاهر می‌شود، معادلات گرهی حالت پایدار حاصل غیرخطی شده و حل آنها مشکل است. در راه حل گذرای چنین مواردی فقط لازم است هر مقاومت در انتهای هر نمو زمانی $\Delta\tau$ دوباره محاسبه شود و یا می‌توان مقاومت‌ها را مستقیماً به صورت متغیرهایی در معادلات گرهی وارد کرد. آنگاه محاسبات را برای تعداد زیادی نمو زمانی حل کرد تا دیگر مقادیر T_i^{p+1} تغییر قابل توجهی نداشته باشد. در این لحظه، مقادیر T_i حاصل، جواب حالت پایدار است.

مثال ۴-۱۰ سرمایش ناگهانی میله

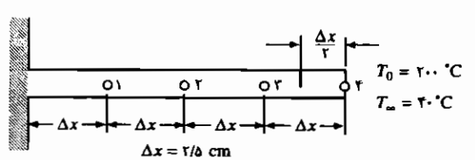
میله‌ای فولادی $\left[k = ۵۰ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ به قطر ۳ mm و طول ۱۰ cm به دمای اولیه و یکنواخت ۲۰۰ °C است. در لحظه صفر آن‌را ناگهان در حالی که دمای یک سرش ۲۰۰ °C است در سیالی با $h = ۵۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۴۰^\circ C$ فرو می‌بریم. پخش دما در میله را پس از ۱۰۰ ثانیه معین کنید. خواص فولاد $\rho = ۷۸۰۰ \frac{kg}{m^۳}$ و $c = ۰/۴۷ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ است.

حل :

انتخاب نموها در روی میله مطابق شکل زیر است. مساحت مقطع میله $A = \pi(۱/۵)^۲ = ۷/۰۶۹ \text{ mm}^۲$ است. جزء حجم برای گره‌های ۱ و ۲ و ۳ عبارت است از:

$$\Delta V = A\Delta x = (۷/۰۶۹)(۲۵) = ۱۷۶/۷۲۵ \text{ mm}^۳$$

ΔV گره ۴ برابر نصف این مقدار یعنی ۸۸/۳۶ mm³ است. اکنون می‌توان



شکل مثال ۴-۱۰.

مقاومت‌ها و ظرفیت‌های مختلف را برای استفاده در فرمول‌بندی صریح به جدول در آورد. برای گره‌های ۱ و ۲ و ۳ داریم:

$$R_{m+} = R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{۰/۰۲۵}{(۵۰)(۷/۰۶۹\times۱۰^{-۶})} = ۷۰/۷۳۱ \frac{^\circ C}{W}$$

و:

$$R_\infty = \frac{۱}{h\ (\pi d\ \Delta x)} = \frac{۱}{(۵۰)\pi(۳\times۱۰^{-۳})(۰/۰۲۵)} = ۸۴/۸۸۳ \frac{^\circ C}{W}$$

$$C = \rho c\ \Delta V = (۷۸۰۰)(۴۷۰)(۱/۷۶۷۳\times۱۰^{-۷}) = ۰/۶۴۷۹ \frac{J}{^\circ C}$$

برای گره ۴ داریم :

$$R_{m+} = \frac{۱}{hA} = ۲۸۲۹ \frac{^\circ C}{W} \qquad R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = ۷۰/۷۳۱ \frac{^\circ C}{W}$$

$$C = \frac{\rho\ c\ \Delta V}{۲} = ۰/۳۲۴۰ \frac{J}{^\circ C} \qquad R_\infty = \frac{۲}{h\pi d\ \Delta x} = ۱۶۹/۷۷ \frac{^\circ C}{W}$$

برای تعیین نیاز پایداری، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

گره	$\sum\left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)$	C_i	$\frac{C_i}{\sum\left(\frac{۱}{R_{ij}}\right)}$, s
۱	۰/۰۴۰۰۶	۰/۶۴۷۹	۱۶/۱۷۳
۲	۰/۰۴۰۰۶	۰/۶۴۷۹	۱۶/۱۷۳
۳	۰/۰۴۰۰۶	۰/۶۴۷۹	۱۶/۱۷۳
۴	۰/۰۲۰۳۸	۰/۳۲۴۰	۱۵/۸۹۷

بنابراین گره ۴ محدودترین بوده، باید $\Delta\tau < ۱۵/۹ s$ را انتخاب نماییم. چون می‌خواهیم پخش دما در ۱۰۰ s را پیدا کنیم، $\Delta\tau = ۱۰ s$ در نظر گرفته، محاسبه را با استفاده از معادله (۴-۴۷) برای ۱۰ نمو زمانی انجام دهیم. البته توجه داریم که $q_i = ۰$ زیرا تولید گرما وجود ندارد. محاسبات در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

نمو زمانی	دمای گره $T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$
۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
۱	۱۷۰/۸۷	۱۷۰/۸۷	۱۷۰/۸۷	۱۶۹/۱۹
۲	۱۵۳/۴۰	۱۴۷/۰۴	۱۴۶/۶۸	۱۴۵/۰۵
۳	۱۴۱/۵۴	۱۲۸/۸۶	۱۲۶/۹۸	۱۲۵/۵۴
۴	۱۳۳/۰۴	۱۱۵/۰۴	۱۱۱/۲۴	۱۰۹/۷۰
۵	۱۲۶/۷۹	۱۰۴/۴۸	۹۸/۷۶	۹۶/۹۶
۶	۱۲۲/۱۰	۹۶/۳۶	۸۸/۹۲	۸۶/۷۸
۷	۱۱۸/۵۳	۹۰/۰۹	۸۱/۱۷	۷۸/۷۱
۸	۱۱۵/۸۰	۸۵/۲۳	۷۵/۰۸	۷۲/۳۴
۹	۱۱۳/۷۰	۸۱/۴۵	۷۰/۳۱	۶۷/۳۱
۱۰	۱۱۲/۰۸	۷۸/۵۱	۶۶/۵۷	۶۳/۳۷

می‌توانیم آهنگ انتقال گرما در پایان ۱۰۰ ثانیه را با جمع تلفات گرمای

جابه‌جایی سطح میله حساب کنیم. بنابراین:

$$q = \sum_j \frac{T_i - T_\infty}{R_{i\infty}}$$

و:

$$q = \frac{۲۰۰ - ۴۰}{(۲)(۸۴/۸۸۳)} + \frac{۱۱۲/۰۸ + ۷۸/۵۱ + ۶۶/۵۷ - (۳)(۴۰)}{۸۴/۸۸۳}$$

$$+ \left(\frac{۱}{۱۶۹/۷} + \frac{۱}{۲۸۲۹}\right)(۶۳/۳۷ - ۴۰) = ۲/۷۰۴ \text{ W}$$

مثال ۴-۱۱ فرمول‌بندی غیرصریح

طرح محاسباتی فرمول‌بندی غیرصریح را می‌توان با حل مجدد مثال ۴-۱۰ با استفاده از تنها دو نمو زمانی نشان داد، یعنی $\Delta\tau = ۵۰ s$.

برای این مسأله از فرمول‌بندی معادله (۴-۴۳) و با $\Delta\tau = ۵۰ s$ استفاده می‌کنیم.

مقادیر زیر مورد نیازند:

گره	$\frac{C_i}{\Delta\tau}$	$\sum_j \frac{۱}{R_{ij}} + \frac{C_i}{\Delta\tau}$
۱	۰/۰۱۲۹۶	۰/۰۵۳۰۲
۲	۰/۰۱۲۹۶	۰/۰۵۳۰۲
۳	۰/۰۱۲۹۶	۰/۰۵۳۰۲
۴	۰/۰۰۶۴۸	۰/۰۲۶۸۶

R_{ij} را در مثال ۴-۱۰ تعیین کردیم و بنابراین می‌توانیم آنها را در معادله (۴-۴۳) قرار دهیم و معادلات گرهی را برای پایان اولین نمو زمانی با در نظر گرفتن تمام $T_i^{\,p} = ۲۰۰^\circ C$ بنویسیم. دماها در پایان نمو زمانی را با پریم نشان می‌دهیم.

برای گره ۱ :

$$۰/۰۵۳۰۲T_۱' = \frac{۲۰۰}{۷۰/۷۳۱} + \frac{T_۲'}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۸۴/۸۳۳}$$

$$+ (۰/۰۱۲۹۶)(۲۰۰)$$

برای گره ۲ :

$$۰/۰۵۳۰۲T_۲' = \frac{T_۱'}{۷۰/۷۳۱} + \frac{T_۳'}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۸۴/۸۳۳}$$

$$+ (۰/۰۱۲۹۶)(۲۰۰)$$

برای گره‌های ۳ و ۴ :

$$۰/۰۵۳۰۲T_۳' = \frac{T_۲'}{۷۰/۷۳۱} + \frac{T_۴'}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۸۴/۸۳۳}$$

$$+ (۰/۰۱۲۹۶)(۲۰۰)$$

$$۰/۰۲۶۸۶T_۴' = \frac{T_۳'}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۲۸۲۹} + \frac{۴۰}{۱۶۹/۷۷}$$

$$+ (۰/۰۰۶۴۸)(۲۰۰)$$

سپس می‌توان این معادلات را چنین نوشت:

$$۰/۰۵۳۰۲T_۱' - ۰/۰۱۴۱۴T_۲' = ۵/۸۹۱۱$$

$$-۰/۰۱۴۱۴T_۱' + ۰/۰۵۳۰۲T_۲' - ۰/۰۱۴۱۴T_۳' = ۳/۰۶۳۵$$

$$-۰/۰۱۴۱۴T_۲' + ۰/۰۵۳۰۲T_۳' - ۰/۰۱۴۱۴T_۴' = ۳/۰۶۳۵$$

$$-۰/۰۱۴۱۴T_۳' + ۰/۰۲۶۸۶T_۴' = ۱/۵۴۵۷$$

که پس از حل آنها داریم:

$$T_۱' = ۱۴۵/۸۱^\circ C \qquad T_۲' = ۱۳۰/۱۲^\circ C$$

$$T_۳' = ۱۲۵/۴۳^\circ C \qquad T_۴' = ۱۲۳/۵۶^\circ C$$

اکنون می‌توانیم دوباره از فرمول‌بندی تفاضل پس‌رو استفاده کرده، برای دماهای پایان نمو زمانی دوم زگوند به‌کار ببریم.

$$۰/۰۵۳۰۲T_۱'' = \frac{۲۰۰}{۷۰/۷۳۱} + \frac{T_۲''}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۸۴/۸۳۳}$$

$$+ (۰/۰۱۲۹۶)(۱۴۵/۸۱)$$

$$۰/۰۵۳۰۲T_۲'' = \frac{T_۱''}{۷۰/۷۳۱} + \frac{T_۳''}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۸۴/۸۳۳}$$

$$+ (۰/۰۱۲۹۶)(۱۳۰/۱۲)$$

$$۰/۰۵۳۰۲T_۳'' = \frac{T_۲''}{۷۰/۷۳۱} + \frac{T_۴''}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۸۴/۸۳۳}$$

$$+ (۰/۰۱۲۹۶)(۱۲۵/۴۳)$$

$$۰/۰۲۶۸۶T_۴'' = \frac{T_۳''}{۷۰/۷۳۱} + \frac{۴۰}{۲۸۲۹} + \frac{۴۰}{۱۶۹/۷۷}$$

$$+ (۰/۰۰۶۴۸)(۱۲۳/۵۶)$$

با حل این معادلات داریم:

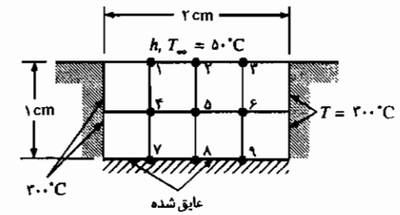
$$T_۱'' = ۱۲۳/۸۱^\circ C \qquad T_۲'' = ۹۷/۲۷^\circ C$$

$$T_۳'' = ۸۸/۳۲^\circ C \qquad T_۴'' = ۸۵/۵۹^\circ C$$

این مقادیر با اعداد مثال ۴-۱۰ خیلی تفاوت دارد. چنان‌چه نموهای زمانی را بیش‌تر کنیم تفاوت کم‌تر می‌شود فرمول‌بندی غیرصریح در مسأله‌ای که تعداد گره‌های آن زیاد است نیاز کم‌تری به زمان کامپیوتر دارد تا روش صریح و هدف این مثال نشان دادن چگونگی انجام این محاسبات بود.

* مثال ۴-۱۲ سرد کردن سرامیک

نوار سرامیکی ۱ در ۲ سانتی‌متری $\left[k = ۳/۰ \frac{W}{m.^\circ C}\right]$ را مطابق شکل در ماده‌ای به ضریب هدایت گرمایی بالا قرار داده‌ایم به‌نحوی که دمای جوانب آن ثابت و برابر ۳۰۰ °C باشد. سطح زیرین این سرامیک عایق‌شده، سطح بالایی آن در معرض محیط جابه‌جایی با $h = ۲۰۰ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$ و $T_\infty = ۵۰^\circ C$ قرار دارد. در لحظه صفر دمای سرامیک یکنواخت و برابر ۳۰۰ °C است. دما در گره‌های ۱ تا ۹ را پس از ۱۲ ثانیه بیابید. برای سرامیک $\rho = ۱۶۰۰ \frac{kg}{m^۳}$ و $c = ۰/۸ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ است. همچنین کل اتلاف گرما را در این مدت حساب کنید.



شکل مثال ۴-۱۲.

حل :

در اینجا با مسأله‌ای دوبعدی با $\Delta x = \Delta y = 0/5\,cm$ روبه‌رو هستیم. با توجه به تقارن $T_1 = T_3$ و $T_4 = T_6$ و $T_7 = T_9$، بنابراین شش دمای گرهی مجهول داریم. اکنون مقاومت‌ها و ظرفیت‌های مختلف را جدول‌بندی می‌کنیم.

برای گره ۴ و ۵ :

$$R_{m+} = R_{m-} = R_{n+} = R_{n-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0/005}{(30)(0/005)} = 0/3333$$

برای گره‌های ۱ و ۲ :

$$R_{m+} = R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{(0/005)(2)}{(30)(0/005)} = 0/6667\ \frac{^\circ C}{W}$$

$$R_{n-} = 0/3333\ \frac{^\circ C}{W}$$

$$R_{n+} = \frac{1}{h\,\Delta x} = \frac{1}{(200)(0/005)} = 10\ \frac{^\circ C}{W}$$

برای گره‌های ۷ و ۸ :

$$R_{m+} = R_{m-} = 0/6667\ \frac{^\circ C}{W} \quad , \quad R_{n+} = 0/3333\ \frac{^\circ C}{W} \quad , \quad R_{n-} = \infty$$

ظرفیت گره‌های ۱ و ۲ و ۷ و ۸ برابر است با :

$$C = \frac{\rho c\,(\Delta x)^2}{2} = \frac{(1600)(800)(0/005)^2}{2} = 16\ \frac{J}{^\circ C}$$

برای گره‌های ۴ و ۵ :

$$C = \rho c\,(\Delta x)^2 = 32\ \frac{J}{^\circ C}$$

اکنون نیاز پایداری راه حل صریح را با جدول‌بندی کمیت‌های زیر تعیین می‌کنیم:

گره	$\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right)$	C_i	$\frac{C_i}{\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right)}$, s
۱	۷	۱۶	۲/۲۸۶
۲	۷	۱۶	۲/۲۸۶
۴	۱۲	۳۲	۲/۶۶۷
۵	۱۲	۳۲	۲/۶۶۷
۷	۶	۱۶	۲/۶۶۷
۸	۶	۱۶	۲/۶۶۷

بنابراین دو گره جابه‌جایی، نیاز پایداری را کنترل می‌کند و باید $\Delta\tau \le 2/286\,s$ را انتخاب کنیم. اکنون $\Delta\tau = 2/0\,s$ را انتخاب کرده، محاسبات مربوط به شش نمو زمانی را با استفاده از معادله (۴-۴۷) انجام می‌دهیم. مجدداً به مسأله تقارن در محاسبه دمای گره‌های ۲ و ۵ و ۸ یعنی $T_1 = T_3$ و غیره توجه داشته باشید. نتیجه محاسبات در جدول زیر ارائه شده است.

نمو زمانی	دمای گره					
	T_1	T_2	T_4	T_5	T_7	T_8
۰	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰
۱	۲۶۸/۷۵	۲۶۸/۷۵	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰
۲	۲۵۸/۹۸	۲۵۳/۱۳	۲۹۴/۱۴	۲۹۴/۱۴	۳۰۰	۳۰۰
۳	۲۵۲/۶۴	۲۴۵/۳۱	۲۸۹/۷۵	۲۸۷/۵۵	۲۹۷/۸۰	۲۹۷/۸۰
۴	۲۸۴/۷۳	۲۳۹/۴۸	۲۸۵/۸۱	۲۸۲/۳۸	۲۹۵/۱۹	۲۹۳/۹۶
۵	۲۴۶/۶۷	۲۳۵/۳۵	۲۸۲/۶۳	۲۷۷/۷۹	۲۹۲/۳۴	۲۹۰/۰۸
۶	۲۴۳/۳۲	۲۳۱/۹۷	۲۷۹/۸۷	۲۷۳/۹۵	۲۸۹/۷۱	۲۸۶/۳۲

کل اتلاف گرما در فاصله زمانی ۱۲ ثانیه را با جمع اتلاف گرمایی هر گره نسبت به دمای اولیه ۳۰۰°C حساب می‌کنیم، بنابراین:

$$q = \sum C_i\,(300 - T_i)$$

که q اتلاف گرما است. چون گره‌های مرزی دما ثابت تغییر دمایی ندارند می‌توان آنها را در این جمع کنار گذاشت. با توجه به اینکه $T_3 - T_1$ و $T_6 = T_4$ و $T_9 = T_7$، داریم:

$$\sum C_i(300 - T_i) = (\text{گره‌های } 6 \text{ و } 5 \text{ و } 4) + (\text{گره‌های } 9 \text{ و } 8 \text{ و } 7 \text{ و } 3 \text{ و } 2 \text{ و } 1)$$

$$= 16[(6)(300) - (2)(243/32) - 231/97 - (2)(289/71) - 286/32] + 32[(3)(300) - (2)(279/87) - 273/95]$$

$$= 5572/3\ \frac{J}{m}\ \text{طول نوار}$$

آهنگ متوسط اتلاف گرما در فاصله زمانی ۱۲ ثانیه برابر است با:

$$\frac{q}{\Delta\tau} = \frac{5572/3}{12} = 464/4\ W \qquad \left[1585\ \frac{Btu}{h}\right]$$

مثال ۴-۱۳| سرد کردن میله فولادی با h غیریکنواخت

میله‌ای از جنس فولاد-نیکل به قطر ۲/۰cm و طول ۱۰cm به دمای اولیه یکنواخت ۲۰۰°C است. آن را ناگهان در معرض هوای جو به دمای ۳۰°C قرار می‌دهیم، در حالی که دمای یک سر آن در ۲۰۰°C ثابت نگه‌داشته می‌شود. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی را می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$h = 9/0\ \Delta T^{0/175}\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$$

که ΔT تفاوت دمای میله و هوای محیط است. خواص فولاد-نیکل به‌صورت $k = 12\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و $c = 0/48\ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ و $\rho = 7800\ \frac{kg}{m^3}$ است. با استفاده از روش عددی، (الف) پخش دما در میله را پس از ۲۵۰، ۵۰۰، ۷۵۰، ۱۰۰۰، ۱۲۵۰ ثانیه و برای حالت پایدار معین کنید؛ (ب) پخش دمای حالت پایدار را برای مقدار ثابت $h = 22/1\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ معین و آن‌را با جواب تحلیلی مقایسه کنید.

حل :

۵ نقطه با $\Delta x = 2/0cm$ را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم. بنابراین ظرفیت‌ها

برابرند با:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{(7800)(480)\pi(0/02)^2(0/02)}{4} = 23/524\ \frac{J}{^\circ C}$$

$$C_5 = \frac{1}{2}C_1 = 11/762\ \frac{J}{^\circ C}$$

مقاومت‌های گره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ عبارتند از:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(12)\pi(0/02)^2}{(4)(0/02)} = 0/188496$$

$$\frac{1}{R_\infty} = hP\,\Delta x = (9/0)\pi(0/02)(0/02)(T-30)^{0/175}$$

$$= (1/131\times10^{-3})(T-30)^{0/175}$$

برای گره ۵ :

$$\frac{1}{R_{m-}} = 0/188496$$

$$\frac{1}{R_{m+}} = hA = 9/0\frac{\pi(0/02)^2}{4}(T-30)^{0/175}$$

$$= (2/827\times10^{-3})(T-30)^{0/175}$$

$$\frac{1}{R_{5\infty}} = \frac{1}{2R_{1\infty}} = (5/655\times10^{-3})(T-30)^{0/175}$$

که برای تمام گره‌ها $T_\infty = 30^\circ C$ است. می‌توان برای بدترین مورد یعنی $T = 200^\circ C$ در سرتاسر میله، جدول زیر را تهیه کرد:

گره	$\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right)\Big\vert_{min}$	$\frac{C_i}{\sum \left(\frac{1}{R_{ij}}\right)}$, s
۱	۰/۴۰۴۸	۵۸/۱۱
۲	۰/۴۰۴۸	۵۸/۱۱
۳	۰/۴۰۴۸	۵۸/۱۱
۴	۰/۴۰۴۸	۵۸/۱۱
۵	۰/۲۰۹۳	۵۶/۱۹۷

بنابراین، پایداری را فواصل زمانی کم‌تر از ۵۶ ثانیه تأمین می‌کند. روش محاسبه پیچیده است زیرا باید اجزای مقاومت - جابه‌جایی را برای هر فاصله زمانی دوباره محاسبه کرد. با انتخاب $\Delta\tau = 50.s$ داریم:

گره	$\frac{\Delta\tau}{C_i}$
۱	۲/۱۲۵۵
۲	۲/۱۲۵۵
۳	۲/۱۲۵۵
۴	۲/۱۲۵۵
۵	۴/۲۵۱

سپس از فرمول‌بندی صریح معادله ۴-۴۷ بدون تولید گرما، استفاده می‌کنیم.

الگوریتم محاسباتی چنین است:

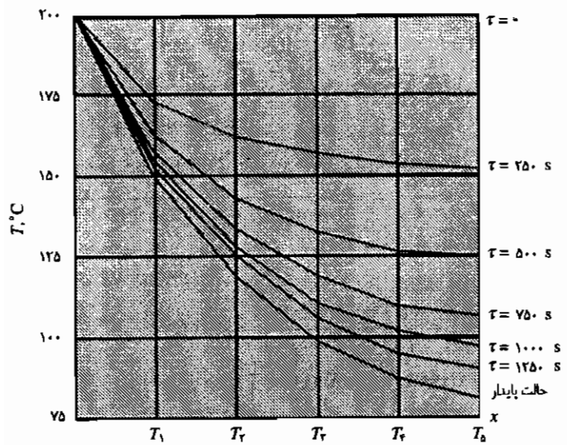
۱ - مقادیر R_∞ را برای شرط اولیه حساب می‌کنیم.

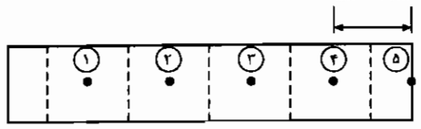
۲ - دماها در نمو زمانی بعدی را با استفاده از معادله (۴-۴۷) حساب می‌کنیم.

۳ - مقادیر R_∞ را مجدداً بر اساس دماهای جدید حساب می‌کنیم.

۴ - محاسبات دما را تکرار کرده، آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا پخش دما در زمان‌های مورد نظر به‌دست آید.

نتایج حاصل از این محاسبات در شکل مثال نشان داده شده‌اند.





شکل مثال ۴-۱۳.

برای تعیین پخش حالت پایدار می‌توان از روش ناپایدار و تعداد زیادی نمو زمانی و یا از روش حالت پایدار و یک مشی تکرار استفاده کرد. مشی تکرار ضروری است زیرا معادلات به علت تغییر ضریب جابه‌جایی، خطی نیستند.

باز هم فرمول‌بندی مقاومت را به کار می‌بریم که حالا به صورت معادلهٔ (۳-۳۱) است:

$$\sum \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0$$

روش محاسبه چنین است:

۱ - مقادیر R_∞ را برای تمام گره‌ها با فرض تمام $T_i = 200^\circ C$ حساب می‌کنیم.

۲ - معادلات گرهی برای T_iها را می‌نویسیم.

۳ - معادلات را با روش مناسبی حل می‌کنیم.

۴ - مقادیر R_∞ را مجدداً بر اساس مقادیر T_i به‌دست آمده از مرحلهٔ ۳ حساب می‌کنیم.

۵ - این روش را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا در T_iها تغییرات اندکی به‌وجود آید.

نتایج این تکرار در جدول زیر نشان داده شده است:

تکرار	$T_{۱,۶}$°C	$T_{۲,۶}$°C	$T_{۳,۶}$°C	$T_{۴,۶}$°C	$T_{۵,۶}$°C
۱	۱۴۸/۴۶۲	۱۱۴/۳۸۱	۹۲/۷۲۶	۸۰/۳۱۰	۷۵/۳۰۲
۲	۱۵۱/۳۸۱	۱۱۹/۵۵۷	۹۹/۴۰۹	۸۷/۸۵۳	۸۳/۱۸۸
۳	۱۵۱/۱۰۵	۱۱۹/۰۳۸	۹۸/۷۰۲	۸۷/۰۲۴	۸۲/۳۰۶
۴	۱۵۱/۱۳۲	۱۱۹/۰۹۰	۹۸/۷۷۴	۸۷/۱۰۹	۸۲/۳۹۶

این پخش دمای حالت پایدار، با نیم‌رخ‌های گذرا نیز رسم می‌شود.

مقدار h برای $T_i = ۲۰۰°C$ برابر $۲۲/۱۱ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ است، بنابراین نتایج تکرار اول به راه حلی به ازای این مقدار ثابت h مربوط می‌شود. جواب دقیق تحلیلی در معادله ۲-۳۴ چنین ارائه شده است.

$$\frac{\theta}{\theta_۰} = \frac{T - T_\infty}{T_۰ - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x) + \left[\frac{h}{km}\right] \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \left[\frac{h}{km}\right] \sinh mL}$$

کمیت‌های مورد لزوم عبارتند از:

$$m = \left(\frac{hP}{kA}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left[\frac{(۲۲/۱۱)\pi(۰/۰۲)}{(۱۲)\pi(۰/۰۱)^{۲}}\right]^{\frac{۱}{۲}} = ۱۹/۱۹۶۴$$

$$mL = (۱۹/۱۹۶۴)(۰/۱) = ۱/۹۱۹۶۴$$

$$\frac{h}{km} = \frac{۲۲/۲۲}{(۱۲)(۱۹/۱۹۶۴)} = ۰/۰۹۵۹۸$$

بنابراین می‌توان دمای نقاط گرهی را محاسبه و با نتایج عددی جدول زیر مقایسه کرد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تطابق عالی است.

گره	x, m	$\left(\frac{\theta}{\theta_۰}\right)_{\text{عددی}}$	$\left(\frac{\theta}{\theta_۰}\right)_{\text{تحلیلی}}$	درصد انحراف
۱	۰/۰۲	۰/۶۹۶۸	۰/۶۹۴۹	۰/۲۷
۲	۰/۰۴	۰/۴۹۶۴	۰/۴۹۳۵	۰/۵۹
۳	۰/۰۶	۰/۳۶۹۰	۰/۳۶۵۷	۰/۹
۴	۰/۰۸	۰/۲۹۵۹	۰/۲۹۲۵	۱/۱۶
۵	۰/۱	۰/۲۶۶۵	۰/۲۶۳۰	۱/۳۳

می‌توانیم اتلاف گرما را با نتیجه رابطهٔ تحلیلی (۲-۳۴) مقایسه کنیم. پس از جای‌گزینی مقادیر عددی داریم:

$$q_{\text{تحلیلی}} = ۱۱/۸۷۴ \text{ W}$$

اتلاف گرما در مدل عددی با جمع اتلاف جابه‌جایی از شش گره (شامل گره پایه در ۲۰۰°C) حساب می‌شود. با استفاده از دماهای اولین تکرار مربوط به $h = ۲۲/۱ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ داریم:

$$q = (۲۲/۱۱)\pi(۰/۰۲)(۰/۰۲)\left[(۲۰۰-۳۰)\left(\frac{۱}{۲}\right) + (۱۴۸/۴۶۲-۳۰) + (۱۱۴/۳۸۱-۳۰) + (۹۲/۷۲۶-۳۰) + (۸۰/۳۱-۳۰) + (۷۵/۳۰۲-۳۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\right] + (۲۲/۱۱)\pi(۰/۰۱)۲(۷۵/۳۰۲-۳۰)$$

$$= ۱۲/۰۸۲ \text{ W}$$

می‌توانیم مسأله را با محاسبه انرژی هدایتی در پایه بیش‌تر بررسی کنیم. این انرژی باید برابر انرژی هدایت شده به گره یک به‌اضافه اتلاف جابه‌جایی از گره پایه باشد و یا:

$$q = (۱۲)\pi(۰/۰۱)^{۲}\frac{(۲۰۰-۱۴۸/۴۶۲)}{۰/۰۲} + (۲۲/۱۱)\pi(۰/۰۲)(۰/۰۱)(۲۰۰-۳۰) = ۱۲/۰۷۶ \text{ W}$$

این مقدار خیلی خوب با عدد حاصل از محاسبه جابه‌جایی مطابقت دارد و هر دو آنها حدود ۱/۸ درصد با مقدار حاصل از روش تحلیلی تفاوت دارند.

نتایج این مثال توانایی روش عددی را در حل مسائلی که به‌طریق دیگر قابل حل نیستند نشان می‌دهد. به‌علاوه؛ تعداد گره‌های متوسط و در نتیجه امکانات متوسط محاسباتی برای رسیدن به جوابی نسبتاً دقیق نیاز است. مثلاً دقت در محاسبه h، ۱۰ ± تا ۱۵ درصد است. این امر، عدم دقت ناشی از کاربرد گره‌های نسبتاً زیاد را، همان‌طور که در اینجا انجام دادیم، تحت‌الشعاع قرار می‌دهد.

مثال ۴-۱۴ گرم و سرد کردن تابشی

در ابتدا دیوار سرامیکی شکل زیر به دمای یکنواخت ۲۰°C و ضخامتش ۳/۰cm است. وجه راست این دیوار را ناگهان در معرض منبع تابشی به دمای ۱۰۰۰°C قرار می‌دهیم و وجه سمت چپ در معرض هوای اتاق به دمای ۲۰°C و به دمای محیط تابشی ۲۰°C است. خواص سرامیک $k = ۳/۰ \frac{W}{m.°C}$ و $\rho = ۱۶۰۰ \frac{kg}{m^{۳}}$ و $c = ۰/۸ \frac{kJ}{kg.°C}$ است. انتقال گرمای تابشی با محیط در دمای T_r را می‌توان چنین حساب کرد:

$$q_r = \sigma\varepsilon A (T^{۴} - T_r^{۴}) \quad \text{W} \qquad \text{(الف)}$$

که $\sigma = ۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸}$ و $\varepsilon = ۰/۸$ و T به درجه کلوین است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی از وجه سمت چپ صفحه برابر است با:

$$h = ۱/۹۲\Delta T^{\frac{۱}{۴}} \quad \frac{W}{m^{۲}.°C} \qquad \text{(ب)}$$

جابه‌جایی در وجه سمت راست قابل صرف‌نظر است. پخش دما در صفحه را پس از ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۹۰، ۱۲۰، ۱۵۰ ثانیه و پخش دمای حالت پایدار را نیز معین کنید. کل گرمای دریافتی صفحه را در این زمان‌ها حساب کنید.

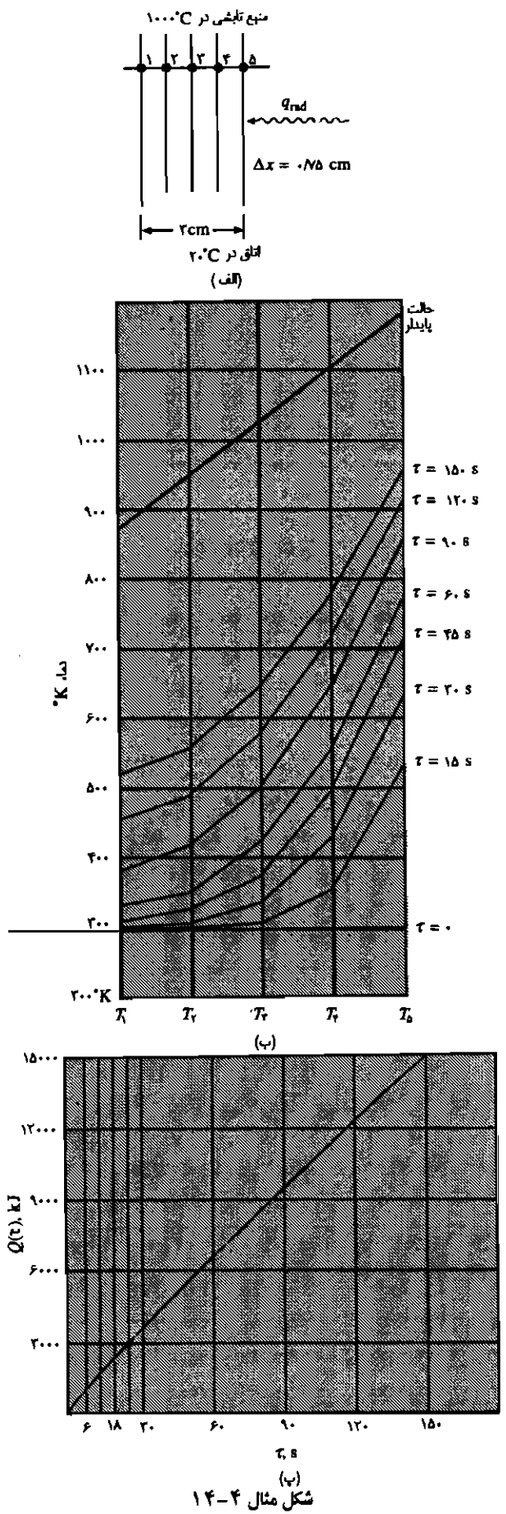
حل :

دیوار را مطابق شکل به ۵ گرد تقسیم و دما را به درجه کلوین بیان می‌کنیم. زیرا در اینجا شرط مرزی تابشی وجود دارد. معادله انرژی گذرا برای گره ۱ چنین است:

$$\sigma\varepsilon(۲۹۳^{۴} - T_۱^{P^{۴}}) + ۱/۹۲(T_۱^{P} - ۲۹۳)^{\frac{۵}{۴}} + \frac{k}{\Delta x}(T_۱^{P} - T_۱^{P}) = \rho c \frac{\Delta x}{۲}\frac{T_۱^{P+۱} - T_۱^{P}}{\Delta\tau} \qquad \text{(پ)}$$

به‌طور مشابه، برای گره ۵ :

$$\sigma\varepsilon(۱۲۷۳^{۴} - T_۵^{P^{۴}}) + \frac{k}{\Delta x}(T_۴^{P} - T_۵^{P}) = \rho c \frac{\Delta x}{۲}\frac{T_۵^{P+۱} - T_۵^{P}}{\Delta\tau} \qquad \text{(ت)}$$



شکل مثال ۴-۱۴

(الف) سیستم گرهی، (ب) پاسخ گذرا، (پ) گرمای افزوده.

معادلات (پ) و (ت) را می‌توان به‌ترتیب چنین نوشت:

$$T_۱^{P+۱} = \frac{\Delta\tau}{C_۱}\left[\sigma\varepsilon(۲۹۳^{۴} + T_۱^{P^{۴}})(۲۹۳ + T_۱^{P})(۲۹۳) - ۱/۹۲(T_۱^{P} - ۲۹۳)^{\frac{۱}{۴}}(۲۹۳) + \frac{k}{\Delta x}T_۱^{P}\right] + \left\{۱ - \frac{\Delta\tau}{C_۱}\left[\sigma\varepsilon(۲۹۳^{۴} + T_۱^{P^{۴}})(۲۹۳ + T_۱^{P}) - ۱/۹۲(T_۱^{P} - ۲۹۳)^{\frac{۱}{۴}} + \frac{k}{\Delta x}\right]\right\}T_۱^{P} \qquad \text{(ث)}$$

$$T_۵^{P+۱} = \frac{\Delta\tau}{C_۵}\left[\sigma\varepsilon(۱۲۷۳^{۴} + T_۵^{P^{۴}})(۱۲۷۳ + T_۵^{P})(۱۲۷۳) + \frac{k}{\Delta x}T_۴^{P}\right] + \left\{۱ - \frac{\Delta\tau}{C_۵}\left[\sigma\varepsilon(۱۲۷۳^{۴} + T_۵^{P^{۴}})(۱۲۷۳ + T_۵^{P}) + \frac{k}{\Delta x}\right]\right\}T_۵^{P} \qquad \text{(ج)}$$

که $C_۱ = C_۵ = \rho c \frac{\Delta x}{۲}$ برای سه گره دیگر این عبارت‌ها خیلی ساده‌ترند:

$$T_۱^{P+۱} = \frac{\Delta\tau}{C_۲}\frac{k}{\Delta x}(T_۱^{P} + T_۲^{P}) + \left(۱ - \frac{۲k\Delta\tau}{C_۲\Delta x}\right)T_۱^{P} \qquad \text{(چ)}$$

$$T_۳^{P+۱} = \frac{\Delta\tau}{C_۳}\frac{k}{\Delta x}(T_۲^{P} + T_۴^{P}) + \left(۱ - \frac{۲k\Delta\tau}{C_۳\Delta x}\right)T_۳^{P} \qquad \text{(ح)}$$

$$T_۴^{P+۱} = \frac{\Delta\tau}{C_۴}\frac{k}{\Delta x}(T_۳^{P} + T_۵^{P}) + \left(۱ - \frac{۲k\Delta\tau}{C_۴\Delta x}\right)T_۴^{P} \qquad \text{(خ)}$$

که $C_۲ = C_۳ = C_۴ = \rho c \Delta x$ بنابراین برای تعیین پاسخ گذرا فقط یک مقدار مناسب $\Delta\tau$ انتخاب کرده محاسبات را به پیش می‌بریم. معیار پایداری طوری است که ضرایب جمله آخر هر کدام از معادلات نمی‌تواند منفی باشد. حداکثر نمو زمانی مجاز برای معادلات (چ) و (ح) و (خ) برابر است با:

$$\Delta\tau_{max} = \frac{C_۲\Delta x}{۲k} = \frac{(۱۶۰۰)(۸۰۰)(۰/۰۰۷۵)^{۲}}{(۲)(۳)} = ۱۲s$$

بدترین مورد برای معادله (چ) در شروع وقتی است که $T_۵^{P} = ۲۰°C = ۲۹۳ K$ داریم:

$$C_۵ = \frac{(۱۶۰۰)(۸۰۰)(۰/۰۰۷۵)}{۲} = ۴۸۰۰$$

بنابراین:

$$\Delta\tau_{max} = \frac{۴۸۰۰}{\frac{۳/۰}{۰/۰۰۷۵} + (۵/۶۶۹\times۱۰^{-۸})(۰/۸)(۱۲۷۳+۲۹۳)(۱۲۷۳^{۲}+۲۹۳^{۲})}$$

محدودترین شرط برای گره ۱ [معادله (ث)] وقتی روی می‌دهد که $T_۱^{P} = ۲۹۳$ داریم:

$$C_۱ = C_۵ = ۴۸۰۰$$

بنابراین:

$$\Delta\tau_{max} = \frac{۴۸۰۰}{\frac{۳/۰}{۰/۰۰۷۵} - ۰۰ + (۰/۸)(۲۹۳^{۲}+۲۹۳^{۲})(۲۹۳+۲۹۳)(۵/۶۶۹\times۱۰^{-۸})}$$

$$= ۱۱/۸۶s$$

بنابراین، با توجه به این محاسبات ملاحظه می‌شود که گره ۵ محدودترین است و باید $\Delta\tau < 9/43\,s$ را انتخاب کنیم.

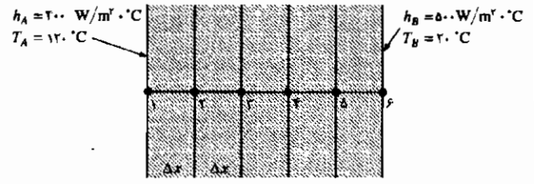
محاسبات بر مبنای $\Delta\tau = 3/0\,s$ انجام گرفت و نتایج در شکل‌های مثال نشان داده شده‌اند. توجه کنید که پخش دمای حالت پایدار در جسم جامد خطی مستقیم است که برای ضریب هدایت گرمایی ثابت، انتظار آن را داشتیم. برای محاسبه گرمای افزوده در هر لحظه، مجموعه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$Q(\tau) = \sum C_i (T_i - 293) \qquad (د)$$

و نتایج را در شکل مثال (۴-۱۴ پ) رسم می‌کنیم.

مثال ۴-۱۵ هدایت گذرا با تولید گرما

داخل دیوار تخت شکل زیر $50\ \frac{MW}{m^3}$ گرما تولید شده، خواص گرمایی آن $k = 19\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و $\rho = 7800\ \frac{kg}{m^3}$ و $c = 460\ \frac{J}{kg.^\circ C}$ است. دمای یکنواخت اولیهٔ دیوار $100^\circ C$ بوده، ناگهان در معرض تولید گرما و شرایط مرزی جابه‌جایی شکل مثال (۴-۱۵ الف) قرار می‌گیرد. پخش دما را پس از چند نمو زمانی حساب کنید.



شکل مثال ۴-۱۵ (الف).

حل :

از این فرمول‌بندی مقاومت و ظرفیت استفاده کرده و برای واحد سطح می‌نویسیم:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(19)(1)}{0/001} = 19000\ \frac{W}{^\circ C}$$

تمام مقاومت‌های هدایتی برابر مقدار فوق است. هم‌چنین:

$$\frac{1}{R_{1A}} = hA = (400)(1) = 400\ \frac{W}{^\circ C}$$

$$\frac{1}{R_{1B}} = hA = (500)(1) = 500\ \frac{W}{^\circ C}$$

ظرفیت‌ها عبارتند از:

$$C_1 = C_6 = \rho\left(\frac{\Delta x}{2}\right)c = (7800)\left(\frac{0/001}{2}\right)(460) = 1794\ \frac{J}{^\circ C}$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \rho(\Delta x)c = 3588\ \frac{J}{^\circ C}$$

سپس مقادیر را جدول‌بندی می‌کنیم:

گره	$\sum\left(\frac{1}{R_{ij}}\right)$	C_i	$\frac{C_i}{\sum\left(\frac{1}{R_{ij}}\right)}$
۱	۱۹۴۰۰	۱۷۹۴	۰/۰۹۲
۲	۳۸۰۰۰	۳۵۸۸	۰/۰۹۴
۳	۳۸۰۰۰	۳۵۸۸	۰/۰۹۴
۴	۳۸۰۰۰	۳۵۸۸	۰/۰۹۴
۵	۳۸۰۰۰	۳۵۸۸	۰/۰۹۴
۶	۱۹۵۰۰	۱۷۹۴	۰/۰۹۲

نمو زمانی $\Delta\tau$ کم‌تر از $0/09\,s$ قابل قبول است. اکنون معادلات گرهی به صورت معادلهٔ (۴-۴۷) را نوشته، محاسبات را با کامپیوتر پیش می‌بریم.

جملات تولید گرما عبارتند از:

$$q_i = \dot{q}\,\Delta V_i$$

بنابراین:

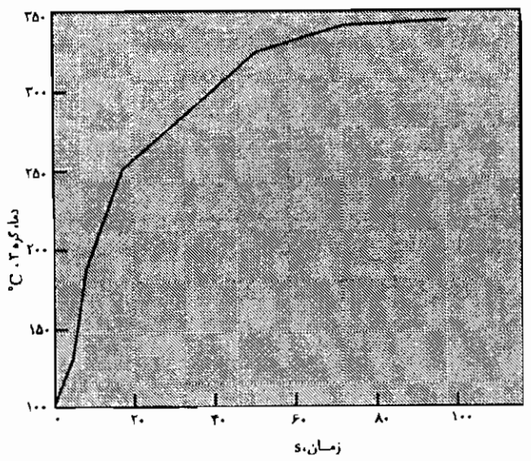
$$q_1 = q_6 = (50\times10^6)(1)\left(\frac{0/001}{2}\right) = 25{,}000\ W$$

$$q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = (50\times10^6)(1)(0/001) = 50{,}000\ W$$

نتایج کامپیوتری چند نمو زمانی $0/09\,s$ در جدول زیر نشان داده شده‌اند. چون دمای جسم جامد در تمام مدت تقریباً یکنواخت می‌ماند و جسم تقریباً مثل ظرفیت فشرده عمل می‌کند. دمای گره ۳ را نسبت به زمان در شکل مثال (۴-۱۵ ب) رسم کرده‌ایم تا این رفتار را نشان دهیم.

تعداد نموهای زمان ($\Delta\tau = 0/09s$)

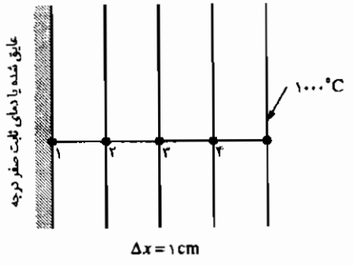
گره	۵	۲۰	۱۰۰	۲۰۰
۱	۱۰۶/۸۸۲۶	۱۲۳/۰۵۰۴	۱۹۰/۰۷۲۵	۲۴۶/۳۸۵۵
۲	۱۰۶/۴۷۸	۱۲۲/۸۸۶۷	۱۹۰/۹۶۱۸	۲۴۸/۱۹۸۸
۳	۱۰۶/۱۸۸۸	۱۲۲/۱۴۰۴	۱۹۰/۷۰۳۳	۲۴۸/۳۳۲۵
۴	۱۰۵/۳۷۷۲	۱۲۰/۹۷۶۳	۱۸۹/۳۰۷۲	۲۴۶/۷۹۳۳
۵	۱۰۴/۴۶۲۲	۱۱۹/۲۲۱۷	۱۸۶/۷۶۹۸	۲۴۳/۵۷۸۶
۶	۱۰۲/۴۴۱۶	۱۱۷/۰۰۵۶	۱۸۳/۰۷۳۵	۲۳۸/۶۷۷۳
گره	**۵۰۰**	**۸۰۰**	**۱۲۰۰**	**۳۰۰۰**
۱	۳۲۰/۵۷۶۶	۳۴۰/۱۷۴۵	۳۴۶/۰۱۷۴	۳۴۷/۲۰۸۵
۲	۳۲۳/۶۰۷۱	۳۴۳/۵۲۶۷	۳۴۹/۴۶۵۴	۳۵۰/۶۷۶
۳	۳۲۴/۲۵۷۷	۳۴۴/۳۱۳۷	۳۵۰/۲۹۳۱	۳۵۱/۵۱۲
۴	۳۲۲/۵۲۹۸	۳۴۲/۵۳۶	۳۴۸/۵۰۰۶	۳۴۹/۷۱۶۵
۵	۳۱۸/۴۲۲۹	۳۳۸/۱۹۳۴	۳۴۴/۰۸۷۷	۳۴۵/۲۸۹۳
۶	۳۱۱/۹۳۴۱	۳۳۱/۲۸۵۳	۳۳۷/۰۵۴۵	۳۳۸/۲۳۰۶



شکل مثال ۴-۱۵ (ب).

مثال ۴-۱۶ راه حل عددی برای ضریب هدایت متغیر

دمای اولیه و یکنواخت تیغه‌ای به ضخامت $4/0\,cm$ از جنس فولاد ضدزنگ (۸Ni٪ و ۱۸Cr٪) برابر $0^\circ C$ و سطح سمت چپ آن مطابق شکل مثال (۴-۱۶ الف) کاملاً عایق‌شده است. دمای سطح راست را ناگهان توسط یک منبع تابش قوی تا دمای ثابت $1000^\circ C$ بالا می‌برند. پخش دما را پس از (الف) $25\,s$،



شکل مثال ۴-۱۶ (الف).

(ب) $50\,s$، (پ) $100\,s$، (ت) فاصله زمانی به‌حدی طولانی که تیغه به حالت پایدار برسد، با به حساب آوردن تغییرات ضریب هدایت گرمایی محاسبه کنید. داده‌های مربوط به ضریب هدایت در پیوست A را با رابطه‌ای خطی و تقریبی بیان کنید. محاسبه را برای سطح چپ در $0^\circ C$ تکرار کنید.

حل :

از جدول ۲ – A داریم $k = 16/3\ \frac{W}{m.^\circ C}$ در $0^\circ C$ و $k = 31\ \frac{W}{m.^\circ C}$ در $1000^\circ C$

برای k رابطهٔ خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$k = k_0\,(1 + \beta T)$$

که T به درجه سلسیوس است. داده‌ها را در فرمول فوق وارد کرده، داریم:

$$k = 16/3\,(1 + 9/02\times10^{-3}\,T)\ \frac{W}{m.^\circ C}$$

هم‌چنین، $\rho = 7817\ \frac{kg}{m^3}$ و $c = 460\ \frac{J}{kg.^\circ C}$ است. از فرمول ظرفیت – مقاومت گرمایی با فرض این‌که مقاومت‌ها در متوسط حسابی دمای گره‌های متصل به آنها حساب شده باشد، استفاده می‌کنیم؛ یعنی R_{3-2} در $\frac{(T_3 + T_2)}{2}$ حساب می‌شود.

نخست، ظرفیت‌های گرمایی واحد سطح حساب می‌شود:

$$C_1 = \rho\left(\frac{\Delta x}{2}\right)c = (7817)\left(\frac{0/01}{2}\right)(460) = 1798\ \frac{J}{m^2.^\circ C}$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = \rho\,(\Delta x)c = (7817)(0/01)(460) = 35960\ \frac{J}{m^2.^\circ C}$$

رابطهٔ زیر را برای مقاومت‌های واحد سطح داریم:

$$\frac{1}{R} = \frac{k}{\Delta x} = \frac{k_0(1 + \beta T)}{\Delta x}$$

که اگر مقدار آنها را در دماهای متوسط بین گره‌ها حساب کنیم، داریم:

$$\frac{1}{R_{1-2}} = (16/3)\,\frac{[1 + 4/51\times10^{-3}\,(T_1 + T_2)]}{0/01} = \frac{1}{R_{2-1}}$$

$$\frac{1}{R_{3-2}} = (16/3)\,\frac{[1 + 4/51\times10^{-3}\,(T_2 + T_3)]}{0/01} = \frac{1}{R_{2-3}}$$

$$\frac{1}{R_{3-4}} = (16/3)\,\frac{[1 + 4/51\times10^{-3}\,(T_3 + T_4)]}{0/01} = \frac{1}{R_{4-3}}$$

$$\frac{1}{R_{4-1000}} = (16/3)\,\frac{[1 + 4/51\times10^{-3}\,(T_4 - T_{1000})]}{0/01} = \frac{1}{R_{1000-4}}$$

نیاز پایداری در گره ۱ از همه مهم‌تر است زیرا این گره کم‌ترین ظرفیت را دارد. برای رعایت اطمینان مقدار k را بزرگ و برابر $31\ \frac{W}{m.^\circ C}$ انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$\Delta\tau_{max} = \frac{(17{,}980)(0/01)}{31} = 5/8\,s$$

حال، معادلات گرهی را به صورت معادله (۴-۴۷) می‌نویسیم و در نتیجه، معادله مربوط به گره ۲ عبارت است از:

$$T_2^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_2}\left\{1630\left[1 + 4/51\times10^{-3}\,(T_1^p + T_2^p)\right](T_1^p - T_2^p)\right.$$

$$\left. + 1630\left[1 + 4/51\times10^{-3}\,(T_3^p + T_2^p)\right](T_3^p - T_2^p)\right\} + T_2^p$$

با $\Delta\tau = 5\,s$ از راه حل کامپیوتری استفاده می‌کنیم. نتایج به صورت جدول‌های زیر است. البته، جواب حالت پایدار سطح چپ عایق‌شده برابر دمای ثابت $1000^\circ C$ است. پخش حالت پایدار سمت چپ در $0^\circ C$ مطابق معادله (۲-۲) فصل ۲ است. می‌دانید که چون ضریب هدایت گرمایی غیرثابت است، نیم‌رخ دمای حالت پایدار خطی مستقیم نیست.

دماها به ازای دمای سطح چپ ثابت و برابر $0^\circ C$، $\Delta\tau = 5\,s$

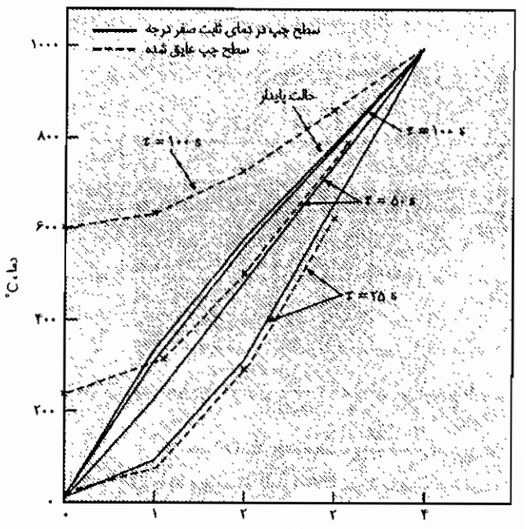
حالت پایدار	۱۰۰s	۵۰s	۲۵s	گره
۰	۰	۰	۰	۱
۳۱۷/۳۳۳۹	۳۰۸/۲۶۹۹	۲۳۶/۹۶۱۹	۹۴/۵۷۸۸۸	۲
۵۷۵/۱۹۳۸	۵۶۵/۷۷۸۶	۴۸۶/۵۸۰۲	۳۱۸/۷۶۳۷	۳
۷۹۹/۷۷۳۵	۷۹۳/۷۹۷۶	۷۴۸/۱۳۵۹	۶۵۳/۵۱۰۵	۴

دما برای وقتی که سطح چپ عایق‌شده، $\Delta\tau = 5s$

گره	۲۵s	۵۰s	۱۰۰s	حالت پایدار
۱	۳۰/۵۵۷۵۸	۲۳۲/۸۱۸۷	۵۸۷/۰۲۱	۱۰۰۰
۲	۹۶/۶۷۶۰۱	۳۱۰/۱۷۳۷	۶۲۳/۵۰۱۸	۱۰۰۰
۳	۳۱۸/۷۶۳۷	۵۰۵/۷۶۱۳	۷۲۱/۵۹۰۸	۱۰۰۰
۴	۶۵۳/۵۱۰۵	۷۵۲/۳۲۶۸	۸۵۵/۶۹۶۵	۱۰۰۰

این دماها در شکل مثال (۴-۱۶ ب) رسم شده‌اند.

هدف این مثال نشان دادن چگونگی استفاده از فرمول‌بندی ظرفیت-مقاومت برای بر راست به حساب آوردن تغییرات خواص است. ممکن است این تغییرات با در نظر گرفتن عدم اطمینان در شرایط مرزی، مهم باشد یا نباشد.



شکل مثال ۴-۱۶ (ب).

۴-۸ خلاصه درس

ضمن این فصل خواننده با روش‌های تحلیلی با پیچیدگی متفاوت آشنا شده است، مثل سیستم ساده ظرفیت فشرده تا راه‌حل‌های عددی کامپیوتری در زیر چند پیشنهاد برای در پیش گرفتن یک راه کلی در حل مسائل انتقال گرمای گذرا ارائه می‌شود.

۱- نخست تعیین کنید که آیا می‌توان از تحلیل فشرده استفاده کرد. اگر جواب آری باشد به محاسبه خیلی ساده‌تری می‌رسید.

۲- بررسی کنید که آیا راه‌حل تحلیلی به‌همراه ابزارهای کمکی مثل نمودارها و تقریب‌های هیسلر موجود است یا خیر.

۳- اگر راه حل‌های تحلیلی پیچیده باشد، **حتی در صورت موجود بودن**، مستقیماً از روش‌های عددی استفاده کنید. با این مسأله مخصوصاً وقتی مواجه می‌شوید که باید از محاسبات تکراری استفاده کنید.

۴- هنگام استفاده از روش عددی، به عدم اطمینان‌های بالایی که در شرایط مرزی جابه‌جایی و تابشی موجود است توجه کنید. در مورد افزایش تعداد گره‌ها و زمان کامپیوتر (و احتمالات مربوط به خطا) که نمی‌توان آنها را با وجود عدم اطمینان اساسی موجود در شرایط مرزی بهبود بخشید، اصراری نداشته باشید.

۵- بالاخره اینکه بدانید کم‌تر با مسأله هدایت خالص روبه‌رو می‌شوید؛ تقریباً همیشه هدایت با جابه‌جایی و تابش همراهست. خواننده باید این نکته را ضمن مطالعه فصول بعدی که در آنها جابه‌جایی و تابش به طور مشروح بررسی می‌شود، در نظر داشته باشد.

سؤالات مرور فصل

۱ ظرفیت فشرده یعنی چه؟ فرض‌های فیزیکی لازم برای کاربرد تحلیل حالت ناپایدار ظرفیت فشرده چیست؟

۲ منظور از جسم یک‌طرف نامحدود چیست؟

۳ شرایط اعمالی اولیه در راه حل‌های گذرایی که در این فصل به شکل ترسیمی ارائه شده، چیست؟

۴ شرایط مرزی به‌کار رفته در مسائل این فصل چیست؟

۵ تابع خطا را تعریف کنید.

۶ اعداد بیو و فوریه را تعریف کنید.

۷ چگونگی استفاده از راه‌حل‌های گذرای یک بعدی برای حل مسائل دوبعدی و سه‌بعدی را توضیح دهید.

۸ مزایا و عیوب فرمول‌بندی تفاضل پیش‌رو و پس‌رو در روش عددی حالت ناپایدار چیست؟ در چه شرایطی روشی را بر دیگری ترجیح می‌دهید؟

فهرست مثال‌های حل شده

۴-۱ سردکردن گلولهٔ فولادی در هوا
۴-۲ جسم یک طرف نامحدود با تغییر ناگهانی در شرایط سطح
۴-۳ دفع گرما از جسم یک‌طرف نامحدود
۴-۴ قرار گرفتن ناگهانی تیغهٔ یک‌طرف نامحدود در معرض جابه‌جایی
۴-۵ صفحهٔ آلومینیومی که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد
۴-۶ استوانه بلندی که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد
۴-۷ استوانه یک‌طرف نامحدودی که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد
۴-۸ استوانه به ارتفاع محدود که ناگهان در معرض جابه‌جایی قرار می‌گیرد
۴-۹ اتلاف گرمای استوانه به ارتفاع محدود
۴-۱۰ سرمایش ناگهانی میله
۴-۱۱ فرمول‌بندی غیرصریح
۴-۱۲ سردکردن سرامیک
۴-۱۳ سردکردن میله فولادی با h غیریکنواخت
۴-۱۴ گرم و سردکردن تابشی
۴-۱۵ هدایت گذرا با تولید گرما
۴-۱۶ راه‌حل عددی برای ضریب هدایت متغیر

مسائل

۴-۱ کره‌ای مسی به دمای اولیه و یکنواخت T_o را در سیالی فرو می‌بریم. داخل سیال گرم‌کن‌های برقی قرار دارد و طوری کنترل می‌شود که دمای سیال به صورت دوره‌ای و با معادلهٔ زیر تغییر می‌کند:

$$T_\infty - T_m = A \sin \omega\tau$$

که T_m = متوسط زمانی دمای سیال متوسط
A = دامنهٔ موج دما
ω = بسامد

رابطه‌ای برای دمای کره به صورت تابعی از زمان و ضریب انتقال گرما از سیال به کره به‌دست آورید. به فرض دمای کره و سیال در هر لحظه یکنواخت است به طوری‌که می‌شود از روش تحلیل ظرفیت فشرده استفاده کرد.

۴-۲ دمای اولیهٔ صفحه‌ای نامحدود به ضخامت ۲/۵cm برابر ۱۵۰°C است و دمای سطح آن ناگهان به ۳۰۰°C می‌رسد. ضریب پخشیدگی گرمایی جنس صفحه $1/8 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ است. دمای صفحهٔ مرکزی را پس از یک دقیقه با جمع چهار جملهٔ غیر صفر اولیهٔ معادله (۴-۳) به‌دست آورید. جواب را با استفاده از نمودارهای هیسلر بررسی کنید.

۴-۳ چنان‌چه از چهار جمله اولیه معادله (۴-۳) برای محاسبهٔ دما در $\tau = O$ و $x = L$ استفاده کنیم. مقدار خطا چه‌قدر است؟

۴-۴ جسم جامدی به دمای اولیهٔ T_o را ناگهان در اتاقی قرار می‌دهیم که دمای هوای آن T_∞ و دیواره‌هایش خیلی بزرگ است. ضریب انتقال گرما برای اتلاف گرمای جابه‌جایی h است و می‌توان سطح جسم را سیاه فرض کرد. به فرض دمای جسم در هر لحظه یکنواخت باشد، معادلهٔ دیفرانسیل تغییر دما نسبت به زمان را با در نظر گرفتن هم تابش و هم جابه‌جایی بنویسید.

۴-۵ تیغه‌ای به ابعاد ۳۰ cm در ۳۰ از جنس مس و به ضخامت ۵ cm و دمای یکنواخت ۲۶۰°C موجود است. دمای سطح آن‌را ناگهان به ۳۵°C می‌رسانیم. با استفاده از مفاهیم مقاومت و ظرفیت گرمایی و تحلیل ظرفیت فشرده، لحظه‌ای را بیابید، که در آن دمای مرکزی ۹۰°C می‌شود، $\rho = 8900 \frac{kg}{m^3}$ و $c_p = 0/38 \frac{kJ}{kg.°C}$ و $k = 370 \frac{W}{m.°C}$.

۴-۶ قطعه‌ای آلومینیمی به وزن ۵/۵ کیلوگرم و دمای اولیهٔ ۲۹۰°C را ناگهان در سیالی به دمای ۱۵°C فرو می‌بریم. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی برابر $58 \frac{W}{m^2.°C}$ است. چنان‌چه این قطعه را به‌صورت کره‌ای هم‌وزن خود درنظر بگیریم، زمان لازم خنک‌شدن تا ۹۰°C را با روش تحلیل ظرفیت فشرده حساب کنید.

۴-۷ دو مکعب مسی مشابه به ضلع ۷/۵ cm، به دماهای ۴۲۵ و ۹۰°C را به هم می‌چسبانیم. به‌فرض این مکعب‌ها تنها با یکدیگر مبادله گرما کرده، مقاومتی در مقابل جریان گرما به‌دلیل تماس بلوک‌ها وجود ندارد. دمای هر بلوک را به صورت تابعی از زمان، با استفاده از روش تحلیل ظرفیت فشرده رسم کنید. یعنی فرض کنید که مقاومت در برابر انتقال گرما، مقاومت هدایتی دو بلوک است. فرض کنید تمام سطوح به‌جز آنهایی که در تماسند عایق است.

۴-۸ مسألهٔ ۴-۷ را برای مکعبی مسی به ضلع ۷/۵ cm با دمای ۴۲۵°C در تماس با مکعبی فولادی به ضلع ۷/۵ cm با دمای ۹۰°C تکرار کنید. مدار گرمایی را بکشید.

۴-۹ صفحه نامحدودی به ضخامت $2L$ را ناگهان در معرض چشمه یا چاهِ گرمایی تابشی به دمای ثابت T_s قرار می‌دهیم. دمای اولیه و یکنواخت این صفحه برابر T_i است. اتلاف گرمای تابشی از هر طرف صفحه از فرمول $q = \sigma\varepsilon A(T^4 - T_s^4)$ به‌دست می‌آید که σ و ε ثابت بوده و A مساحت سطح است. به فرض صفحه، مثل ظرفیتِ گرمایی فشرده عمل کند، یعنی اینکه $k \to \infty$، عبارتی برای دمای صفحه به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

۴-۱۰ میله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ (۱۸٪کرم، ۸٪نیکل) به قطر ۶/۴ mm و دمای اولیه و یکنواخت ۵۰°C را ناگهان در سیالی به دمای ۲۰۰°C و $h = 120 \frac{W}{m^2.°C}$ فرو می‌بریم. با استفاده از روش تحلیل ظرفیت فشرده زمان لازم را برای رسیدن دمای میله به ۱۲۰°C حساب کنید.

۴-۱۱ دمای اولیه و یکنواخت کره‌ای مسی به قطر ۵ cm برابر ۲۵۰°C است و آن‌را ناگهان در معرض محیطی به دمای ۳۰°C و ضریب انتقال گرمای $h = 28 \frac{W}{m^2.°C}$ قرار می‌دهیم. با استفاده از روش تحلیل ظرفیت فشرده، زمان لازم را برای رسیدن دمای کره به ۹۰°C حساب کنید.

۴-۱۲ دودکشی از جنس آجر معمولی به ارتفاع یک متر، طول ۳ متر و ضخامت ۰/۵ متر برای کوره‌ای درنظر گرفته شده است. دمای کوره یکنواخت و برابر ۳۰۰°C است. دودکش را در اتاقی به دمای ۳۵°C و ضریب جابه‌جایی هوای $15 \frac{W}{m^2.°C}$ خنک می‌کنیم. سطح زیرین آجر روی سکوی عایق‌شده قرار دارد. وقتی که آجرها تا دمای اتاق خنک شوند اتلاف گرما چه‌قدر است؟ برای آنکه اتلاف نصف این مقدار شود چه‌قدر وقت لازم است و دمای مرکز هندسی دودکش در این لحظه چه‌قدر است؟

۴-۱۳ دمای یکنواخت و اولیهٔ کره‌ای مسی به قطر ۳/۰ cm برابر ۵۰°C است و آن‌را ناگهان در معرض جریان هوایی به دمای ۱۰°C و $h = 15 \frac{W}{m^2.°C}$ قرار می‌دهیم. چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای کره به ۲۵°C نزول کند؟

۴-۱۴ کره‌ای آلومینیومی به قطر ۵/۰cm در ابتدا به دمای یکنواخت ۵۰°C است و ناگهان آن‌را در معرض محیط تابشی خارج از جو به دمای صفر درجه کلوین (بدون جابه‌جایی) قرار می‌دهیم. به فرض سطح آلومینیوم سیاه شده باشد و از تحلیل ظرفیت فشرده استفاده شود زمان لازم را برای نزول دمای کره به ۱۱۰°C- حساب کنید.

۴-۱۵ قوطی آلومینیومی به حجم تقریبی ۳۵۰ cm³ محتوی مایعی به دمای ۱°C است. با استفاده از تحلیل ظرفیت فشرده، زمان لازم را برای رسیدن دمای محتویات قوطی، وقتی که آن‌را در اتاقی به دمای ۲۲°C و ضریب جابه‌جایی $15 \frac{W}{m^2.°C}$ قرار می‌دهیم، به ۱۵°C حساب کنید. خواص این مایع و آب را یکی فرض کنید.

۴-۱۶ کره‌ای آلومینیومی به قطر ۱۲ mm تا دمای یکنواخت ۴۰۰°C گرما داده شده، سپس در معرض هوای اتاق به دمای ۲۰°C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $10 \frac{W}{m^2.°C}$ قرار می‌گیرد. زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز کره به ۲۰۰°C حساب کنید.

۴-۱۷ دمای اولیهٔ یکنواخت کره‌ای مسی به قطر ۴cm برابر ۲۰۰°C است و آن‌را ناگهان درمعرض محیطی جابه‌جایی به‌دمای ۳۰°C و $h=۲۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهند. زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز کره به ۸۰°C حساب کنید.

۴-۱۸ وقتی سطح جسمی یک طرف نامحدود را در معرض پخش دمای موج سینوسی قرار دهیم، پخش دما چنین است:

$$T_{x,\tau} - T_m = A \exp\left(-x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right) \sin\left(۲\pi n\tau - x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)$$

که $T_{x,\tau}$ = دما در عمق x و مدت τ پس از شروع موج دما در سطح

T_m = دمای سطحی متوسط

n = بسامد موج، چرخه بر واحد زمان

A = دامنهٔ موج دما در سطح

اگر پخش دمای موج سینوسی روی سطح تیغه‌ای بتنی اعمال شود به نحوی‌که دما از ۳۵ به ۹۰°C برسد و چرخه‌کامل در ۱۵ دقیقه انجام شود، جریان گرما از صفحه‌ای به فاصلهٔ ۵cm از سطح را ۲ ساعت پس از شروع موج اولیه بیابید.

۴-۱۹ با استفاده از پخش‌دمای مسأله ۴-۱۸ نشان‌دهیدکه پس افت زمانی بین نقاط بیشینه در اوج دما در سطح و در عمق xاز فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta\tau = \frac{x}{۲}\sqrt{\frac{۱}{\alpha\pi n}}$$

۴-۲۰ دیوارهٔ بتنی ضخیمی به دمای یکنواخت ۵۴°C را ناگهان در معرض جریان هوایی به دمای ۱۰°C قرار می‌دهیم. ضریب انتقال گرما $۲/۶\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. دما در تیغه بتنی را در عمق ۷cm، پس از ۳۰ دقیقه حساب کنید.

۴-۲۱ دمای اولیه تیغه مسی بسیار بزرگی ۳۰۰°C است. دمای سطح را ناگهان تا ۳۵°C پایین می‌آوریم. دما در عمق ۷/۵cm، ۴ دقیقه پس از تغییر دمای سطح چه‌قدر می‌شود؟

۴-۲۲ در یک روز تابستانی دمای جاده‌ای بتنی به ۵۰°C می‌رسد. به فرض آبی را روی این جاده جاری کنند به طوری که دمای سطح ناگهان تا ۱۰°C پایین بیاید. چه مدت طول می‌کشد تا دمای بتن در عمق ۵cm از سطح به ۲۵°C برسد.

۴-۲۳ سطح تیغه مسی نیمه محدودی در معرض شار گرمایی ثابتی به میزان $۰/۳۲\frac{MW}{m^{۲}}$ قرار دارد. به فرض تیغه در خلاء قرار دارد و جابه‌جایی در سطح وجود ندارد. دمای سطح پس از گذشت ۵ دقیقه اگر دمای اولیهٔ تیغه ۳۰°C باشد، چه‌قدر می‌شود؟ دما در فاصلهٔ ۱۵cm از سطح پس از ۵ دقیقه چه‌قدر است؟

۴-۲۴ دمای اولیه و یکنواخت تیغه مسی بزرگی ۹۰°C است. دمای سطح آن‌را ناگهان تا ۳۰°C پایین می‌بریم. آهنگ انتقال گرما در صفحه‌ای به فاصلهٔ ۷/۵cm از این سطح را ۵ ثانیه پس از پایین آوردن دمای سطح حساب کنید.

۴-۲۵ سطح تیغهٔ آلومینیومی بزرگی به دمای یکنواخت ۳۰°C را ناگهان در معرض شار گرمایی ثابت $۱۵\frac{kW}{m^{۲}}$ قرار می‌دهیم. دما در عمق ۲/۵cm پس از ۲ دقیقه چه‌قدر می‌شود؟

۴-۲۶ چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای تیغه مسأله ۴-۲۵ در عمق ۲/۵cm به ۱۵۰°C برسد؟

۴-۲۷ یک‌قطعهٔ سرامیکی $\left[k=۰/۸\frac{W}{m.°C}\text{و}\rho=۲۷۰۰\frac{kg}{m^{۳}}\text{و}c=۰/۸\frac{kJ}{kg.°C}\right]$ خیلی ضخیم به دمای یکنواخت اولیهٔ ۳۰°C درنظربگیرید و سطح آن‌را ناگهان در معرض شار گرمایی ثابتی به مقدار $۶۵۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار دهید. منحنی دما در عمق ۱cm را بر حسب تابعی از زمان بکشید.

۴-۲۸ لایه ضخیم و بزرگ یخی به دمای یکنواخت و اولیه ۲۰°C- است. چنان‌چه دمای سطح ناگهان به ۱°C- برسد، زمان لازم را برای رسیدن دما در عمق ۱/۵cm به ۱۱°C- حساب کنید. خواص یخ عبارت است از: $\alpha=۰/۰۴۸\frac{ft^{۲}}{h}$، $k=۱/۲۸\frac{Btu}{h.°C}$، $c_p=۰/۴۶\frac{Btu}{lb_m}$، $\rho=۵۷\frac{lb_m}{ft^{۳}}$.

۴-۲۹ تیغه بتنی بزرگی (سنگ با مخلوط ۴-۲-۱) را ناگهان در معرض شار گرمایی ثابتی $۹۰۰\frac{W}{m^{۲}}$ قرار می‌دهند. دمای یکنواخت و اولیهٔ تیغه ۲۰°C است. دما در عمق ۱۰cm تیغه را پس از ۹ ساعت حساب کنید.

۴-۳۰ دمای یکنواخت صفحه‌ای خیلی ضخیم از جنس فولاد ضدزنگ (۱۸٪ کرم و ۸٪ نیکل) ۳۰۰°C بوده، دمای سطح آن ناگهان به ۱۰۰°C پایین آورده می‌شود. زمان لازم را برای رسیدن دما در عمق ۳cm به ۲۰۰°C حساب کنید.

۴-۳۱ تیغه بزرگی دارای خواص آجر ساختمانی معمولی است و تا دمای یکنواخت ۴۰°C گرما داده می‌شود. سطح تیغه را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲°C و $h=۲۵\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهیم. زمان لازم را برای رسیدن دما در عمق ۸cm به ۲۰°C حساب کنید.

۴-۳۲ بلوک بزرگی با خواص آجر کروم در ۲۰۰°C به دمای یکنواخت ۳۰°C است و ناگهان در معرض شار گرمایی سطحی $۳\times۱۰^{۲}\frac{W}{m^{۲}}$ قرار می‌گیرد. دما در عمق ۳۰mm را پس از ده دقیقه حساب کنید. دمای سطح در این لحظه چه‌قدر است؟

۴-۳۳ تیغه‌ای مسی به ضخامت ۳/۰cm دارای دمای اولیهٔ ۳۰۰°C است. سطح بالایی آن‌را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۸۰°C قرار می‌دهیم. سطح زیرین عایق‌شده است. دمای سطح در عرض شش دقیقه به ۱۴۰°C می‌رسد. مقدار ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی را حساب کنید.

۴-۳۴ تیغه بزرگ آلومینیومی به ضخامت ۱۰cm دارای دمای یکنواخت اولیه ۴۰۰°C است. آن‌را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۹۰°C و $h=۱۴۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهیم. چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای خط مرکزی به ۱۸۰°C کاهش یابد؟

۴-۳۵ دمای اولیه و یکنواخت صفحه مسی افقی به ضخامت ۱۰cm برابر ۲۵۰°C است. سطح زیرین صفحه عایق‌شده است. سطح فوقانی ناگهان در معرض جریان سیالی به‌دمای ۱۰۰°C قرار می‌گیرد. دمای سطح پس از ۶ دقیقه به ۱۵۰°C سقوط می‌کند. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی موجب این سقوط را حساب کنید.

۴-۳۶ ضخامت تیغه آلومینیومی بزرگی ۱۰cm و دمای اولیه و یکنواخت آن ۴۰۰°C است. این تیغه ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۹۰°C و $h=۱۴۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌گیرد. چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای مرکز تیغه به ۱۸۰°C برسد.

۴-۳۷ ضخامت صفحه‌ای از جنس فولاد ضدزنگ (۱۸٪ کروم و ۸٪ نیکل) ۳/۰cm بوده و دمای اولیه و یکنواخت آن ۵۰۰°C است. دو سطح صفحه را ناگهان در معرض محیطی به دمای ۴۰°C و $h=۱۵۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهند. زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز و سطح به ۱۰۰°C حساب کنید.

۴-۳۸ استوانه‌ای فولادی به قطر ۱۰cm در ابتدا به دمای ۳۰۰°C است. آن‌را ناگهان در حمام روغنی به دمای ۴۰°C و $h=۲۸۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$فرو می‌بریم. (الف) دمای مرکز استوانه را پس از ۲ دقیقه و (ب) دمای مرکز یکی از قاعده‌ها را پس از ۲ دقیقه بیابید.

۴-۳۹ قطر میله‌ای آلومینیومی ۱۱cm و دمای یکنواخت و اولیهٔ آن ۳۰۰°C است. اگر میله را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۵۰°C و $h=۱۲۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار دهند چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای مرکز تا ۸۰°C خنک شود؟ اتلاف گرمای واحد طول را حساب کنید.

۴-۴۰ کره‌ای از جنس کوارتز هم‌جوشیده به ضریب پخشیدگی گرمایی $۹/۵\times۱۰^{-۷}\frac{m^{۲}}{s}$، قطر ۲/۵cm و ضریب هدایت گرمایی $۱/۵۲\frac{W}{m.°C}$ است. دمای اولیه و یکنواخت کره ۲۵°C است و ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰۰°C قرار داده می‌شود. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۱۱۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. دما در مرکز و در شعاع ۶/۴mm را پس از ۴ دقیقه حساب کنید.

۴-۴۱ ساچمه سربی را می‌توان با چکاندن قطرات سرب مذاب در داخل آب ساخت. به فرض قطرات مزبور دارای خواص سرب جامد ۳۰۰°C باشد زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز به ۱۲۰°C حساب کنید. دمای آب ۱۰۰°C بوده و $h=۵۰۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ و قطر ساچمه ۱/۵mm است.

۴-۴۲ کره‌ای فولادی به قطر ۱۰cm را ناگهان در مخزن روغنی به دمای ۱۰°C فرو می‌بریم. دمای اولیهٔ کره ۲۲۰°C و $h=۵۰۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. چه‌قدر طول می‌کشد که مرکز کره خنک شده، به ۱۲۰°C برسد؟

۴-۴۳ پسری تصمیم می‌گیرد که تیله‌های شیشه‌ای خود را در بخاری به دمای ۲۰۰°C قرار دهد. قطر تیله‌ها برابر ۱۵mm است. پس از مدتی تیله‌ها را از بخاری در آورده، در هوای ۲۰°C اتاق قرار می‌دهد تا خنک شود. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی تقریباً برابر $۱۴\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. مدت زمانی که پسر باید صبر کند تا دمای مرکز تیله‌ها به ۳۵°C برسد را حساب کنید.

۴-۴۴ کره‌ای سربی به قطر $d=۱/۵$ mm و دمای اولیه ۲۰۰°C را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۱۰۰°C و $h=۵۰۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهند. زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز کره به ۱۲۰°C حساب کنید.

۴-۴۵ دمای اولیه و یکنواخت میله فولادی درازی ۵cm × ۱۰ برابر ۲۵۰°C است. این میله را ناگهان در معرض تغییری قرار می‌دهیم. به نحوی که دمای محیط به ۳۵°C پایین بیاید. ضریب انتقال گرما $۲۳\frac{W}{m^{۲}.°C}$ باشد، با استفاده از روشی عددی، زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز به ۹۰°C حساب کنید. این اعداد را با نتایج حاصل از کاربرد نمودارهای هیسلر مقایسه کنید.

۴-۴۶ دمای اولیهٔ میله‌ای فولادی با سطح مقطع مربعی به ضلع ۲/۵cm و طول ۷/۵cm برابر ۲۵۰°C است. آن‌را در مخزن روغن به دمای ۳۰°C فرو می‌بریم. ضریب انتقال گرما $۵۷۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. دمای مرکز میله را پس از ۲ دقیقه حساب کنید.

۴-۴۷ دمای اولیهٔ مکعبی آلومینیومی به ضلع ۱۰cm برابر ۳۰۰°C است و در سیالی به دمای ۱۰۰°C فرو برده می‌شود. ضریب انتقال گرما $۹۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. دمای مرکز یک وجه را پس از یک دقیقه حساب کنید.

۴-۴۸ دمای اولیهٔ استوانه بتنی کوتاهی به قطر ۱۵cm و طول ۳۰cm برابر ۲۵°C است. آن‌را در محیط جو به دمای ۰°C خنک می‌کنیم. زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز به ۶°C با ضریب انتقال گرمای $۱۷\frac{W}{m^{۲}.°C}$ حساب کنید.

۴-۴۹ مکعبی آلومینیومی به ضلع ۴/۰cm به دمای اولیه ۴۵۰°C را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۱۰۰°C و $h=۱۲۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهیم. چه‌قدر وقت برای خنک‌شدن مکعب تادمای ۲۰۰°C لازم است؟

۴-۵۰ دمای اولیه مکعبی آلومینیومی به ضلع ۱۱cm برابر ۴۰۰°C است و ناگهان در مخزن روغنی به دمای ۸۵°C فرو برده می‌شود. ضریب جابه‌جایی $۱۱۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. دمای مرکز یکی از سطوح را پس از یک دقیقه حساب کنید.

۴-۵۱ دمای اولیه و یکنواخت مکعبی آلومینیومی به ضلع ۵cm برابر ۱۰۰°C بوده، ناگهان در معرض هوای اتاق به دمای ۲۵°C قرار می‌گیرد. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۲۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. زمان لازم را برای رسیدن به دمای مرکز هندسی به ۵۰°C حساب کنید.

۴-۵۲ استوانه‌ای از جنس فولاد ضدزنگ (۱۸٪ کروم و ۸٪ نیکل) را تا دمای یکنواخت ۲۰۰°C گرما داده، سپس آن‌را در محیطی به دمای هوای ثابت ۳۰°C خنک می‌کنند. ضریب انتقال گرما را می‌توان $۲۰۰\frac{W}{m^{۲}.°C}$ در نظر گرفت. قطر استوانه ۱۰cm و طول آن ۱۵cm است. دمای مرکز هندسی استوانه را پس از ۱۰ دقیقه حساب کنید. اتلاف گرما را نیز حساب کنید.

۴-۵۳ دمای اولیه و یکنواخت استوانه‌ای به قطر ۱۵cm و ارتفاع ۳۰cm برابر ۳۰۰°C است و آن را ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۲۰°C و $h=۳۵\frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهند. خواص جسم به صورت $k=۲/۳\frac{W}{m.°C}$، $\rho=۳۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$ و $c=۸۴۰\frac{J}{kg.°C}$ است. زمان لازم را برای رسیدن (الف) مرکز و (ب) مرکز یک سطح، به دمای ۱۵۰°C حساب کنید. اتلاف گرما در هر مورد را نیز بیابید.

۴-۵۴ جسم جامد مکعب مستطیل شکلی به ابعاد ۱۵ × ۱۰ × ۲۰ سانتی‌متر دارای خواص آجر نسوز است. دمای اولیه و یکنواخت آن ۳۰۰°C است و ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۸۰°C و $h = ۱۱۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌گیرد. زمان لازم را برای رسیدن (الف) مرکز هندسی و (ب) مرکز هر یک از سطوح، به دمای ۲۰۰°C حساب کنید. اتلاف گرما در هر یک از موارد را بیابید.

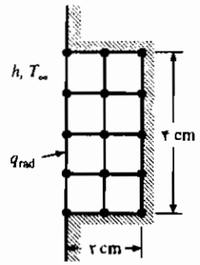
۴-۵۵ اتلاف گرما در هر دو مورد مسأله ۴-۳۸ را بیابید.

۴-۵۶ اتلاف گرمای میلهٔ مسأله ۴-۴۶ را به ازای واحد طول بیابید.

۴-۵۷ اتلاف گرمای مکعب مسأله ۴-۴۷ را بیابید.

۴-۵۸ برای یک گرهٔ مرزی که در معرض محیط جابه‌جایی قرار گرفته فرمول‌بندی تفاضل پس‌رو به‌دست آورید. آن‌را با جدول ۴-۳ مقایسه کنید.

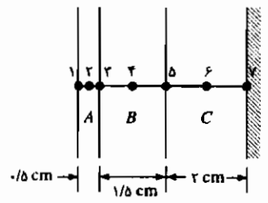
۴-۵۹ صفحه‌ای از جنس فولاد ضدزنگ به‌وسیله بلوک عایق احاطه شده و دمای اولیه یکنواخت آن ۵۰°C و دمای محیط جابه‌جایی ۵۰°C است. این صفحه را ناگهان در معرض شار گرمایی تابشی $۲۰ \frac{kW}{m^{۲}}$ قرار می‌دهیم. دما در گره‌های نشان داده شده را پس از ۱۰ ثانیه، یک دقیقه و ۱۰ دقیقه حساب کنید. خواص فولاد ضدزنگ عبارتست از: $k = ۱۶ \frac{W}{m.°C}$، $\rho = ۷۸۰۰ \frac{kg}{m^{۳}}$، $c = ۰/۴۶ \frac{kJ}{kg.°C}$ و $h = ۳۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ به فرض تمام تابش جذب می‌شود.



شکل م ۴-۵۹.

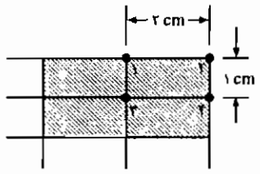
۴-۶۰ یک وجه صفحهٔ مرکب شکل زیر عایق‌شده و دمای اولیه و یکنواخت آن ۱۰۰°C است. این وجه را ناگهان در لحظهٔ صفر در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۱۰°C و $h = ۷۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌دهیم. دما در گره‌های نشان داده شده را پس از ۱ ثانیه، ده‌ثانیه، یک‌دقیقه و ده‌دقیقه معین کنید.

ماده	k, $\frac{W}{m.°C}$	ρ, $\frac{kg}{m^{۳}}$	c, $\frac{kJ}{kg.°C}$
A	۲۰	۷۸۰۰	۰/۴۶
B	۱/۲	۱۶۰۰	۰/۸۵
C	۰/۵	۲۵۰۰	۰/۸



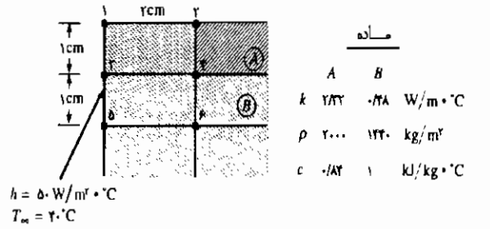
شکل م ۴-۶۰.

۴-۶۱ گوشهٔ نشان داده شده در شکل زیر در ابتدا به دمای ۲۰۰°C است، ناگهان در اطراف لبه در معرض جابه‌جایی $h = ۵۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ و $T_\infty = ۳۰°C$ قرار می‌گیرد. به فرض این جسم دارای خواص آجر نسوز است. گره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را امتحان کرده، حداکثر نمو زمانی را معین کنید که می‌توان برای محاسبهٔ عددی گذرا به کار برد.



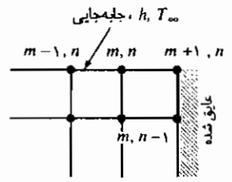
شکل م ۴-۶۱.

۴-۶۲ معادله گرهی گره ۳ شکل زیر را برای استفاده در تحلیل گذرا بنویسید. معیار پایداری برای این گره را تعیین کنید.



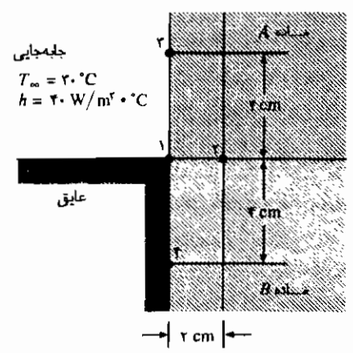
شکل م ۴-۶۲.

۴-۶۳ معادلهٔ گرهی برای تحلیل گره (m,n) شکل زیر را برای استفاده در تحلیل گذرای جسم جامد بنویسید.



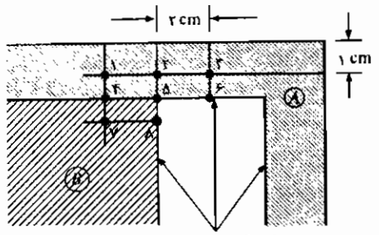
شکل م ۴-۶۳.

۴-۶۴ معادلهٔ گرهی را نوشته، معیار پایداری برای گره ۱ شکل زیر را تعیین کنید (تحلیل گذرا). مواد A و B خواص مسأله ۴-۶۱ را دارند.



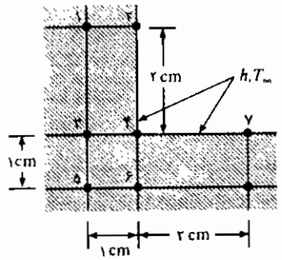
شکل م ۴-۶۴.

۴-۶۵ حداکثر نمو زمانی را حساب کنید که می‌توان برای گره ۵ شکل زیر در تحلیل عددی گذرا به کار برد. معادلهٔ گرهی را نیز برای این گره بنویسید.



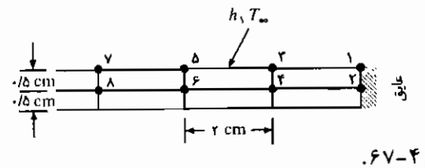
شکل م ۴-۶۵.

۴-۶۶ دمای یکنواخت و اولیهٔ گوشهٔ شکل زیر ۳۰۰°C بوده ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۵۰°C و $h = ۶۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌گیرد. به فرض جسم خواص آجر نسوز را دارد. گره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را بررسی کرده، حداکثر نمو زمانی را تعیین کنید که می‌توان برای محاسبهٔ عددی گذرا به کار برد.



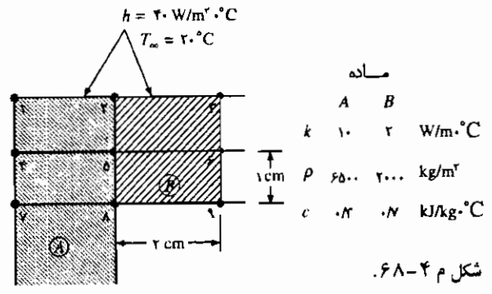
شکل م ۴-۶۶.

۴-۶۷ معادلهٔ گرهی حالت پایدار را برای گره ۳ شکل زیر به فرض عمق عمود بر صفحه برابر واحد بوده، با استفاده از فاصله‌های بین گره‌ها که در شکل نشان داده شده بنویسید. ضریب هدایت گرمایی جسم $۱۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ و ضریب انتقال جابه‌جایی روی سطح جانبی $۲۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ است.



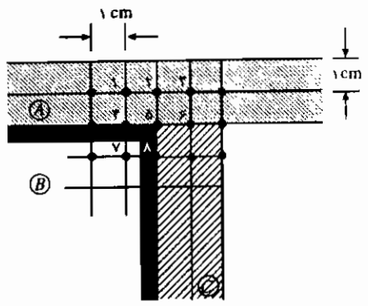
شکل م ۴-۶۷.

۴-۶۸ حداکثر نمو زمانی مجاز برای گره ۲ را در تحلیل عددی گذرا برای مقطع شکل زیر حساب کنید. معادلهٔ گرهی کامل را برای این گره بنویسید.



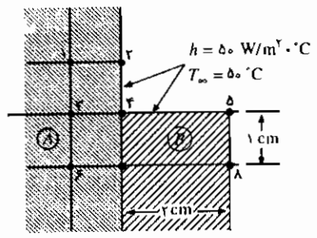
شکل م ۴-۶۸.

۴-۶۹ می‌باید از تحلیل عددی گذرا برای ماده مرکب مقطع شکل زیر استفاده کرد. حداکثر نمو زمانی لازم برای گره ۵ را برای ایجاد هم‌گرایی حساب کنید.



شکل م ۴-۶۹.

۴-۷۰ برای مقطع شکل زیر حداکثر نمو زمانی را برای گره ۴ در تحلیل عددی گذرا حساب کنید. معادله گرهی کامل را نیز برای گره ۴ بنویسید.



		A	B	
k		۲۰	۲	W/m.°C
ρ		۷۸۰۰	۱۶۰۰	kg/m³
c		۰/۵	۰/۸	kJ/kg.°C

شکل م ۴-۷۰.

۴-۷۱ گرهی مثال آنچه در جدول (۲-۳ت) نشان داده شده دارای نموهای x و y است که برابر ۱ سانتی مترند. محیط مرزی جابه‌جایی به دمای ۵۰°C و $h = ۶۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. جنس جامد، فولاد ضدزنگ (۱۸٪ کروم و ۸٪ نیکل) است. با استفاده از فرمول‌بندی مقاومت گرمایی و ظرفیت برای تحلیل گذرا، معادلهٔ گرهی این گره را نوشته، حداکثر نمو زمانی مجاز را تعیین کنید.

۴-۷۲ جسم جامد مسأله ۴-۴۳ در ابتدا به دمای یکنواخت ۱۰°C است. سطح سمت راست در لحظهٔ صفر ناگهان به ۳۸°C تغییر دما داده و سطح سمت چپ در معرض محیط جابه‌جایی است. دمای گره‌های ۳ و ۶ در ۱۰°C ثابت می‌ماند. برای $\Delta\tau$ مقدار مناسبی انتخاب کرده، دمای گره‌های ۱، ۲، ۴ و ۵ را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. محاسبه را تا جایی ادامه دهید که پخش حالت‌پایدار است. $\rho = ۳۰۰۰ \frac{kg}{m^{۳}}$ و $c = ۸۴۰ \frac{J}{kg.°C}$ در نظر بگیرید.

۴-۷۳ جسم جامد مسأله ۳-۴۵ دارای $k = 11 \frac{W}{m.^\circ C}$ و دمای اولیهٔ یکنواخت آن $1000^\circ C$ است. در لحظهٔ صفر دمای چهار سطح به مقادیر مشخص شده تغییر می‌یابد. $\Delta\tau$ مناسبی انتخاب و دمای گره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. دماهای حالت پایدار حدی را به‌دست آورید. $\rho = 2800 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 940 \frac{J}{kg.^\circ C}$ در نظر بگیرید.

۴-۷۴ دمای پره مسأله ۳-۴۹ در ابتدا یکنواخت و $300^\circ C$ است و ناگهان در معرض محیط جابه‌جایی قرار می‌گیرد. $\Delta\tau$ مناسبی انتخاب و دمای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho = 2200 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 820 \frac{J}{kg.^\circ C}$ در نظر بگیرید.

۴-۷۵ دمای اولیه و یکنواخت پره مسأله ۳-۵۰ برابر $200^\circ C$ است و ناگهان در معرض محیط جابه‌جایی نشان داده شده قرار می‌گیرد در حالی که دمای سطح زیرین در $200^\circ C$ می‌ماند. $\Delta\tau$ مناسبی انتخاب و دماهای گرهی پس از ۱۰ نمو زمانی را حساب کنید. تمرین را پس از $100\Delta\tau$ تکرار کنید. $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 460 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۷۶ دمای اولیه و یکنواخت جسم جامد مسأله ۳-۵۱ برابر $100^\circ C$ است و سپس جسم ناگهان در معرض شرط جابه‌جایی قرار می‌گیرد در حالی که سطوح سمت راست و زیرین در دمای $100^\circ C$ ثابت می‌مانند. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho = 3000 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 800 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۷۷ دمای اولیهٔ یکنواخت جسم مسأله ۳-۵۲ برابر $50^\circ C$ است و جسم ناگهان در معرض شرط جابه‌جایی قرار می‌گیرد. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho = 2500 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 900 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۷۸ دمای اولیه و یکنواخت اجسام جامد مسأله ۳-۵۳ برابر $300^\circ C$ است و ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی قرار می‌گیرند در حالی‌که دمای داخلی در $300^\circ C$ ثابت نگه داشته می‌شود. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho_A = 2900 \frac{kg}{m^3}$، $c_A = 810 \frac{J}{kg.^\circ C}$، $\rho_B = 7800 \frac{kg}{m^3}$ و $c_B = 470 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۷۹ دمای اولیهٔ یکنواخت پرهٔ مسأله ۳-۵۴ برابر $200^\circ C$ است و سپس ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی و تولید گرما قرار می‌گیرد. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را برای ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho = 7600 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 450 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید. دمای پایه در $200^\circ C$ ثابت می‌ماند.

۴-۸۰ دمای اولیه و یکنواخت جسم جامد شکل ۳-۵۵ برابر $500^\circ C$ است و ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی قرار می‌گیرد در حالی که دمای سطح داخلی آن در $500^\circ C$ باقی نگه‌داشته می‌شود. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. چگالی را $\rho = 500 \frac{kg}{m^3}$ و گرمای ویژه را $c = 810 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۸۱ مسأله ۴-۸۰ را برای لایهٔ فولادی مسأله ۳-۸۸ تکرار کنید. $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 460 \frac{J}{kg.^\circ C}$ را برای فولاد بگیرید.

۴-۸۲ دمای اولیه و یکنواخت صفحهٔ مسأله ۳-۵۶ برابر $100^\circ C$ است و ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی قرار می‌گیرد. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho = 7500 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 440 \frac{J}{kg.^\circ C}$ در نظر بگیرید.

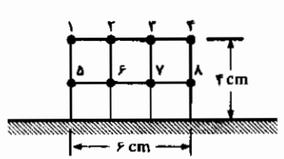
۴-۸۳ دمای اولیه و یکنواخت جسم جامد مسأله ۳-۵۷ برابر $100^\circ C$ است و ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی و تولید گرما قرار می‌گیرد در حالی که دمای سطح سمت راست در $100^\circ C$ می‌ماند. مقداری برای $\Delta\tau$ انتخاب و دماهای گرهی را پس از ۱۰ نمو زمانی حساب کنید. $\rho = 7600 \frac{kg}{m^3}$ و $c = 460 \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۸۴ انتهای میله‌ای فولادی به قطر $12/5\,mm$ و طول $20\,cm$ را به مخزن گرمایی به دمای $250^\circ C$ چسبانده‌ایم. دمای برتاسر میله در آغاز برابر این مقدار است. سپس آن‌را در معرض جریان هوایی به دمای $30^\circ C$ قرار می‌دهیم به نحوی که ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $35 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. زمان لازم را برای آن‌که دمای وسط طول میله $190^\circ C$ شود به‌دست آورید.

۴-۸۵ تیغه‌ای بتنی به ضخامت $15\,cm$ دارای ضریب هدایت گرمایی $0/87 \frac{W}{m.^\circ C}$ است. یک وجه آن عایق‌شده و وجه دیگرش در معرض یک محیط است. دمای اولیه و یکنواخت تیغه $300^\circ C$ است، دمای محیط ناگهان به $90^\circ C$ پایین آورده می‌شود. ضریب انتقال گرما متناسب با ریشهٔ چهارم اختلاف دمای بین سطح و محیط است و مقدار آن در لحظهٔ صفر $11 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ می‌باشد. دمای محیط به طور خطی با زمان تغییر کرده، پس از ۲۰ دقیقه مقدارش $200^\circ C$ می‌شود. با استفاده از روش عددی، پخش دما در تیغه را پس از ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ دقیقه به‌دست آورید.

۴-۸۶ دماهای سطحی و داخلی جسم دوبعدی شکل ۳-۶ برابر مقداری است که محاسبه شده است. در لحظهٔ صفر دمای وجهی را که $500^\circ C$ است ناگهان پایین آورده، به $30^\circ C$ می‌رسانیم. اگر $\Delta x = \Delta y = 15\,cm$ و $\alpha = 1/29 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ باشد، دما در گره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را پس از ۳۰ دقیقه حساب کنید. محاسبات را با هر دو روش تفاضل پس‌رو و پیش‌رو انجام دهید. در مورد روش تفاضل پس‌رو فقط از ۲ نمو زمانی استفاده کنید، $k = 45 \frac{W}{m.^\circ C}$ بگیرید.

۴-۸۷ مادهٔ نوار نشان داده شده در شکل دارای ضریب هدایت گرمایی $20 \frac{W}{m.^\circ C}$ است و محکم بر روی سطحی هم‌دما به دمای $50^\circ C$ قرار داده می‌شود در لحظه صفر ناگهان در معرض جریان هوایی با $T_\infty = 300^\circ C$ و $h = 40 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار می‌گیرد. با استفاده از روش عددی، دمای گره‌های ۱ تا ۸ را پس از ۱ ثانیه، ۱۰ ثانیه، ۱ دقیقه و حالت پایدار را حساب کنید. چگالی را $\rho = 7000 \frac{kg}{m^3}$ و گرمای ویژه را $c = 0/5 \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ بگیرید.



شکل م ۴-۸۷.

۴-۸۸ مسأله ۴-۷ و ۴-۸ را دوباره با استفاده از روش عددی حل کنید.

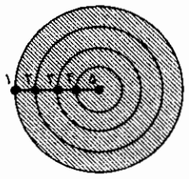
۴-۸۹ مسأله ۴-۸۴ را دوباره با استفاده از روش عددی حل کنید.

۴-۹۰ کره‌ای از جنس فولاد ضدزنگ سیاه شده به قطر $10\,cm$ در ابتدا به دمای یکنواخت $1000^\circ K$ است و ناگهان در فضای خارج از جو قرار داده می‌شود و به طریق تابش (بدون جابه‌جایی) و به صورت زیر گرما از دست می‌دهد:

$q_{\text{تابش}} = \sigma A T^4$ به درجه کلوین T

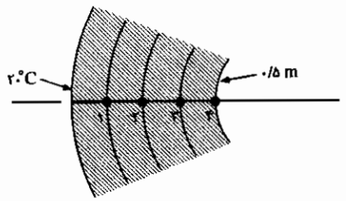
$\sigma = 5/669 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2.^\circ K^2}$

دمای گره‌های نشان داده شده را به ازای چند نمو زمانی و اتلاف گرمای مربوطه را حساب کنید. مقادیر k و ρ و c را از مسأله ۴-۵۹ برداشت کنید.



شکل م ۴-۹۰.

۴-۹۱ کره‌ای بتنی و توخالی [$\alpha = 7 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ و $k = 1/3 \frac{W}{m.^\circ C}$] دارای قطر داخلی و خارجی $0/5\,m$ و $1\,m$ و دمای آن در ابتدا یکنواخت و $200^\circ C$ است. دمای سطح بیرونی آن‌را ناگهان تا $20^\circ C$ پایین می‌آوریم. دماهای گرهی نشان داده شده را به ازای چند نمو زمانی حساب کنید. به فرض سطح داخلی مثل عایق باشد.



شکل م ۴-۹۱.

۴-۹۲ مسأله ۴-۴۹ را برای وقتی که سطح بالایی نیز به طریق تابشی و بر طبق فرمول زیر گرما از دست می‌دهد، تکرار کنید.

$q_{\text{تابش}} = \sigma A \varepsilon (T^4 - T_\infty^4)$ به درجه کلوین T

$\sigma = 5/669 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2.^\circ K^4}$

$\varepsilon = 0/7$

۴-۹۳ صندوق نسوزی از جنس پنبه نسوز شل‌بسته ساخته شده که در بین ورق‌های نازک از جنس فولاد ضدزنگ قرار گرفته است. شکل صندوق مکعبی و اضلاع داخل و خارج آن $0/5\,m$ و $1\,m$ است. اگر دمای یکنواخت آن در ابتدا $30^\circ C$ بوده، ناگهان سطح خارجی آن‌را در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای $600^\circ C$ و $h = 100 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار دهیم، زمان لازم را برای رسیدن دمای داخلی به $150^\circ C$ حساب کنید. به فرض سطح داخلی عایق‌شده است و از مقاومت و ظرفیت فولاد ضدزنگ صرف‌نظر کنید. خواص پنبه نسوز عبارتست از: $\alpha = 3/5 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ و $k = 0/16 \frac{W}{m.^\circ C}$.

۴-۹۴ نیمه استوانهٔ مسأله ۳-۵۸ به دمای یکنواخت و اولیهٔ $300^\circ C$ است و سپس ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی قرار داده می‌شود در حالی که دمای قسمت زیرین آن در $300^\circ C$ ثابت نگه‌داشته می‌شود. دماهای گرهی را برای چند نمو زمانی و اتلاف گرما در هر دوره را حساب کنید. $\alpha = 0/5 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ بگیرید.

۴-۹۵ دمای یکنواخت و اولیهٔ دال آجری بزرگی [$\alpha = 5/4 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ و $k = 1/07 \frac{W}{m.^\circ C}$] $20^\circ C$ است. یکی از سطوح را ناگهان در معرض شار گرمایی یکنواخت $4500 \frac{W}{m^2}$ قرار می‌دهیم. دمای سطح را به صورت تابعی از زمان، محاسبه و رسم کنید. شار گرمایی از صفحه‌ای به عمق $2/0\,cm$ را وقتی که دمای سطح به $150^\circ C$ می‌رسد نیز حساب کنید.

۴-۹۶ مسأله ۴-۲۲ را با روش عددی حل کنید.

۴-۹۷ مسأله ۴-۲۰ را با روش عددی حل کنید.

۴-۹۸ صفحه‌ای سرامیکی به ضخامت $2/0\,cm$ را تا دمای یکنواخت $1000\,K$ گرما داده، ناگهان دو سطح آن‌را در معرض تابشی به دمای $300\,K$ قرار می‌دهیم. خواص جسم به صورت $k = 1/2 \frac{W}{m.^\circ C}$، $\rho = 2500 \frac{kg}{m^3}$، $c = 0/9 \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ و $\varepsilon = 0/85$ است. صفحه را به ۸ قسمت ($\Delta x = 0/25\,cm$) تقسیم کرده، با استفاده از روش عددی اطلاعات مربوطه را به‌دست آورده، منحنی دمای مرکز و سطح را به صورت تابعی از زمان رسم کنید.

۴-۹۹ سرامیک مسأله ۴-۹۸ را به صورت استوانهٔ بلندی به قطر $2/0\,cm$ فرض کرده، آن‌را به ۴ نمو ($\Delta r = 0/25\,cm$) تقسیم کرده، اطلاعات مربوطه را به‌دست آورده، منحنی دمای سطح و مرکز را به صورت تابعی از زمان رسم کنید.

۴-۱۰۰ دمای اولیه و یکنواخت کره‌ای گرافیتی به قطر $15\,cm$ برابر $120^\circ C$ است. ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی با $h = 350 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و دمای $30^\circ C$ قرار می‌گیرد. دما در شعاع $4/5\,cm$ را پس از ۲۱ دقیقه و انرژی تلف‌شده از کره در این مدت را حساب کنید. خواص گرافیت را به‌صورت $k = 3/2 \frac{W}{m.^\circ C}$ و $\alpha = 13 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ بگیرید.

۴-۱۰۱ دمای اولیه و یکنواخت دیواری آجری به ضخامت $10\,cm$ با خواص آجر معمولی ساختمانی $80^\circ C$ است و ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی با $T_\infty = 20^\circ C$ و $h = 100 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار می‌گیرد. با استفاده

از $\Delta x = 2/5\,cm$ زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز به $50^\circ C$ با روش عددی حساب کنید. حداکثر بازه زمانی برای این محاسبات را نیز تعیین کنید.

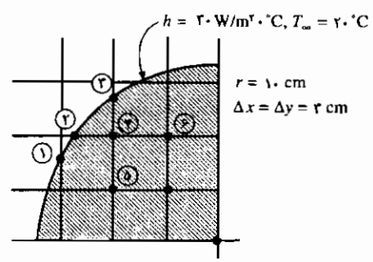
۴-۱۰۲ صفحه‌ای از جنس فولاد (۱٪کروم) در یک بخاری تا دمای یکنواخت $200^\circ C$ گرم شده، سپس دو طرف آن در معرض محیطی جابه‌جایی با $T_\infty = 20^\circ C$ و $h = 300\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار می‌گیرد. ضخامت صفحه $10\,cm$ است. $\Delta x = 1\,cm$ گرفته، دمای مرکز را پس از ۵ و ۱۰ دقیقه از روش عددی حساب کنید. و مسأله را با استفاده از نمودارهای هیسلر نیز حل کنید.

۴-۱۰۳ دمای اولیهٔ الوار بلندی از جنس چوب بلوط به ابعاد $4/1\,cm \times 9/2$ برابر $20^\circ C$ است و در یک بخاری $T_\infty = 200^\circ C$ و $h = 40\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ گذاشته می‌شود. زمان لازم را برای رسیدن دمای سطح به $150^\circ C$ حساب کنید. محاسبه را برای مرکز هندسی الوار تکرار کنید.

۴-۱۰۴ دمای اولیه و یکنواخت دو جسم جامد برابر $200^\circ C$ است و $k = 1/4\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و $\alpha = 7\times10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$: (الف) جسم جامد یک طرف نامحدود و (ب) صفحه‌ای نامحدود به ضخامت $10\,cm$. ناگهان دو جسم در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای $25^\circ C$ با $h = 40\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ قرار می‌گیرند. دماهای مرکز صفحه را برای $x = 5\,cm$ در جسم یک طرف نامحدود پس از ۵، ۱۰، ۲۰ و ۳۰ دقیقه حساب کنید. از این محاسبات چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

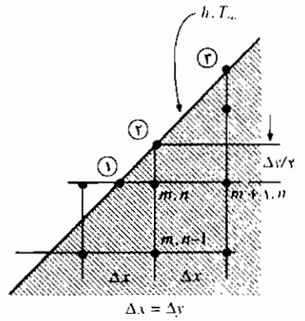
۴-۱۰۵ محاسبات مسأله ۴-۱۰۴ را بر پایهٔ تحلیل ظرفیت فشرده انجام داده، در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

۴-۱۰۶ برای شبکهٔ مربعی واقع بر ربع دایرهٔ شکل زیر، معادلات گرهی صریح گذرا را برای گره‌های ۳ و ۴ بنویسید. $k = 10\ \frac{W}{m.^\circ C}$، $\rho = 2000\ \frac{kg}{m^3}$ و $c = 840\ \frac{J}{kg.^\circ C}$ بگیرید. اطلاعات را از جدول‌های ۳-۲ و ۳-۴ برداشت کنید. حداکثر نمو زمانی مجاز برای هر گره چیست؟



شکل م ۴-۱۰۶.

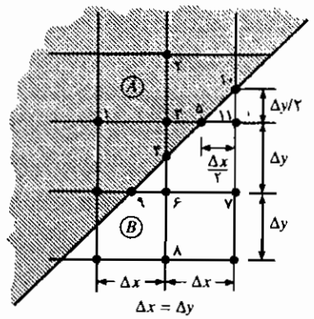
۴-۱۰۷ شکل زیر مورد خالصی از جدول (۳-۲ ج) است. فرمول‌بندی صریح را برای گره‌های (m,n) و ۲ با استفاده از فرمول‌بندی ظرفیت ـ مقاومت و اطلاعات جدول ۳-۴ بنویسید.



شکل م ۴-۱۰۷.

۴-۱۰۸ مسأله ۴-۱۰۷ را برای سطحی شیب‌دار که (الف) عایق‌شده است و (ب) در T_∞ هم‌دماست، تکرار کنید.

۴-۱۰۹ مقطع شیب‌دار شکل زیر از تقاطع ماده A و B حاصل شده است. معادلات گرهی گذرا را برای گره‌های ۳، ۴ و ۶ با استفاده از اطلاعات جدول‌های (۳-۲ ج) و (۳-۴ ج و چ) بنویسید.



شکل م ۴-۱۰۹.

۴-۱۱۰ دمای اولیه و یکنواخت جسم مسأله ۳-۶۶ برابر $100^\circ C$ است اما ناگهان دمای دو سطح تا ۰ و $40^\circ C$ پایین آورده می‌شود. اگر این جسم دارای $k = 20\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و $\alpha = 5\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$ باشد، دمای حالت پایدار هر گره و دماهای گرهی پس از ۱ دقیقه را بیابید.

۴-۱۱۱ دمای اولیه و یکنواخت جسم مسأله ۳-۶۸ برابر $150^\circ C$ است و ناگهان در معرض شرایط مرزی معلومی با $h = 50\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و $T_\infty = 20^\circ C$ قرار می‌گیرد. خواص جسم را به‌صورت $k = 61\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و $\alpha = 1/7\times10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$ بگیرید و مقادیر حالت پایدار ۱۲ گره و دمای گرهی پس از ۱۰ دقیقه را تعیین کنید.

۴-۱۱۲ دمای اولیه و یکنواخت پرهٔ پین شکل مسأله ۳-۶۴ برابر $200^\circ C$ است و ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی قرار می‌گیرد. (الف) پخش دمای حالت پایدار را با تحلیل گذرایی که زمان آن طولانی است و (ب) پخش دما را در مدت تقریباً نصف زمان " طولانی " تعیین کنید.

۴-۱۱۳ دمای اولیه و یکنواخت جسم مسأله ۳-۶۵ قبل از آنکه ناگهان در معرض $h = 100\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و $T_\infty = 0^\circ C$ قرار بگیرد، برابر $100^\circ C$ است. خواص را به صورت $k = 2\ \frac{W}{m.^\circ C}$ و $\alpha = 7\times10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$ بگیرید. (الف) پخش دمای حالت پایدار را با تحلیل گذرایی که زمان آن طولانی است و (ب) پخش دما را در مدت تقریباً نصف زمان "طولانی" تعیین کنید.

۴-۱۱۴ دو قاعده مخروط ناقص مسأله ۲-۱۰۹ عایق‌شده و دمای اولیه و یکنواخت آنها $20^\circ C$ است. در حالی که قاعدهٔ بزرگ در دمای $20^\circ C$ است. دمای قاعده کوچک ناگهان تا $320^\circ C$ بالا برده می‌شود. برای پیش‌بینی پخش دما در این مخروط ناقص به صورت تابعی از زمان، یک مدل ۵ گره تشکیل داده، محاسبات را انجام دهید. محاسبه را تا حالت پایدار ادامه داده، با نتایج تحلیلی مسأله ۲-۱۱۰ مقایسه کنید.

۴-۱۱۵ دمای اولیه و یکنواخت جسم جامد یک‌بعدی مسأله ۲-۱۰۸ برابر $20^\circ C$ است و در حالی که یک سر آن در این دما ثابت می‌ماند، دمای سر دیگر ناگهان تا $70^\circ C$ بالا برده می‌شود. برای پیش‌بینی پخش دما در قطعهٔ استوانه‌ای به صورت تابعی از زمان و زاویهٔ شعاعی θ، مدلی پنج نقطه‌ای تشکیل دهید و محاسبات را انجام داده، تا حالت پایدار ادامه دهید و آن را با نتایج تحلیلی مسأله ۲-۱۰۸ مقایسه کنید.

۴-۱۱۶ دمای اولیه و یکنواخت قطعهٔ استوانه‌ای عایق نشدهٔ مسأله ۲-۱۱۶ برابر $100^\circ C$ است و ناگهان در معرض محیط جابه‌جایی به دمای $30^\circ C$ قرار می‌گیرد در حالی که دمای یک سر قطعه در $100^\circ C$ می‌ماند. دمای سر دیگر ضمن آن که قطعه در معرض محیط جابه‌جایی است تا $50^\circ C$ پایین آورده می‌شود. با استفاده از پنج نقطه در زاویهٔ θ، مدلی عددی تشکیل دهید و از آن برای پیش‌بینی رفتار دمایی به صورت تابعی از زمان استفاده کنید. محاسبات را اجرا و تا حالت پایدار ادامه داده، آن را با نتایج تحلیلی مسأله ۲-۱۱۶ مقایسه کنید.

۴-۱۱۷ معیار ظرفیت فشردهٔ معادلهٔ (۴-۶) یعنی $\left[\frac{h\left(\frac{V}{A}\right)}{k} < 0/1\right]$ را در مورد هر یک از اشکال هندسی بررسی شده با نمودارهای هیسلر، به کار ببرید. اگر ظرفیت فشرده برای شرایط معادلهٔ (۴-۶) فرض می‌شود، تقریباً چه درصد خطایی در مقدار $\frac{\theta}{\theta_0}$ برای هر شکل به وجود می‌آید.

۴-۱۱۸ گرادیان دما $\frac{\partial T}{\partial x}$ در خط مرکزی صفحهٔ نامحدود، وقتی که دو طرف آن در معرض همان شرط مرزی فرآیند سرد کردن قرار گیرد، به دلیل وجود تقارن برابر صفر می‌شود. این را می‌توان به این نحو تفسیر کرد که نیمی از صفحه مثل صفحه یک طرف عایق‌شده عمل می‌کند. $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 0\right)$ و از نمودارهای هیسلر می‌توان برای حل مسائلی با این شرط مرزی استفاده کرد. فرض کنید صفحه‌ای آلومینیومی به ضخامت $5\,cm$ و به دمای اولیه و یکنواخت $200^\circ C$ در ماده عایقی قرار داده شده است. سطح روبساز صفحه ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی با $h = 5000\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و $T_\infty = 25^\circ C$ قرار می‌گیرد. چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای سطح پشتی این صفحه به $90^\circ C$ برسد.

۴-۱۱۹ مسأله ۴-۱۱۸ را دوباره برای حالتی حل کنید که ناگهان دمای سطح به $25^\circ C$ پایین آورده می‌شد و این معادل با $h \to \infty$ است.

۴-۱۲۰ مسأله ۴-۱۱۸ را دوباره با این فرض حل کنید که صفحه مثل ظرفیت فشرده عمل کند.

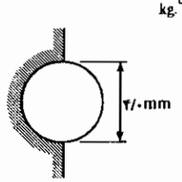
۴-۱۲۱ مسأله ۴-۱۱۸ را دوباره با این فرض حل کنید که صفحهٔ آلومینیومی مثل جسم یک طرف نامحدود عمل می‌کند و دمای مطلوب در $x = 5\,cm$ اتفاق می‌افتد. همین نوع محاسبه را برای مسأله ۴-۱۱۹ اجرا کنید.

۴-۱۲۲ جاده‌ای خصوصی از جنس بتن در روز گرمی به دمای اساساً یکنواخت $30^\circ C$ می‌رسد. باد سردی می‌وزد و جاده ناگهان در معرض مرز جابه‌جایی با $h = 23\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و $T_\infty = 0^\circ C$ قرار می‌گیرد. چه مدت طول می‌کشد تا دمای سطح جاده تا $5^\circ C$ افت کند؟ مسأله را با استفاده از فرض‌های مختلف به دو راه حل کنید.

مسائل طراحی

۴-۱۲۳ دمای اولیهٔ کبابی ۵ پوندی برابر $70^\circ F$ است و در اجاقی به دمای $350^\circ F$ قرار داده می‌شود. به فرض ضریب انتقال گرما $2/5\ \frac{Btu}{h.ft^2.^\circ F}$ و خواص گرمایی کباب را بتوان تقریباً با آب یکی گرفت، زمان لازم را برای رسیدن دمای مرکز کباب به $200^\circ F$ تعیین کنید.

۴-۱۲۴ سیم شکل زیر از جنس فولاد ضدزنگ و به قطر $4/0\,mm$ و به دمای اولیهٔ $20^\circ C$ است و ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای $20^\circ C$ قرار می‌گیرد که h آن را می‌توان $200\ \frac{W}{m^2.^\circ C}$ در نظر گرفت. به ایـــــن سیم جریان برقی داده می‌شود به طوری که در آن گرمای داخلی یکنواختی به میزان $500\ \frac{MW}{m^3}$ تولید می‌شود. سمت چپ سیم مثل شکل عایق‌شده است. معادلات گرهی و نیاز پایداری برای محاسبهٔ دما در سیم را به صورت تابعی از زمان با استفاده از نمونهای $\Delta r = 0/5\,mm$ و $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$ به‌دست آورید. خواص فولاد ضدزنگ به صورت $k = 16\ \frac{W}{m.^\circ C}$، $\rho = 7800\ \frac{kg}{m^3}$ و $c = 0/46\ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ است.

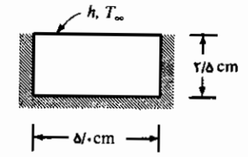


شکل م ۴-۱۲۴.

۴-۱۲۵ برنامه‌ای کامپیوتری برای حل مثال ۴-۱۵ برای خواص مختلف مادهٔ جسم بنویسید. $T(N)$ را دمای گره N در شروع نمو زمانی، $TP(N)$ را دمای گره در پایان نمو زمانی، X را تعداد گره‌ها، W را عرض صفحه، TA را دمای سیال سمت چپ، HA را ضریب جابه‌جایی سیال سمت چپ، TB را دمای سیال سمت راست، HB را ضریب جابه‌جایی سیال سمت راست، DT را نمو زمانی، C را گرمای ویژه، D را چگالی، K را

ضریب هدایت گرمایی، Q را آهنگ تولید گرمای واحد حجم و TI را کل زمان در نظر بگیرید. برنامه را طوری بنویسید که کاربر بتواند به سادگی آن را برای زمان‌های جدید، دوباره به کار انداخته، نتایج را هر بار چاپ کند.

۴-۱۲۶ دمای اولیه و یکنواخت صفحهٔ فولادی ضدزنگ شکل زیر برابر ۱۵۰°C است و ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای ۳۰°C و $h = ۱۷ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ قرار می‌گیرد. با استفاده از روش‌های عددی، زمان لازم را برای رسیدن دما در عمق ۶/۴ mm به ۶۵°C حساب کنید.



شکل م ۴-۱۲۶.

۴-۱۲۷ مسأله ۴-۱۲۶ را در حالی که سطح بالایی نیز به طریق تابش و طبق فرمول زیر گرما از دست دهد تکرار کنید.

$$q_{\text{تابش}} = \sigma A \varepsilon (T^{۴} - T_{\infty}^{۴})$$

T به درجه کلوین

$\sigma = ۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸} \frac{W}{m^{۲}.K^{۴}}$

$\varepsilon = ۰/۷$

محاسبه را برای ۱۰ و ۲۰ دقیقه تکرار کنید.

۴-۱۲۸ با استفاده از محیط جابه‌جایی هوا با $h = ۴۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ و $T_{\infty} = ۰°C$ پرتقال‌هایی به قطر حدود ۳ اینچ از دمای اتاق به دمای ۲۵°C تا دمای ۳°C خنک می‌شود. به فرض پرتقال‌ها خواص آب ۱۰°C را داشته باشند، زمان لازم برای سرد کردن و کل بار سرمایی لازم برای ۱۰۰ پرتقال را حساب کنید.

۴-۱۲۹ آهنگ سرد کردن در صنعت فرابری غذایی اهمیت زیادی دارد. در نوعی پخت پیتزا، فوران‌های هوای گرم به دمای ۲۰۰°C می‌تواند به ضریب انتقال گرمای $h = ۷۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ برسد. فرض کنید که فوران‌ها به هر دو طرف لایه پیتزا به ضخامت ۱/۲ cm و دمای اولیه و یکنواخت ۲۵°C می‌خورد چه مدت طول می‌کشد تا دمای مرکز پیتزا به ۱۰۰°C برسد؟ خواص پیتزا را مثل آب در نظر بگیرید.

$\left(\alpha = ۱/۵ \times ۱۰^{-۷} \frac{m^{۲}}{s}, k = ۰/۶ \frac{W}{m.°C}\right)$.

۴-۱۳۰ انبار سردی به ابعاد ۱۶×۳۵ m روی کفی بتنی به ضخامت ۱۵ cm ساخته شده که روی ماده عایق مناسبی مماس بستر زمین قرار دارد. فضای داخل انبار در شروع راه‌اندازی در معرض هوای جابه‌جایی با $h = ۲۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ و $T = -۱۵°C$ است. دمای کف را می‌توان +۱۵°C گرفت. هدف طرح رسیدن به دمای حالت پایدار ۰°C در سطح داخلی کف بتنی است. مواد عایق و ضخامت‌های مختلف را بررسی و انتخابی را توصیه کنید که با آن می‌توان در مدت زمانی معقول به منظور فوق دست یافت. در این طراحی فقط کف بتنی ساختمان را به حساب آورید.

۴-۱۳۱ پرسی را برای گرم کردن و چسباندن لایه‌های پلاستیکی طراحی کرده‌اند. پیشنهاد شده است که از صفحه فولادی به ابعاد ۶۰ × ۳۰ cm استفاده شود که با چگالش بخار در کانال‌های داخل آن تا ۱۰۰°C گرم می‌شود. سپس این صفحه در تماس با لایه‌های پلاستیکی به ضخامت ۲/۰ mm قرار می‌گیرد که در ۵۰°C به هم چسبانده می‌شود. به فرض این پلاستیک خواص پلی‌وینیل‌کلراید را دارا باشد، در مورد این طرح اظهار نظر کرده، زمان لازم برای رسیدن به دمای چسباندن را حساب کنید. تمام فرض‌ها را به روشنی بیان کنید.

۴-۱۳۲ ورقی از جنس پلی اتیلن و به ضخامت ۲/۰ mm روی تخته فیبری با چگالی بالا به ضخامت ۱۰ cm را که طرف پشت آن کاملاً عایق است می‌پوشاند. دمای اولیه و یکنواخت این مجموعه برابر ۲۰°C است. اگر سطح خارجی پلاستیک ناگهان در معرض شار گرمایی ثابت $۱۳۰۰ \frac{W}{m^{۲}}$ قرار گیرد، چه مدت طول می‌کشد تا دمای سطح پشت عایق‌شده به ۵۰°C برسد. فرض‌های خود را بیان کنید.

۴-۱۳۳ جابه‌جایی آزاد در هوا در فشار جو دارای ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی است که به صورت $h = A(\Delta T)^{n}$ تغییر می‌کند و ΔT اختلاف دمای سطح و هوای محیط، A یک ثابت و n نماست. از شما خواسته می‌شود که راهی برای تعیین ثابت و نمای این معادله با استفاده از آزمایشی همراه با تحلیل ظرفیت فشرده ارائه کنید. سطح پره‌دار پیچیده‌ای مثل شکل ۲-۱۳ در نظر بگیرید که جرم، جنس پره و مساحت سطح آن را بتوان تعیین کرد. این سازه در اجاق مناسبی تا دمای اولیه و یکنواختی گرم و سپس در معرض هوای اتاق به دمای حدود ۲۰°C خنک می‌شود. دمای اولیه را می‌توان حدود ۲۰۰°C گرفت. دمای این ساده با ترموکوپلی که در داخل آن قرار دارد اندازه‌گیری و روی وسیلهٔ قرائتی نمایش داده می‌شود. این سازه با رنگ سیاه پوشیده شده به طوری که مثل جسم سیاه ایده‌آل تابش کرده، با فضای بسته بزرگ مطابق معادله (۱-۱۲) با $\varepsilon = ۱/۰$ مبادله گرما می‌کند. می‌دانید که دماها در این معادله باید به درجهٔ کلوین باشد. معادلهٔ تفاضل محدودی برای سرد کردن این سازه نوشته و اتلاف جابه‌جایی و تابش هر دو را به حساب بیاورید و چگونگی استفاده از داده‌های ناشی از آزمایش سرد کردن جسم برای تعیین ثابت A و نمای n را توضیح دهید.

۴-۱۳۴ می‌خواهیم صندوق نسوزی را طراحی کنیم که آتشی به دمای ۶۰۰°C را به مدت یک ساعت تحمل کند و دمای محتویات آن در این مدت زیر ۱۶۰°C بماند. پوسته داخلی و خارجی صندوق باید از فولاد کربن یک درصد باشد و بین آنها عایق مناسبی قرار داده شود. حجم داخلی صندوق و عایقی که بتواند این دماها را تحمل کند انتخاب کنید. با تحلیل مناسبی، ضخامت پوسته و مواد عایق مورد نیاز برای رسیدن به اهداف دمایی این طراحی را تعیین کنید.

❑ مراجع

1 Schneider, P.J. : "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.

2 Heisler, M.P. : Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating, *Trans. ASME*, vol. 69, pp.227-236,1947.

3 Abramowitz, M., and I. Stegun (eds.): Handbook of Mathematical Functions, NBS AMS 55, U.S. Government Printing Office, 1964.

4 Dusinberre, G.M.: "Heat Transter Calculations by Finite Differences," International Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.

5 Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

6 Gröber, H., S. Erk, and U. Grigull: "Fundamentals of Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

7 Schneider, P. J.: "Temperature Response Charts," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

8 Schenck, H.: "Fortran Methods in Heat Flow," The Ronald Press Company, New York, 1963.

9 Richardson, P.D., and Y.M. Shum: Use of Finite-Element Methods in Solution of Transient Heat Conduction Problems, *ASME Pap.* 69-WA/HT-36.

10 Emery, A. F., and W. W. Carson: Evaluation of Use of the Finite Element Method in Computation of Temperature, *ASME Pap.* 69-WA/HT-38.

11 Wilson, E. L., and R. E. Nickell: Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, *Nucl. Eng. Des.* vol. 4, pp. 276-286, 1966.

12 Zienkiewiez, O. C.: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

13 Myers, G.E.:"Conduction Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

14 Arpaci, V. S.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.

15 Ozisik, M. N.: "Boundary Value Problems of Heat Conduction," International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.

16 Langston, L. S. : Heat Transfer from Multidimensional Objects Using One-Dimensional Solutions for Heat Loss, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 25, p. 149, 1982.

17 Colakyan, M., R. Turton, and O. Levenspiel: Unsteady State Heat Transfer to Variously Shaped Objects, *Heat Transfer Engr.*, vol. 5, p. 82, 1984.

18 Chapra, S. C., and R. P. Canale: "Numerical Methods for Engineers," 2d ed., McGraw-Hill, 1988.

19 Constantinides, A.: "Applied Numerical Methods with Personal Computers," McGraw-Hill, 1987.

20 Patankar, S. V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere Publishing, 1980.

21 Minkowycz, W. J., E. M. Sparrow, G. E. Schneider, and R. H. Pletcher: "Handbook of Numerical Heat Transfer," Wiley, 1988.

۵

اصول جابه‌جایی

❑ ۵-۱ مقدمه

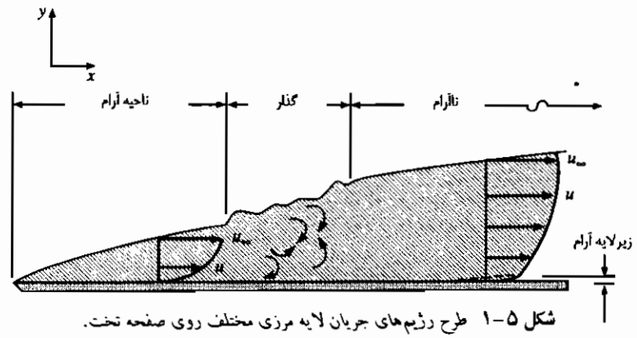
در فصول قبل سازوکار و محاسبه انتقال گرمای هدایتی را بررسی کردیم. تا اینجا جابه‌جایی را فقط از نظر شرایط مرزی اعمال شده در مسأله هدایت بررسی کردیم. اکنون می‌خواهیم روش‌های محاسبه انتقال گرمای جابه‌جایی و به ویژه طرق پیش‌بینی مقدار ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی h را بررسی کنیم. در انتقال گرمای جابه‌جایی لازم است موازنه انرژی را بنویسیم و مسأله را از نظر دینامیک سیالات تحلیل کنیم. در این فصل نخست در مورد بعضی روابط ساده دینامیک سیالات و تحلیل لایه مرزی بحث می‌کنیم که برای درک اساسی انتقال گرمای جابه‌جایی مهم است. سپس موازنه انرژی سیستم جریان را می‌نویسیم و تأثیر جریان را بر گرادیان‌های دمای سیال تعیین می‌کنیم. در انتها، پس از کسب دانش در مورد پخش دما، آهنگ انتقال گرما از سطح گرمایافته به سیالی را که اجباراً روی آن جاری است تعیین می‌کنیم.

بحث این فصل عمدتاً تحلیلی است و فقط سیستم‌های جریان با جابه‌جایی اجباری را بررسی می‌کنیم. روابط تجربی در محاسبه انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری در فصول بعد ارائه شده، انتقال گرمای جابه‌جایی طبیعی و جوش و چگالی نیز در آن جا بررسی می‌شود.

❑ ۵-۲ جریان لزج

جریان روی صفحه تخت را مطابق شکل‌های ۵-۱ و ۵-۲ در نظر بگیرید. با شروع از لبه بالاروند صفحه، ناحیه‌ای به‌وجود می‌آید که در آن تأثیر نیروهای لزج احساس می‌شود. این نیروهای لزجی بر حسب تنش برشی، τ، بین لایه‌های سیال بیان می‌شود. اگر این تنش را متناسب با گرادیان سرعت عمودی بگیریم، معادله لزجت چنین می‌شود:

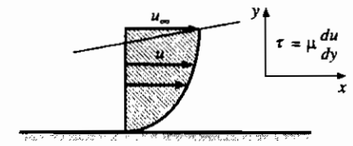
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (۵-۱)$$



شکل ۵-۱ طرح رژیم‌های جریان لایه مرزی مختلف روی صفحه تخت.

ضریب تناسب μ را **لزجت دینامیکی** می‌نامند. مجموعه واحدهای نمونه آن نیوتن - ثانیه بر متر مربع است لزجت واحدهای بسیاری دارد اما برای انتخاب گروه صحیح سازگار با فرمول‌بندی مورد نظر باید دقت کرد.

ناحیه جریانی که از لبه بالاروند صفحه بسط می‌یابد و تأثیرات لزجت در آن مشاهده می‌شود به لایه مرزی موسوم است. برای تعیین موقعیت xکه لایه مرزی در آنجا پایان می‌یابد از نقطه‌ای اختیاری استفاده می‌شود؛ این نقطه معمولاً به صورت مختص xای انتخاب می‌شود که سرعت در آنجا برابر ۹۹ درصد سرعت جریان آزاد می‌شود.



شکل ۵-۲ نیم‌رخ سرعت آرام روی صفحه تخت.

در ابتدا بسط لایه مرزی آرام است ولی در فاصله‌ای بحرانی از لبه بالاروند، بسته به میدان جریان و خواص سیال، در جریان آشفتگی‌های کوچکی شروع به قوی شدن کرده، فرآیند گذرا صورت می‌گیرد تا جریان ناآرام شود. ناحیه جریان ناآرام را می‌توان به صورت تکان خوردن شدید تصادفی همراه با پس و پیش رفتن تکه‌های سیال در تمام جهات مجسم کرد. انتقال از جریان آرام به ناآرام وقتی صورت می‌گیرد که:

$$\frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} > ۵ \times ۱۰^۵$$

که u_∞ = سرعت جریان آزاد

x = فاصله از لبه بالاروند

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = لزجت سینماتیکی.

این گروه جملات خاص را عدد رینولدز می‌نامند و اگر واحد همهٔ خاصه‌ها در دستگاه واحد یکسانی باشد، کمیتی بی‌بعد است:

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \qquad (۵-۲)$$

عدد رینولدز بحرانی برای گذار روی صفحه تخت را در اکثر تحلیل‌ها معمولاً ۵×۱۰^۵ می‌گیرند، این عدد در موقعیت عملی شدیداً به شرایط زبری سطح و «میزان ناآرامی» جریان آزاد بستگی دارد. حدود معمول عدد رینولدز برای شروع عمل گذار بین ۵×۱۰^۵ و $۱۰^۶$ است. عمل گذار در آشفتگی‌های خیلی بزرگ موجود در جریان ممکن است با عدد رینولدز $۱۰^۵$ شروع و برای جریان‌های کاملاً بی‌افت‌وخیز از $Re = ۲ \times ۱۰^۶$ و یا بیش‌تر، شروع می‌شود. در حقیقت فرآیند گذار محدوده‌ای از اعداد رینولدز را در بر می‌گیرد. پس از تکمیل فرآیند گذار، جریان ناآرام گسترش می‌یابد. جریان ناآرام معمولاً به ازای اعداد رینولدزی دیده می‌شود که دو برابر اعداد رینولدز شروع فرآیند گذارند.

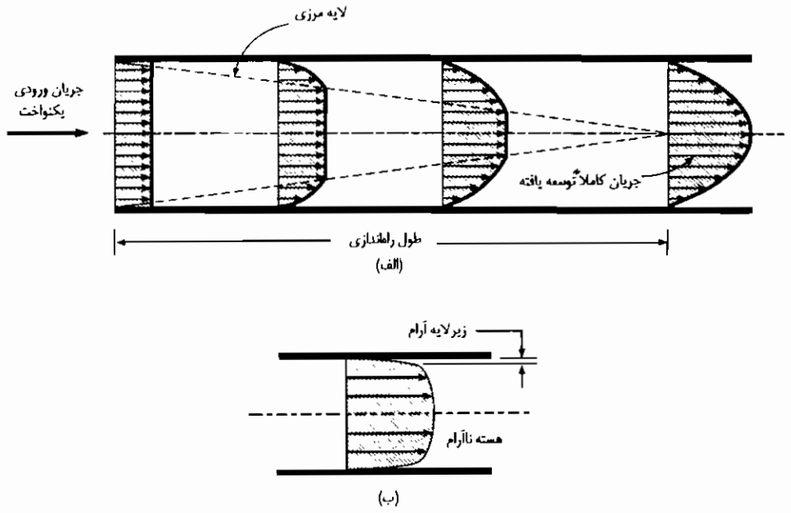
شکل‌های نسبی نیم‌رخ‌های سرعت جریان آرام و ناآرام را در شکل ۵-۱ می‌بینید. نیم‌رخ آرام تقریباً سهمی است در حالی که نیم‌رخ ناآرام در نزدیکی دیواره دارای قطعه‌ای خیلی نزدیک به خطی است. این قطعه خطی از زیرلایه آرامی ناشی می‌شود که خیلی تنگ به سطح مزبور می‌چسبد. نیم‌رخ سرعت در بیرون این زیرلایه، در مقایسه با نیم‌رخ آرام، نسبتاً تخت است.

سازوکار فیزیکی لزجت، مبادله اندازه حرکت است. وضعیت جریان آرام را در نظر بگیرید. ملکول‌ها از قشری به دیگری رفته و اندازه حرکت متناظر سرعت جریان را با خود حمل می‌کنند. انتقال اندازه حرکت نابی از مناطق سرعت بالا به مناطق سرعت پایین وجود دارد که موجب نیرویی در جهت جریان می‌شود. این نیرو تنش برشی - لزجی است که از معادله (۵-۱) محاسبه می‌شود.

آهنگ انتقال اندازه حرکت به آهنگ حرکت ملکول‌ها در عرض لایه‌های سیال بستگی دارد. ملکول‌های گاز با سرعت متوسطی که متناسب با ریشه دوم دمای مطلق است به این‌طرف و آن‌طرف می‌روند زیرا دما را در نظریه جنبشی گازها با انرژی جنبشی متوسط ملکول مشخص می‌کنیم. هر چه ملکول‌ها سریع‌تر حرکت کنند اندازه حرکت بیش‌تری انتقال می‌دهند. پس باید انتظار داشت که لزجت گاز تقریباً متناسب با ریشه دوم دما باشد و این امر در تجربه هم به خوبی مورد تأیید قرار می‌گیرد. لزجت بعضی از سیالات نمونه در پیوست A داده شده‌اند.

دیگر در منطقه جریان ناآرام، لایه‌های مجزای سیال ملاحظه نمی‌شود و مجبوریم مفهوم تا حدی متفاوت برای کنش لزجی جستجو کنیم. اگر به جای حمل میکروسکوپی بر پایهٔ ملکول‌های منفرد تصور کنیم که تکه‌های ماکروسکوپی سیال انرژی و اندازه حرکت حمل می‌کنند، فرآیند جریان ناآرام بهتر درک می‌شود. طبیعی است انتظار داشته باشیم که جرم بزرگ‌تر اجزای ماکروسکوپی سیال، انرژی و اندازه حرکت بیش‌تری را انتقال دهند تا ملکول‌های منفرد و همچنین باید در جریان ناآرام انتظار نیروی برشی - لزجی بزرگ‌تری را داشته باشیم تا در جریان آرام (و به همین ترتیب ضریب هدایت گرمایی بزرگ‌تر). تجربه تأیید می‌کند که کنش لزجی بزرگ‌تر در جریان ناآرام است که موجب تخت شدن نیم‌رخ سرعت شکل ۵-۱ می‌شود.

جریان در لوله را به‌صورت شکل ۵-۳ در نظر بگیرید. یک لایه مرزی مطابق شکل در مدخل لوله ظاهر می‌شود. گاهی لایه مرزی کل لوله را پر می‌کند و می‌گویند سیال کاملاً توسعه‌یافته است.



شکل ۵-۳ نیم‌رخ سرعت برای (الف) جریان آرام در لوله و (ب) جریان ناآرام در لوله.

اگر جریان آرام باشد، مثل شکل (۵-۳ الف) نیم‌رخ سرعت به‌صورت سهمی است. وقتی جریان ناآرام باشد، مثل شکل (۵-۳ب) نیم‌رخ تا حدودی بی‌نوک‌تری مشاهده می‌شود. در لوله، باز هم از عدد رینولدز به عنوان معیار آرام و ناآرام بودن جریان استفاده می‌شود. به‌ازای:

$$Re_d = \frac{u_m d}{\nu} > ۲۳۰۰ \qquad (۵-۳)$$

معمولاً جریان ناآرام مشاهده می‌شود.

باز هم برای فرآیند گذار، محدوده‌ای از اعداد رینولدز وجود دارد که به زبری لوله و همواری جریان بستگی دارد. محدوده برای گذار چنین است:

$$۲۰۰۰ < Re_d < ۴۰۰۰$$

گرچه در شرایط دقیقاً کنترل شده آزمایشگاهی تا اعداد رینولدز ۲۵۰۰۰ جریان آرام به‌وجود آمده است.

رابطهٔ پیوستگی جریان یک بعدی در لوله چنین است:

$$\dot{m} = \rho u_m A \qquad (۵-۴)$$

که $\dot{m}$ = آهنگ جریان جرم

u_m = سرعت متوسط

A = مساحت مقطع

سرعت جرمی را چنین تعریف می‌کنیم.

$$G = \text{سرعت جرمی} = \frac{\dot{m}}{A} = \rho u_m \qquad (۵-۵)$$

بنابراین عدد رینولدز را می‌توان چنین نوشت:

$$Re_d = \frac{Gd}{\mu} \qquad (۵-۶)$$

گاهی استفاده از معادلهٔ (۵-۶) راحت‌تر از معادلهٔ (۵-۳) است.

❑ ۵-۳ جریان غیر لزج

با وجودی که هیچ سیال واقعی غیر لزج نیست، بعضی مواقع می‌توان سیال را غیر لزج در نظر گرفت و ارائه بعضی از معادلاتی که در این حالات به‌کار می‌روند ارزنده است. مثلاً در مسألهٔ صفحه تخت بالا جریان در فاصله‌ای به حد کافی دور از صفحه مثل سیستم جریان غیر لزج رفتار می‌کند. علت این رفتار آن است که گرادیان‌های سرعت عمود بر جهت جریان خیلی کوچک است و از این‌رو نیروهای برشی - لزجی کوچک‌اند.

اگر موازنه نیرو را روی جزء سیال غیر متراکم بنویسیم و این نیروها را مساوی تغییر اندازه حرکت جزء سیال قرار دهیم، معادله برنولی جریان در طول خط جریان به‌دست می‌آید:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{۱}{۲}\frac{V^۲}{g_c} = \text{ثابت} \qquad (۵-۷ \text{الف})$$

یا به‌صورت دیفرانسیلی زیر:

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{V\,dV}{g_c} = ۰ \qquad (۵-۷ \text{ب})$$

که ρ = چگالی سیال

p = فشار در نقطه‌ای خاص در جریان

V = سرعت جریان در آن نقطه

گاهی معادله برنولی را به عنوان معادله انرژی در نظر می‌گیرند زیرا جمله $\frac{V^۲}{۲g_c}$ نماینده انرژی جنبشی و فشار، نشان دهندهٔ انرژی پتانسیل است؛ گرچه باید به خاطر داشت که این جملات بر پایه تحلیل دینامیکی به‌دست آمده‌اند و در نتیجه معادلهٔ مزبور اساساً

معادله دینامیکی است. در حقیقت، مفهوم انرژی جنبشی بر پایه تحلیل دینامیکی استوار است.

وقتی سیال قابل تراکم باشد، باید معادله انرژی‌ای نوشت که در آن تغییرات انرژی گرمایی داخلی سیستم و تغییرات دمایی متناظر با آن نیز در نظر گرفته شده باشد. این معادله برای سیستم جریان یک‌بعدی، معادله انرژی جریان پایدار حجم‌کنترلی است:

$$i_1 + \frac{1}{2g_c} V_1^2 + Q = i_2 + \frac{1}{2g_c} V_2^2 + Wk \qquad (۸-۵)$$

که i آنتالپی است و چنین تعریف می‌شود:

$$i = e + pv \qquad (۹-۵)$$

که e = انرژی داخلی

Q = گرمای اضافه شده به حجم کنترلی

Wk = کار خارجی ناب انجام شده در این فرآیند

v = حجم ویژه سیال

(نماد h را که معمولاً برای نشان دادن آنتالپی به‌کار می‌رود برای جلوگیری از اشتباه شدن آن با ضریب انتقال گرما با نماد i جای‌گزین می‌کنیم). زیرنویس‌های ۱ و ۲ مربوط به شرایط ورود و خروج از حجم کنترلی‌اند. برای محاسبه افت فشار در سیال قابل تراکم لازم است معادله حالت سیال را مشابه گاز کامل مشخص کنیم:

$$p = \rho RT \qquad \Delta e = c_v \, \Delta T \qquad \Delta i = c_p \, \Delta T$$

ثابت گازِ یک گازِ خاص، برحسب ثابت عمومی گازها $\mathscr{R}$ چنین ارائه می‌شود:

$$R = \frac{\mathscr{R}}{M}$$

که M وزن ملکولی و $\mathscr{R} = 8314/5 \frac{\text{J}}{\text{kg.mol .K}}$ است. خواص فیزیکی گاز کامل مناسب برای هوا عبارتند از:

$$R_{\text{هوا}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg .K}} \qquad c_{p,\,\text{هوا}} = 1/005 \frac{\text{kJ}}{\text{kg .°C}}$$

$$c_{v,\,\text{هوا}} = 0/718 \frac{\text{kJ}}{\text{kg .°C}}$$

برای حل یک مسأله خاص باید فرآیند را نیز مشخص کنیم. مثلاً در جریان بی‌دررو برگشت‌پذیر در شیپوره، روابط آشنای زیر وجود دارد که خواص در نقطه‌ای از جریان را با عدد ماخ و خواص رکود، یعنی خواص به‌ازای سرعت صفر را به هم مرتبط می‌سازد:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{(\gamma-1)}}$$

که T_0, p_0, ρ_0 = خواص رکود

γ = نسبت گرماهای ویژه $\frac{c_p}{c_v}$

M = عدد ماخ

$$M = \frac{V}{a}$$

که a سرعت موضعی صوت است و می‌توان آن‌را از فرمول زیر و برای گاز کامل* محاسبه کرد:

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT} \qquad (۱۰-۵)$$

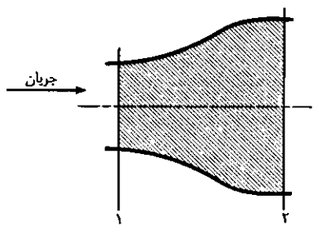
این معادله برای هوایی که به‌صورت گاز کامل رفتار می‌کند چنین می‌شود:

$$a = 20/045\sqrt{T} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (۱۱-۵)$$

که T به درجه کلوین است.

مثال ۵-۱ آب جاری در وافشانه

آب به‌دمای ۲۰°C با $8 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ در وافشانه شکل زیر جریان دارد. قطر در مقطع ۱ برابر ۳/۰ cm و در مقطع ۲ برابر ۷/۰ cm است. افزایش فشار استاتیکی بین مقاطع ۱ و ۲ را معین کنید. جریان را بدون اصطکاک فرض کنید.



شکل م ۵-۱.

حل :

مساحت‌های مقطع جریان عبارتند از:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(0/03)^2}{4} = 7/069 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi(0/07)^2}{4} = 3/848 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

چگالی آب در ۲۰°C برابر $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ است و بنابراین می‌توانیم سرعت‌ها را از رابطهٔ پیوستگی جرم حساب کنیم:

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

$$u_1 = \frac{8/0}{(1000)(7/069 \times 10^{-4})} = 11/32 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \left[37/1 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right]$$

$$u_2 = \frac{8/0}{(1000)(3/848 \times 10^{-3})} = 2/079 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \left[6/82 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right]$$

* فرمول‌های جریان هم‌آنتروپی از مرجع ۷ صفحهٔ ۶۲۹ گرفته شده‌اند.

اختلاف فشار را از معادله برنولی (۵-۷الف) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1}{2g_c}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1000}{2}[(11/32)^2 - (2/079)^2]$$

$$= 61/91 \text{kPa} \qquad \left[\text{مطلق } 8/98 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\right]$$

مثال ۵-۲ انبساط بی‌در رو هوا

هوای به‌دمای ۳۰۰°C و فشار ۰/۷ MPa به‌طور هم‌آنتروپی از مخزنی بیرون آمده، منبسط می‌شود و سرعتش به $300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌رسد. دما، فشار استاتیک و عدد ماخ هوا را در شرایط سرعت بالا به‌دست آورید. برای هوا $\gamma = 1/4$ است.

حل :

می‌توانیم معادله انرژی جریان پایدار را چنین بنویسیم:

$$i_1 = i_2 + \frac{u_2^2}{2g_c}$$

زیرا سرعت اولیه کم و فرآیند بی‌دررو است. معادله بالا برحسب دما چنین می‌شود:

$$c_p (T_1 - T_2) = \frac{u_2^2}{2g_c}$$

$$(1005)(300 - T_2) = \frac{(300)^2}{(2)(10)}$$

$$T_2 = 255/2°\text{C} = 528/2 \text{ K} \qquad [491/4°\text{F}]$$

می‌توان فشار را از رابطه بی‌دررو زیر حساب کرد:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}$$

$$p_2 = (0/7)\left(\frac{528/2}{573}\right)^{3/5} = 0/526 \text{MPa} \qquad \left[\text{مطلق } 76/3 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\right]$$

سرعت صوت در حالت ۲ برابر است با:

$$a_2 = (20/045)(528/2)^{\frac{1}{2}} = 460/7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \left[1511 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right]$$

بنابراین عدد ماخ برابر است با:

$$M_2 = \frac{u_2}{a_2} = \frac{300}{460/7} = 0/651$$

❑ ۵-۴ لایه مرزی آرام روی صفحه تخت

حجم کنترلی جزئی شکل ۵-۴ را در نظر بگیرید. معادله حرکت لایه مرزی را با موازنه نیرو و اندازه حرکت روی این جزء به‌دست می‌آوریم. برای سادگی تحلیل فرض می‌کنیم که:

۱- سیال، غیرقابل تراکم و جریان پایدار است.

۲- تغییر فشاری در راستای عمود بر صفحه وجود ندارد.

۳- لزجت ثابت است.

۴- نیروهای برشی-لزجی در راستای y قابل صرف‌نظرند.

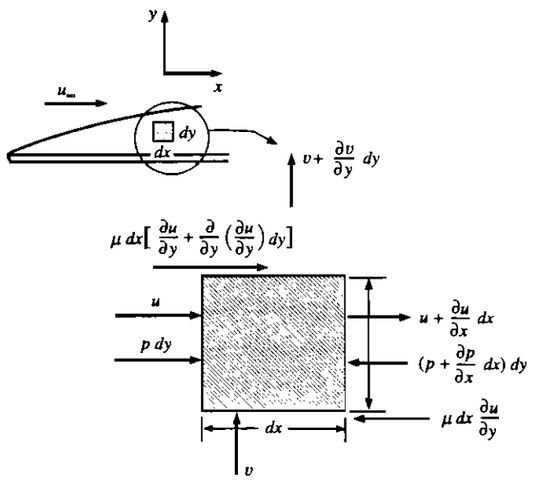
قانون دوم نیوتن در حرکت را به‌کار می‌بریم:

$$\sum F_x = \frac{d\,(mV)_x}{d\tau}$$

قانون دوم نیوتن در حرکت، به شکل بالا، در مورد سیستم با جرم ثابت به کار می‌رود. معمولاً در دینامیک سیالات، کار با اجزای جرم راحت نیست؛ از این‌رو از حجم‌های کنترلی جزئی، مثل شکل ۵-۴ استفاده می‌کنیم. جرم از جوانب این حجم ثابت در فضا، به داخل یا به خارج جریان می‌یابد. موازنه نیرو برای این سیستم را چنین می‌نویسیم:

$$\text{افزایش شار اندازه حرکت در راستای } x = \sum F_x$$

شار اندازه حرکت در راستای x برابر حاصل‌ضرب جریان جرمی در یک وجه خاص حجم کنترلی و مؤلفه x سرعت در آن نقطه است.



شکل ۵-۴ حجم کنترلی جزئی برای موازنه نیرو روی لایه مرزی آرام.

جرم ورودی از وجه سمت چپ این جزء در واحد زمان، با فرض عمق واحد در راستای محور z، برابر است با:

$$\rho u \, dy$$

بنابراین اندازه حرکت ورودی از وجه سمت چپ در واحد زمان برابر است با:

$$\rho u \, dy \, u = \rho u^2 \, dy$$

جریان جرمی خروجی از وجه سمت راست برابر است با:

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy$$

و اندازه حرکت خروجی از وجه سمت راست برابر است با:

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 dy$$

جریان جرمی ورودی از وجه زیرین برابر است با:

$$\rho v\, dx$$

و جریان جرمی خروجی از وجه زبرین برابر است با:

$$\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right) dx$$

موازنه جرمی روی این جزء چنین است:

$$\rho u\, dy + \rho v\, dx = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) dy + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right) dx$$

یا:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (۱۲-۵)$$

این معادله پیوستگی جرم لایه مرزی است.

اندازه حرکت ورودی از وجه زیرین **در راستای محور** xها با مراجعه به تحلیل اندازه حرکت و نیرو برابر است با:

$$\rho v u\, dx$$

و اندازه حرکت بیرون رفته از وجه زبرین در **راستای** xبرابر است با:

$$\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) dx$$

صرفاً اندازه حرکت راستای xها را می‌خواهیم زیرا نیروهای به حساب آمده در این تحلیل در راستای xهستند. این نیروها از برش لزجی و نیروهای فشاری روی این جزء ناشی شده‌اند. نیروی فشار روی وجه سمت چپ $p\, dy$و روی وجه دست راست برابر $[p + (\partial p/\partial x)\, dx]\, dy$- است. بنابراین نیروی فشار خالص در جهت حرکت برابر است با:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy$$

نیروی برش - لزجی روی وجه زیرین برابر است با:

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial y}\, dx$$

و نیروی برشی بر وجه زبرین برابر است با:

$$\mu\, dx \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy\right]$$

نیروی برشی - لزجی خالص در جهت حرکت برابر مجموع مقادیر فوق است:

$$\text{نیروی برشی - لزجی خالص} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dx\, dy$$

با مساوی قرار دادن مجموع نیروهای فشاری و برشی - لزجی با انتقال اندازه حرکت خالص در راستای x داریم:

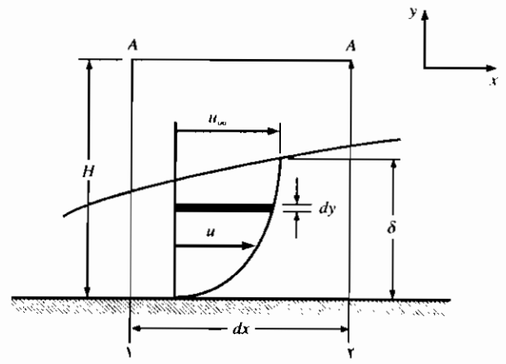
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dx\, dy - \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right)^2 dy - \rho u^2\, dy + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) dx - \rho v u\, dx$$

با ساده کردن جملات و استفاده از رابطه پیوستگی (۱۲-۵) و صرف‌نظر از مشتقات مرتبه دوم، داریم:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (۱۳-۵)$$

این معادله اندازه حرکت لایه مرزی آرام با خواص فیزیکی ثابت است که می‌توان آن را برای بسیاری از شرایط مرزی دقیقاً حل کرد و خواننده می‌تواند به منظور دیدن توضیحات مربوط به روش‌های مختلفی که در این راه‌حل‌ها به کار می‌روند، به مقاله اشلیشتینگ Schlichting[1] مراجعه کند. در پیوست B روش کلاسیک به‌دست آوردن جواب دقیق معادله (۱۳-۵) برای جریان آرام روی صفحه تخت را آورده‌ایم. در بحث این فصل به تحلیل تقریبی راه حل ساده‌تر، بدون آنکه درک فیزیکی این فرآیند نقصان یابد، بسنده می‌کنیم. روش تقریبی مزبور از فون کارمان *von kármán*[2] است.

سیستم جریان لایه مرزی شکل ۵-۵ را در نظر بگیرید. سرعت جریان آزاد در بیرون لایه مرزی u_∞ و ضخامت لایه مرزی δ است.



شکل ۵-۵ حجم کنترلی جزئی برای تحلیل اندازه حرکت انتگرالی لایه مرزی آرام.

می‌خواهیم موازنه اندازه حرکت و نیروی حجم‌کنترلی محصور بین صفحات ۱ و ۲ و A - A و دیوار جامد را بنویسیم. از مؤلفه‌های سرعت در راستای عمود بر دیوار، صرف‌نظر می‌شود و تنها مؤلفه‌های در راستای xرا در نظر می‌گیریم. به فرض حجم کنترلی آن‌قدر بلند است که همواره لایه مرزی را محصور می‌کند؛ یعنی، $H > \delta$.

جریان جرمی از صفحه ۱ برابر است با:

(الف) $$\int_0^H \rho u\, dy$$

جریان اندازه حرکت از صفحه ۱ برابر است با:

(ب) $$\int_0^H \rho u^2\, dy$$

جریان اندازه حرکت از صفحه ۲ برابر است با:

(پ) $$\int_0^H \rho u^2\, dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2\, dy\right) dx$$

و جریان جرمی از صفحه ۲ برابر است با:

(ت) $$\int_0^H \rho u\, dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

با توجه به بقای جرم و اینکه جرمی نمی‌تواند از دیوار جامد به حجم کنترلی وارد شود، اضافه جریان جرم عبارت (ت) نسبت به (الف) باید از صفحه A–A وارد شود. این جریان جرم با خود اندازه حرکتی در راستای محور xانتقال می‌دهد که برابر است با:

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

از این‌رو جریان اندازه حرکت خالص خروجی از حجم‌کنترلی برابر است با:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2\, dy\right) dx - u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

این عبارت را می‌توان با استفاده از فرمول حاصل‌ضرب (از حساب دیفرانسیل) به شکل مفیدتری درآورد:

$$d(\eta\phi) = \eta\, d\phi + \phi\, d\eta$$

یا:

$$\eta\, d\phi = d(\eta\phi) - \phi\, d\eta$$

در عبارت اندازه حرکت فوق، انتگرال:

$$\int_0^H \rho u\, dy$$

تابع ϕاست و u_∞تابع ηاست. بنابراین:

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx = \frac{d}{dx}\left(u_\infty \int_0^H \rho u\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u u_\infty\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx \qquad (۱۴-۵)$$

u_∞را می‌توان در داخل انتگرال قرار داد زیرا تابع yنیست و بنابراین می‌توان این انتگرال را تا زمانی که نسبت به yاست، ثابت در نظر گرفت.

تحلیل را ادامه می‌دهیم. نیروی روی صفحه ۱ برابر نیروی فشاری pHو در روی صفحه ۲ برابر $[p + (dp/dx)\, dx]H$ است. نیروی برشی در دیوار برابر است با:

$$-\tau_w\, dx = -\mu\, dx \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

نیروی برشی در صفحه A–A وجود ندارد زیرا گرادیان سرعت بیرون از لایه مرزی صفر است. با مساوی قرار دادن نیروهای روی جزء با افزایش خالص اندازه حرکت و جمع جمله‌ها داریم:

$$-\tau_w - \frac{dp}{dx} H = -\rho \frac{d}{dx}\int_0^H (u_\infty - u) u\, dy + \frac{du_\infty}{dx}\int_0^H \rho u\, dy \qquad (۱۵-۵)$$

این، معادلهٔ انتگرالیِ اندازه حرکت لایه مرزی است. اگر فشار در سراسر جریان ثابت باشد،

$$\frac{dp}{dx} = 0 = -\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \qquad (۱۶-۵)$$

زیرا فشار و سرعت جریان آزاد با معادله برنولی به‌هم ربط دارند. وقتی فشار ثابت باشد معادلهٔ انتگرالی لایه مرزی چنین می‌شود:

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)\, u\, dy = \tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} \qquad (۱۷-۵)$$

حد بالا در این انتگرال به δ تبدیل شده است زیرا تابع زیر انتگرال به ازای $y > \delta$برابر صفر است چون به ازای $y > \delta$، $u = u_\infty$.

اگر نیم‌رخ سرعت مشخص باشد، می‌توان تابع مناسب را در معادله (۱۷-۵) قرار داد و عبارتی برای ضخامت لایه مرزی به‌دست آورد. در این تحلیل تقریبی، نخست بعضی شرایط راکه تابع سرعت باید به ازای آنها صادق باشد می‌نویسیم:

(الف) $u = 0$ در $y = 0$

(ب) $u = u_\infty$ در $y = \delta$

(پ) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ در $y = \delta$

در حالتی که فشار ثابت است، معادلهٔ (۱۳-۵) چنین می‌شود:

(ت) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ در $y = 0$

زیرا در $y = 0$سرعت‌های uو vبرابر صفرند. فرض می‌کنیم که نیم‌رخ‌های سرعت در xهای مختلف مشابه‌اند؛ یعنی دارای وابستگی تابعی یکسان به مختص xاند. چهار شرط باید برآورده شود. ساده‌ترین تابعی که این شرایط را برآورد، چند جمله‌ای با چهار ثابت دلخواه است. بنابراین:

$$u = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + C_4 y^3 \qquad (۱۸-۵)$$

چهار شرط (الف) تا (ت) را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۱۹-۵)$$

با جای‌گزینی عبارت سرعت در معادلهٔ (۱۷-۵) داریم:

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho u_\infty^2 \int_0^\delta \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy\right\}$$

$$= \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

با انتگرال‌گیری از عبارت فوق داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\rho u_\infty^2 \delta\right) = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

چون ρو u_∞ثابت‌اند، متغیرها را می‌توان جدا کرد و داریم:

$$\delta\, d\delta = \frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho u_\infty} dx = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty} dx$$

و:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140}{13}\frac{\nu x}{u_\infty} + \text{ثابت}$$

در $x = 0$ ، $\delta = 0$ است. بنابراین:

$$\delta = 4/64\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \qquad (5-20)$$

این معادله را می‌توان بر حسب عدد رینولدز چنین نوشت:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4/64}{Re_x^{1/2}} \qquad (5-21)$$

که:

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

جواب دقیق معادلات لایه مرزی پیوست B چنین است:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5/0}{Re_x^{1/2}} \qquad (5-21\text{ الف})$$

مثال ۵-۳ جریان جرم و ضخامت لایه مرزی

هوا به‌دمای $27^\circ C$ و فشار یک اتمسفر با سرعت $2\frac{m}{s}$ روی صفحه تختی جریان دارد. ضخامت لایه مرزی را در فواصل ۲۰ و ۴۰ سانتی متری از لبه بالاروند صفحه محاسبه کنید. جریان جرمی ورودی به لایه مرزی بین $x = 20cm$ و $x = 40cm$ را حساب کنید. لزجت هوا در $27^\circ C$ برابر $1/85 \times 10^{-5}\frac{kg}{m.s}$ است. عمق در راستای محور z را واحد فرض کنید.

حل :

چگالی هوا را چنین حساب می‌کنیم:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{1/0132 \times 10^5}{(287)(300)} = 1/177\frac{kg}{m^3} \qquad \left[0/0737\frac{lb_m}{ft^3}\right]$$

عدد رینولدز را چنین حساب می‌کنیم:

در $x = 20cm$ $\quad Re = \dfrac{(1/177)(2/0)(0/2)}{1/85 \times 10^{-5}} = 27,580$

در $x = 40cm$ $\quad Re = \dfrac{(1/177)(2/0)(0/4)}{1/85 \times 10^{-5}} = 55,160$

ضخامت لایه مرزی از معادله (۵-۲۱) حساب می‌شود:

در $x = 20cm$ $\quad \delta = \dfrac{(4/64)(0/2)}{(27,580)^{1/2}} = 0/00559\ m \quad [0/24\ in]$

در $x = 40cm$ $\quad \delta = \dfrac{(4/64)(0/4)}{(55,160)^{1/2}} = 0/0079\ m \quad [0/4\ in]$

برای محاسبه جریان جرمی ورودی به لایه مرزی از مسیل آزاد بین $x = 20cm$ و $x = 40cm$ تفاوت جریان جرمی در لایه مرزی این دو موقعیت x را در نظر می‌گیریم. جریان جرمی در لایه مرزی در هر x را از انتگرال زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^\delta \rho u\, dy$$

و سرعت از معادله (۵-۱۹) محاسبه می‌شود،

$$u = u_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$

با محاسبه انتگرال به ازای این پخش سرعت داریم:

$$\int_0^\delta \rho u_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \frac{5}{8}\rho u_\infty \delta$$

بنابراین جریان جرمی ورودی به لایه مرزی برابر است با:

$$\Delta m = \frac{5}{8}\rho u_\infty\,(\delta_{2.} - \delta_{2.})$$
$$= \left(\frac{5}{8}\right)(1/177)(2/0)(0/00779 - 0/00559)$$
$$= 3/399 \times 10^{-3}\frac{kg}{s} \qquad \left[7/48 \times 10^{-3}\frac{lb_m}{s}\right]$$

❑ ۵-۵ معادلهٔ انرژی لایه مرزی

در تحلیل قبلی، دینامیک سیالات سیستم جریان لایه مرزی را بررسی کردیم. اکنون معادله انرژی این سیستم را به‌دست می‌آوریم و سپس روش حل انتگرالی آن را بحث می‌کنیم.

حجم کنترلی جزئی شکل ۵-۶ را در نظر بگیرید. برای ساده کردن تحلیل، فرض می‌کنیم که:

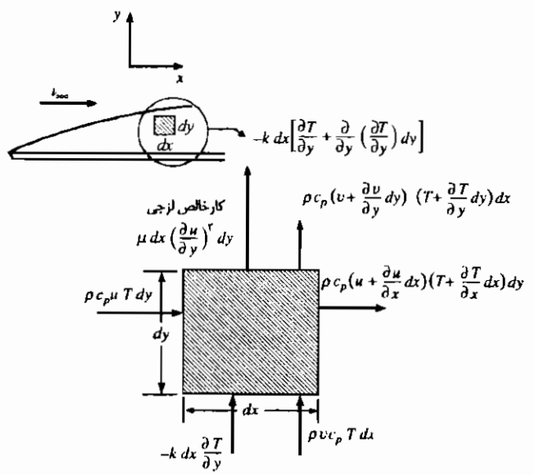
۱- جریان پایدار غیرقابل تراکم است.

۲- لزجت، ضریب هدایت گرمایی و گرمای ویژه ثابت است.

۳- هدایت گرما در جهت جریان (راستای محور x) قابل صرف‌نظر است.

سپس موازنه انرژی را برای جزء نشان داده شده، می‌نویسیم.

انرژی جابه‌جا شده ورودی به وجه چپ + انرژی جابه‌جا شده ورودی به وجه زیرین
+گرمای هدایتی ورودی به وجه زیرین + کار لزجی انجام شده روی جزء
= انرژی جابه‌جا شده به بیرون وجه راست + گرمای جابه‌جا شده به بیرون وجه بالا
+ انرژی جابه‌جا شده به بیرون وجه بالا



شکل ۵-۶ حجم جزئی برای تحلیل انرژی لایه مرزی آرام.

کمیت‌های انرژی جابه‌جایی و هدایتی در شکل ۵-۶ نشان داده شده‌اند و جمله انرژی کار لزجی را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد. کار لزجی عبارت است از حاصل‌ضرب نیروی برشی - لزجی ناب در فاصله‌ای که این نیرو در زمان واحد طی می‌کند. نیروی برشی - لزجی برابر با حاصل‌ضرب تنش برشی در مساحت dx است.

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}\,dx$$

و فاصله‌ای که این نیرو در واحد زمان نسبت به حجم کنترلی جزئی $dx\,dy$ می‌پیماید برابر است با:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

بنابراین انرژی لزجی خالص انتقال یافته به این جزء عبارت است از:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

با نوشتن موازنه انرژی کمیت‌های شکل ۵-۶ و با فرض عمق واحد در راستای محور z و با صرف‌نظر از مشتقات مرتبه دوم داریم:

$$\rho c_p\left[u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dx\,dy + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

با استفاده از رابطه پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (5-12)$$

و با تقسیم طرفین آن بر ρc_p داریم:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (5-22)$$

این معادله انرژی لایه مرزی آرام است. سمت چپ انتقال انرژی خالص به داخل حجم کنترلی و سمت راست مجموع گرمای هدایتی خالص خروجی از حجم کنترلی و کار لزجی خالص انجام شده روی جزء را نشان می‌دهد. جمله کار لزجی فقط هنگام سرعت زیاد اهمیت دارد زیرا مقدار آن در جریان کم سرعت در مقایسه با سایر جملات کوچک است. این موضوع را می‌توان با تحلیل مرتبه بزرگی دو جمله سمت راست معادلهٔ (۵-۲۲) نشان داد. در این تحلیل می‌توانیم سرعت را هم‌مرتبه با سرعت جریان آزاد u_∞ و بعد y را هم‌مرتبه با δ فرض کنیم. بنابراین:

$$u \sim u_\infty \qquad \text{و} \qquad y \sim \delta$$

بنابراین:

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \alpha\frac{T}{\delta^2}$$

$$\frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{\mu}{\rho c_p}\frac{u_\infty^2}{\delta^2}$$

اگر نسبت این کمیت‌ها کوچک باشد، یعنی:

$$\frac{\mu}{\rho c_p \alpha}\frac{u_\infty^2}{T} << 1 \qquad (5-23)$$

اتلاف لزجی در مقایسه با جمله هدایت کوچک می‌شود. حال معادلهٔ (۵-۲۳) را با وارد کردن سنجهٔ زیر آرایش مجدد می‌کنیم:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p\mu}{k}$$

که Pr را عدد پراندل می‌نامیم و در مورد آن بعداً بحث می‌کنیم. معادله (۵-۲۳) چنین می‌شود:

$$Pr\frac{u_\infty^2}{c_p T} << 1 \qquad (5-24)$$

مثلاً جریان هوا با خواص زیر را در نظر بگیرید:

$$u_\infty = 70\frac{m}{s} \qquad T = 20^\circ C = 293K \qquad p = 1atm$$

در این شرایط $c_p = 1005\frac{J}{kg.^\circ C}$ و $Pr = 0/7$ بنابراین:

$$Pr\frac{u_\infty^2}{c_p T} = \frac{(0/7)(70)^2}{(1005)(293)} = 0/012 << 1/0$$

که نشان دهندهٔ کوچکی اتلاف لزجی برای حتی این سرعت جریان بالا $70\frac{m}{s}$ است. بنابراین برای جریان غیرقابل تراکم سرعت پایین داریم:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (5-25)$$

در حقیقت، معادله انرژی حاصل ساده شده و چند جمله به حساب نیامده زیرا در مقایسه با بقیه کوچک بوده است به این ترتیب سریعاً به تقریب لایه مرزی می‌رسیم بدون آنکه برای به‌دست آوردن رابطه ساده شده نهایی به فرآیند حذفی مشکلی متوسل شویم. شکل عمومی معادلهٔ انرژی لایه مرزی بسیار پیچیده و خارج از بحث ماست. خواننده مشتاق باید برای کسب اطلاع بیش‌تر به کتاب‌های اشلیشتینگ [۱] و وایت [۵] مراجعه کند.

بین معادله (۵-۲۵) و معادلهٔ اندازه حرکت در فشار ثابت، تشابه بسیار زیادی وجود دارد:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (5-26)$$

وقتی $\alpha = \nu$ باشد جواب دو معادله دقیقاً یکسان است. بنابراین باید انتظار داشت که بزرگی نسبی پخشیدگی گرمایی و لزجت سینماتیکی تأثیر مهمی بر انتقال جابه‌جایی داشته باشد زیرا این بزرگی‌ها پخش سرعت را با پخش دما مرتبط می‌سازد. دقیقاً مسأله این است و نقشی را که این سنجه‌ها به عهده دارند در بحث بعدی می‌خوانیم.

❑ ۵-۶ لایه مرزی گرمایی

درست مثل تعریف لایه مرزی هیدرودینامیکی به‌عنوان ناحیه‌ای از جریان که نیروهای لزجی در آنجا احساس می‌شود، لایه مرزی گرمایی را می‌توان به عنوان ناحیه‌ای تعریف کرد که در آنجا

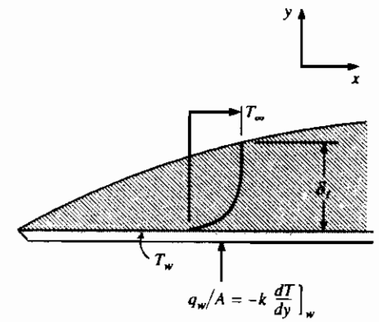
گرادیان‌های دما در جریان وجود دارد. این گرادیان‌های دمایی از مبادله گرما بین سیال و دیوار ناشی می‌شود.

سیستم شکل ۵-۷ را در نظر بگیرید. دمای دیوار T_w، دمای سیال بیرون از لایه مرزی گرمایی T_∞ و ضخامت لایه مرزی گرمایی با δ_t مشخص شده است. سرعت در دیوار صفر است و انتقال گرما به داخل سیال با هدایت صورت می‌گیرد. بنابراین شار گرمای موضعی واحد سطح "q"، برابر است با:

$$\frac{q}{A} = q'' = -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{\text{دیوار}} \qquad (۲۷-۵)$$

از قانون نیوتن در سرمایش [معادلهٔ (۱-۸)] داریم:

$$q'' = h\,(T_w - T_\infty) \qquad (۲۸-۵)$$



شکل ۵-۷ نیم‌رخ دما در لایهٔ مرزی گرمایی.

که h ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی است. با ترکیب این دو معادله داریم:

$$h = \frac{-k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\text{دیوار}}}{T_w - T_\infty} \qquad (۲۹-۵)$$

بنابراین برای ارزیابی ضریب انتقال گرما فقط به گرادیان دما در دیوار نیازمندیم. یعنی باید رابطه‌ای برای پخش دما به‌دست آوریم. برای این منظور، روشی را دنبال می‌کنیم که مشابه روش تحلیل اندازه حرکت لایه مرزی است.

شرایطی که پخش دما باید برآورده سازد عبارتند از:

(الف) $T = T_w$ در $y = 0$

(ب) $\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$ در $y = \delta_t$

(پ) $T = T_\infty$ در $y = \delta_t$

و با نوشتن معادلهٔ (۵-۲۵) در $y = 0$ برای وقتی که گرم شدن لزجی وجود ندارد:

(ت) $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ در $y = 0$

زیرا سرعت‌ها در دیواره باید برابر صفر باشد.

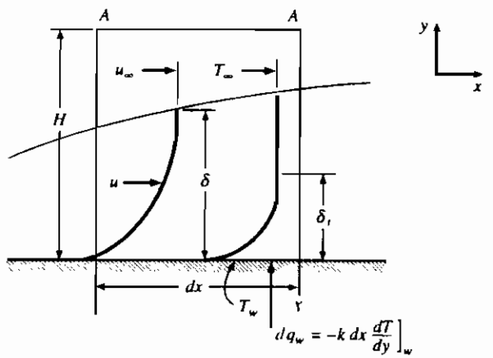
شرایط (الف) تا (ت) را می‌توان در چند جمله‌ای درجه سه، مثل مورد نیم‌رخ سرعت، به‌کار برد. بنابراین:

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad (۳۰-۵)$$

که $\theta = T - T_w$ حال باید رابطه‌ای برای δ_t یعنی ضخامت لایه مرزی گرمایی پیدا کنیم. این رابطه را می‌توان با تحلیل انتگرالی معادله انرژی لایه مرزی به‌دست آورد.

حجم کنترلی احاطه شده بین صفحات ۱، ۲، A–A و دیوار شکل ۵-۸ را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که لایه مرزی گرمایی نازک‌تر از لایه مرزی هیدرودینامیکی باشد. دمای دیوار T_w و دمای جریان آزاد T_∞ و گرمای داده شده به سیال در طول dx برابر dq_w است. می‌خواهیم موازنه انرژی را بنویسیم:

انتقال گرما در دیوار + کار لزجی داخل جزء + انرژی جابه‌جا شده به داخل = انرژی جابه‌جا شده به بیرون (۳۱-۵)



شکل ۵-۸ حجم کنترل برای تحلیل انرژی انتگرالی جریان مرزی آرام.

انرژی جابه‌جا شده به‌داخل از طریق صفحه ۱ برابر است با:

$$\rho c_p \int_0^H uT\,dy$$

و انرژی جابه‌جا شده به بیرون از طریق صفحهٔ ۲ برابر است با:

$$\rho c_p \left(\int_0^H uT\,dy\right) + \frac{d}{dx}\left(\rho c_p \int_0^H uT\,dy\right) dx$$

جریان جرمی ورودی از صفحهٔ A–A برابر است با:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right) dx$$

و این جریان جرمی حامل انرژی زیر است:

$$c_p T_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right) dx$$

کار لزجی خالص انجام شده در داخل این جزء برابر است با:

$$\mu \left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right] dx$$

و انتقال گرما در دیوار برابر است با:

$$dq_w = -k\,dx \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_w$$

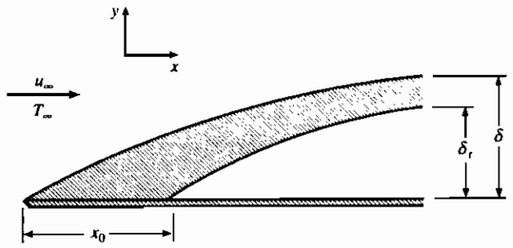
با ترکیب این کمیت‌های انرژی مطابق معادله (۵-۳۱) و جمع جمله‌ها داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)u\,dy\right] + \frac{\mu}{\rho c_p}\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right] = \alpha \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_w \qquad (۳۲-۵)$$

این معادله انرژی انتگرالی لایه مرزی به ازای خواص فیزیکی ثابت و دمای جریان آزاد ثابت T_∞ است.

برای محاسبه میزان انتقال گرما در دیوار باید رابطه‌ای برای ضخامت لایه مرزی گرمایی به‌دست آوریم. این رابطه را می‌توان همراه معادلات (۵-۲۹) و (۵-۳۰) به‌کار برد و ضریب انتقال گرما را تعیین کرد. در اینجا از جمله اتلاف لزجی صرف‌نظر می‌کنیم. این جمله خیلی کوچک است مگر آنکه سرعت میدان جریان خیلی زیاد باشد. محاسبه انتقال گرمای خیلی سریع را بعداً رسیدگی می‌کنیم.

نیازی نیست که صفحه مورد بررسی در کل طول خودش گرما ببیند. موقعیت مورد تحلیل در شکل ۵-۹ نشان داده شده است که در آن، لایه مرزی هیدرودینامیکی از لبه بالاروند صفحه بسط می‌یابد ولی گرمادهی قبل از $x = x_0$ شروع نمی‌شود.



شکل ۵-۹ لایه‌های مرزی گرمایی و هیدرودینامیکی روی صفحه تخت گرم کردن در $x = x_0$ شروع می‌شود.

با جای‌گزینی معادله پخش دما (۵-۳۰) و معادله پخش سرعت (۵-۱۹) در معادلهٔ (۵-۳۲) و صرف‌نظر از جمله اتلاف لزجی داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)\,u\,dy\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^H (\theta_\infty - \theta)\,u\,dy\right]$$

$$= \theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\left[\int_0^H \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy\right\}$$

$$= \alpha \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{y=0} = \frac{3\alpha\,\theta_\infty}{2\delta_t}$$

فرض می‌کنیم که لایه مرزی گرمایی نازک‌تر از لایه مرزی هیدرودینامیکی است. بنابراین فقط به انتگرال‌گیری تا $y = \delta_t$ نیازمندیم زیرا تابع زیر انتگرال به ازای $y > \delta_t$ برابر صفر است. با دستکاری جبری لازم و انتگرال‌گیری و جانشین کردن $\zeta = \delta_t/\delta$ داریم:

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{3}{20}\zeta^2 - \frac{3}{280}\zeta^4\right)\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\delta\zeta} \qquad (۳۳-۵)$$

چون $\delta > \delta_t$ ، $\zeta < 1$ و جمله‌ای که شامل ζ^4 است در مقایسه با جمله شامل ζ^2 کوچک است از آن صرف‌نظر می‌کنیم و داریم:

$$\frac{3}{20}\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}(\delta\zeta^2) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\zeta\delta} \qquad (۳۴-۵)$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{1}{10}u_\infty\left(2\,\delta\zeta\frac{d\zeta}{dx} + \zeta^2\frac{d\delta}{dx}\right) = \frac{\alpha}{\delta\zeta}$$

یا:

$$\frac{1}{10}u_\infty\left(2\delta^2\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} + \zeta^3\,\delta\frac{d\delta}{dx}\right) = \alpha$$

ولی:

$$\delta\,d\delta = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}dx$$

و:

$$\delta^2 = \frac{280}{13}\frac{\nu x}{u_\infty}$$

بنابراین داریم:

$$\zeta^3 + 4x\,\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu} \qquad (۳۵-۵)$$

با توجه به اینکه:

$$\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\zeta^3$$

می‌بینید که معادله (۵-۳۵) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب ζ^3 و جواب آن چنین است:

$$\zeta^3 = Cx^{-4} + \frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu}$$

که وقتی شرایط مرزی زیر:

$\delta_t = 0$ در $x = x_0$

$\zeta = 0$ در $x = x_0$

اعمال شود، جواب نهایی آن چنین است:

$$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1/026}Pr^{-\frac{1}{4}}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (۳۶-۵)$$

که:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \qquad (۳۷-۵)$$

در آن وارد شده است. نسبت $\frac{\nu}{\alpha}$ را به یاد لودویک پراندل عالم آلمانی که مفاهیم نظریه لایه مرزی را عرضه کرد عدد پراندل می‌نامند.

وقتی سراسر طول صفحه را گرما دهیم، $x_0 = 0$ و:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \zeta = \frac{1}{1/026}Pr^{-\frac{1}{4}} \qquad (۳۸-۵)$$

در تحلیل فوق فرض بر آن بود که $\Pr > 0.6$ باشد. این فرض در مورد سیالاتی که عدد پراندل آنها بیش‌تر از حدود ۰/۷ باشد قابل قبول است. خوشبختانه بسیاری از گازها و سیالات در این رسته قرار می‌گیرند. گرچه فلزات سیال از این قاعده مستثنی هستند زیرا اعداد پراندل آنها از مرتبه ۰/۰۱ است.

عدد پراندل $\frac{\nu}{\alpha}$ سنجه‌ای است که ضخامت نسبی لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و گرمایی را به‌هم ربط می‌دهد. لزجت سینماتیکی سیال، اطلاعاتی در مورد آهنگ پخش اندازه حرکت در سیال به‌علت حرکت ملکولی به‌دست می‌دهد. ضریب پخشیدگی گرمایی نیز همین اطلاعات را در مورد پخش گرما در سیال می‌دهد. بنابراین نسبت این دو کمیت، بزرگی‌های نسبی پخش اندازه حرکت و گرما در سیال را بیان می‌کند. ولی این آهنگ‌های پخش دقیقاً کمیت‌های تعیین‌کننده ضخامت لایه‌های مرزی در میدان جریان خارجی معلوم هستند. معنی ضریب پخشیدگی بزرگ آن است که تأثیر دما یا لزجت در بیرون میدان جریان احساس می‌شود. بنابراین عدد پراندل رابط بین میدان سرعت و میدان دما است.

چنان‌چه از یک دستگاه واحد استفاده شود، عدد پراندل بی‌بعد خواهد بود:

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{c_p \mu}{k} \qquad (۳۹-۵)$$

در دستگاه SI، μ به کیلوگرم بر ثانیه بر متر، c_p به کیلوژول بر کیلوگرم بر درجه سلسیوس، k به کیلووات بر متر بر درجه سلسیوس است. μ در دستگاه انگلیسی به پوند جرم به ساعت بر فوت، c_p به بی‌تو بر پوند جرم بر درجه فارنهایت و k به بی‌تی‌یو بر ساعت بر فوت بر درجهٔ فارنهایت است.

حالا به تحلیل خودمان برمی‌گردیم. داریم:

$$h = \frac{-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}{T_w - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{k}{\zeta\delta} \qquad (۴۰-۵)$$

با جای‌گزینی ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی از معادلهٔ (۵-۲۱) و استفاده از معادلهٔ (۵-۳۶) داریم:

$$h_x = 0.332 k \Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}} \qquad (۴۱-۵)$$

این معادله را می‌توان با ضرب دو طرف در $\frac{x}{k}$ بی‌بعد کرد و سمت چپ آن را به صورت گروه بی‌بعد زیر درآورد:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \qquad (۴۲-۵)$$

Nu_x را به‌نام ویلهلم نوسلت Nusselt که سهم بزرگی در نظریه انتقال گرمای جابه‌جایی دارد، عدد نوسلت می‌نامند. بالاخره:

$$Nu_x = 0.332 \Pr^{\frac{1}{3}} Re_x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}} \qquad (۴۳-۵)$$

و یا برای صفحه‌ای که در سراسر طولش گرما می‌بیند، $x_0 = 0$ و:

$$Nu_x = 0.332 \Pr^{\frac{1}{3}} Re_x^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۴-۵)$$

معادلات (۵-۴۱) و (۵-۴۳) و (۵-۴۴) مقادیر موضعی ضریب انتقال گرما را برحسب فاصله از لبه بالاروند صفحه و خواص فیزیکی سیال بیان می‌کند. برای حالتی که $x_0 = 0$ است، ضریب انتقال گرمای متوسط و عدد نوسلت را می‌توان با انتگرال‌گیری در طول صفحه به‌دست آورد:

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x\, dx}{\int_0^L dx} = 2h_{x=L} \qquad (۴۵-۵)$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k}\, 2\, Nu_{x=L} \qquad (۴۶-۵ \text{ الف})$$

یا:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.664\, Re_L^{\frac{1}{2}} \Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (۴۶-۵ \text{ ب})$$

که:

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}$$

برای تحقیق در مورد این نتایج باید انتگرال‌گیری کرد.

در این تحلیل فرض بر آن بود که خواص فیزیکی سیال در سراسر جریان، ثابت باشد. چنان‌چه تغییر قابل توجهی میان شرایط دیوار و جریان آزاد وجود داشته باشد، توصیه می‌شود که خواص فیزیکی در به‌اصطلاح ***دمای فیلم*** T_f ارزیابی شود. این دما به صورت متوسط حسابی دمای دیوار و دمای جریان آزاد تعریف می‌شود:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} \qquad (۴۷-۵)$$

حل دقیق معادله انرژی در پیوست B داده شده است. نتایج حاصل از تحلیل دقیق با نتایج تحلیل تقریبی فوق یکی است.

شارگرمایی ثابت

در تحلیل فوق انتقال گرمای آرام از سطح هم‌دما بررسی شد. در بسیاری از مسائل عملی اساساً شارگرمایی سطحی ثابت است و مسأله، پیدا کردن پخش دمای سطح صفحه در شرایط جریان - سیال معلوم است. می‌شود نشان داد، عدد نوسلت موضعی در حالت شارگرمایی ثابت از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 0.453\, Re_x^{\frac{1}{2}} \Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (۴۸-۵)$$

که می‌توان آن‌را برحسب شارگرمایی دیوار و اختلاف دما بیان کرد:

$$Nu_x = \frac{q_w x}{k\,(T_w - T_\infty)} \qquad (۴۹-۵)$$

اختلاف دمای متوسط در طول صفحه در شرایط شارگرمایی ثابت را می‌توان با انتگرال‌گیری به‌دست آورد:

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{1}{L}\int_0^L (T_w - T_\infty)\, dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{q_w x}{k Nu_x}\, dx$$

$$= \frac{q_w \frac{L}{k}}{0.6795\, Re_L^{\frac{1}{2}} \Pr^{\frac{1}{3}}} \qquad (۵۰-۵)$$

یا:

$$q_w = \frac{3}{2} h_{x=L}\, (\overline{T_w - T_\infty})$$

در این معادلات q_w شارگرمایی واحد سطح است و واحد آن در دستگاه SI وات بر متر مربع $\left(\frac{W}{m^2}\right)$ و در دستگاه انگلیسی، بی‌تی‌یو بر ساعت بر فوت مربع $\frac{Btu}{h.ft^2}$ است.

سایر روابط

معادلهٔ (۵-۴۴) در مورد سیالاتی که عدد پراندل آنها بین حدود ۰/۶ تا ۵۰ باشد به کار می‌رود. از این معادله در مورد سیالاتی با عدد پراندل خیلی پایین، مثل فلزات مایع، یا با عدد پراندل خیلی بالا مثل روغن‌های سنگین یا سیلیکون‌ها* استفاده نمی‌شود. چرچیل Churchill و اوزو Ozoe [۹] تعداد زیادی از داده‌ها را برای دامنهٔ وسیعی از اعداد پراندل به هم ربط داده و رابطهٔ زیر را برای جریان آرام روی صفحه تخت هم‌دما ارائه کرده‌اند:

$$Nu_x = \frac{0.3387\, Re_x^{\frac{1}{2}} \Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0.0468}{\Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \qquad Re_x \Pr > 100 \text{ به ازای} \qquad (۵۱-۵)$$

در شارگرمایی ثابت ۰/۳۳۸۷ به ۰/۴۶۳۷ و ۰/۰۴۶۸ به ۰/۰۲۰۷ تغییر می‌کند. باز هم خواص فیزیکی در دمای فیلم ارزیابی می‌شود.

مثال ۵-۴ صفحهٔ تخت هم‌دمایی که در سراسر طولش گرما می‌بیند.

در سیستم جریان مثال ۵-۳ فرض کنید که صفحه در سراسر طول خودش تا دمای ۶۰°C گرمادیده است. انتقال گرما را در (الف) ۲۰cm اول صفحه و (ب) ۴۰cm اول صفحه، حساب کنید.

حل :

کل انتقال گرما در طول معینی از صفحه مورد نیاز است؛ بنابراین ضرایب انتقال گرمای متوسط را حساب می‌کنیم. برای این منظور از معادلات (۵-۴۴) و (۵-۴۵) استفاده کرده، خواص فیزیکی جسم را در دمای فیلم به‌دست می‌آوریم:

$$T_f = \frac{27 + 60}{2} = 43.5°C = 316.5K \qquad [110.3°F]$$

خواص فیزیکی مورد نظر با توجه به پیوست A عبارتند از:

$$\nu = 17.36 \times 10^{-6}\ \frac{m}{s} \qquad \left[1.87 \times 10^{-4}\ \frac{ft}{s}\right]$$

$$k = 0.02749\ \frac{W}{m.°C} \qquad \left[0.0159\ \frac{Btu}{h.ft.°F}\right]$$

$$\Pr = 0.7$$

$$c_p = 1.006\ \frac{kJ}{kg.°C} \qquad \left[0.24\ \frac{Btu}{lb_m.°F}\right]$$

در $x = 20cm$:

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2)(0.2)}{17.36 \times 10^{-6}} = 23{,}041$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\, Re_x^{\frac{1}{2}} \Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$= (0.332)(23\,041)^{\frac{1}{2}} (0.7)^{\frac{1}{3}} = 44.74$$

$$h_x = Nu_x \left(\frac{k}{x}\right) = \frac{(44.74)(0.02749)}{0.2}$$

$$= 6.15\ \frac{W}{m^2.°C} \qquad \left[1.083\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

مقدار متوسط ضریب انتقال گرما دو برابر این مقدار است و یا:

$$\bar{h} = (2)(6.15) = 12.3\ \frac{W}{m^2.°C} \qquad \left[2.17\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

جریان گرما برابر است با:

$$q = \bar{h} A\, (T_w - T_\infty)$$

اگر عمق در راستای z را برابر واحد فرض کنیم:

$$q = (12.3)(0.2)(60 - 27) = 81.18\,W \qquad [277\ \frac{Btu}{h}]$$

در $x = 40cm$:

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2)(0.4)}{17.36 \times 10^{-6}} = 46{,}082$$

$$Nu_x = (0.332)(46\,082)^{\frac{1}{2}} (0.7)^{\frac{1}{3}} = 63.28$$

$$h_x = \frac{(63.28)(0.02749)}{0.4} = 4.349\ \frac{W}{m^2.°C}$$

$$\bar{h} = (2)(4.349) = 8.698\ \frac{W}{m^2.°C} \qquad \left[1.53\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

$$q = (8.698)(0.4)(60 - 27) = 114.8\,W \qquad [392\ \frac{Btu}{h}]$$

مثال ۵-۵ صفحهٔ تخت با شارگرمایی ثابت

گرم‌کنی به قدرت ۱/۰kW تشکیل شده از صفحه شیشه‌ای و فیلم هادی برق که شارگرمایی ثابت تولید می‌کند. ابعاد صفحه ۶۰ در ۶۰cm است. و در جریان هوایی به دمای ۲۷°C و فشار ۱atm و $u_\infty = 5\frac{m}{s}$ قرار داده می‌شود. اختلاف دمای متوسط در طول صفحه و اختلاف دما در لبهٔ بالاروند را حساب کنید.

حل :

خواص فیزیکی را باید در دمای فیلم ارزیابی کرد ولی دمای صفحه را نمی‌دانیم بنابراین محاسبه اولیه را بر اساس خواص فیزیکی در شرایط جریان آزاد انجام می‌دهیم:

$$T_\infty = 27°C = 300K$$

---

* – Silicone سیال، رزین، لاستیک یا پلاستیک ترکیبی که می‌تواند گریس، لاستیک یا پودر کف کردنی باشد؛ نام گروهی پلیمرهای مقاوم در برابر گرما، دافع آب و نیمه آلی. (م)

$$\nu = ۱۵/۶۹ \times ۱۰^{-۶}\ \frac{m^۲}{s} \quad Pr = ۰/۷۰۸ \quad k = ۰/۰۲۶۲ \frac{W}{m.°C}$$

$$Re_L = \frac{(۰/۶)(۵)}{۱۵/۶۹ \times ۱۰^{-۶}} = ۱/۹۱ \times ۱۰^۵$$

از معادلهٔ (۵-۵۰) اختلاف دمای متوسط برابر است با:

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{(۰/۶)^۲}\right]\frac{(۰/۶)}{۰/۰۲۶۲۴}}{۰/۶۷۹۵\,(۱/۹۱ \times ۱۰^۵)^{\frac{۱}{۲}}\,(۰/۷۰۸)^{\frac{۱}{۳}}} = ۲۴۰°C$$

حالا به عقب برمی‌گردیم و خواص فیزیکی را در دمای زیر ارزیابی می‌کنیم:

$$T_f = \frac{۲۴۰ + ۲۷ + ۲۷}{۲} = ۱۴۷°C = ۴۲۰K$$

و داریم:

$$\nu = ۲۸/۲۲ \times ۱۰^{-۶}\ \frac{m^۲}{s} \quad Pr = ۰/۶۸۷ \quad k = ۰/۰۳۵ \frac{W}{m.°C}$$

$$Re_L = \frac{(۰/۶)(۵)}{۲۸/۲۲ \times ۱۰^{-۶}} = ۱/۰۶ \times ۱۰^۵$$

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{(۰/۶)^۲}\right]\frac{(۰/۶)}{۰/۰۳۵}}{۰/۶۷۹۵\,(۱/۰۶ \times ۱۰^۵)^{\frac{۱}{۲}}\,(۰/۶۸۷)^{\frac{۱}{۳}}} = ۲۴۳°C$$

اختلاف دما در انتهای صفحه ($x = L = ۰/۶m$) را از معادله (۵-۴۸) و (۵-۵۰) و با در نظر گرفتن ثابت ۰/۴۵۳ به‌دست می‌آوریم:

$$(T_w - T_\infty)_{x=L} = \frac{(۲۴۳/۶)(۰/۶۷۹۵)}{۰/۴۵۳} = ۳۶۵/۴°C$$

مسأله را می‌توان با توجه به عدد نوسلت معادلهٔ (۵-۵۱) نیز حل کرد.

مثال ۵-۶ جریان روغن روی صفحهٔ تخت گرم شده

روغن موتور به دمای ۲۰°C را به زور و با سرعت $۱/۲\frac{m}{s}$ روی صفحه مربعی به ضلع ۲۰cm می‌رانند. صفحه را تا دمای یکنواخت ۶۰°C گرم می‌کنند. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

حل :

نخست دمای فیلم را حساب می‌کنیم:

$$T = \frac{۲۰ + ۶۰}{۲} = ۴۰°C$$

خواص روغن موتور عبارتند از:

$$\rho = ۸۷۶\ \frac{kg}{m^۳} \qquad \nu = ۰/۰۰۰۲۴\ \frac{m^۲}{s}$$

$$k = ۰/۱۴۴\ \frac{W}{m.°C} \qquad Pr = ۲۸۷۰$$

عدد رینولدوز برابر است با:

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{(۱/۲)(۰/۲)}{۰/۰۰۰۲۴} = ۱۰۰۰$$

چون عدد پراندل خیلی بزرگست برای حل مسأله از معادله (۵-۵۱) استفاده می‌کنیم. می‌بینیم که h_x بر حسب x مثل معادلهٔ (۵-۴۴) تغییر می‌کند یعنی $h_x \propto x^{-\frac{۱}{۲}}$ و از این‌رو همان جواب معادلهٔ (۵-۴۵) را برای ضریب انتقال گرمای متوسط خواهیم داشت. با ارزیابی معادله (۵-۵۱) در $x = ۰/۲$ داریم:

$$Nu_x = \frac{(۰/۳۳۸۷)(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۲}}(۲۸۷۰)^{\frac{۱}{۳}}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۰۴۶۸}{۲۸۷۰}\right)^{\frac{۲}{۳}}\right]^{\frac{۱}{۴}}} = ۱۵۲/۲$$

$$h_x = \frac{(۱۵۲/۲)(۰/۱۴۴)}{۰/۲} = ۱۰۹/۶\ \frac{W}{m^۲.°C}$$ و:

مقدار متوسط ضریب جابه‌جایی برابر است با:

$$h = (۲)(۱۰۹/۶) = ۲۱۹/۲\ \frac{W}{m^۲.°C}$$

بنابراین انتقال گرمای کل برابر است با:

$$q = hA\,(T_w - T_\infty) = (۲۱۹/۲)(۰/۲)^۲(۶۰ - ۲۰) = ۳۵۰/۶W$$

۵-۷ رابطه اصطکاک سیال و انتقال گرما

ملاحظه کردید که میدان‌های دما و جریان به‌هم مرتبطند. اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای بیابیم که مقاومت اصطکاکی را مستقیماً به انتقال گرما مرتبط می‌سازد.

تنش برشی در دیوار را می‌توان برحسب ضریب اصطکاک C_f بیان کرد:

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u_\infty^۲}{۲} \qquad (۵-۵۲)$$

معادلهٔ (۵-۵۲) معادلهٔ معرف ضریب اصطکاک است. تنش برشی را می‌توان از رابطهٔ زیر نیز حساب کرد:

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_w$$

با استفاده از پخش سرعت در معادله (۵-۱۹) داریم:

$$\tau_w = \frac{۳}{۲}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

و با استفاده از رابطهٔ ضخامت لایه مرزی داریم:

$$\tau_w = \frac{۳}{۲}\frac{\mu u_\infty}{۴/۶۴}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۵-۵۳)$$

با ترکیب معادلات (۵-۵۲) و (۵-۵۳) داریم:

$$\frac{C_{fx}}{۲} = \frac{۳}{۲}\frac{\mu u_\infty}{۴/۶۴}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{\rho u_\infty^۲} = ۰/۳۲۳\ Re_x^{-\frac{۱}{۲}} \qquad (۵-۵۴)$$

جواب دقیق معادلات لایه مرزی به صورت زیر است:

$$\left\{\frac{C_{fx}}{۲} = ۰/۳۳۲\ Re_x^{-\frac{۱}{۲}}\right\} \qquad (۵-۵۴\text{ الف})$$

معادلهٔ (۵-۴۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{Nu_x}{Re_x\,Pr} = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = ۰/۳۳۲\ Pr^{-\frac{۲}{۳}}\ Re_x^{-\frac{۱}{۲}}$$

گروه سمت چپ را عدد استانتون Stanton می‌نامند:

$$St_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty}$$

بنابراین:

$$St_x\,Pr^{\frac{۲}{۳}} = ۰/۳۳۲\ Re_x^{-\frac{۱}{۲}} \qquad (۵-۵۵)$$

با مقایسه معادلات (۵-۵۴) و (۵-۵۵) ملاحظه می‌شود که طرف‌های راست مشابه هستند به جز در مقدار ثابت که حدود ۳ درصد تفاوت دارند که این امر ناشی از تقریبی بودن تحلیل انتگرالی لایه مرزی است. این تقریب را می‌دانیم و می‌نویسیم:

$$St_x\,Pr^{\frac{۲}{۳}} = \frac{C_{fx}}{۲} \qquad (۵-۵۶)$$

معادلهٔ (۵-۵۶) که به ***تشابه رینولدز - کولبورن*** موسوم است، رابطهٔ اصطکاک بین سیال و انتقال گرمای جریان آرام روی صفحه تخت را بیان می‌کند. بنابراین ضریب انتقال گرما را می‌توان با اندازه‌گیری کشش اصطکاکی روی صفحه در شرایطی تعیین کرد که انتقال گرمایی وجود ندارد.

در نتیجه می‌توان معادلهٔ (۵-۵۶) را برای جریان ناآرام روی صفحه تخت و شکل اصلاح شدهٔ آن را برای جریان ناآرام در لوله نیز به‌کار برد. این معادله برای جریان آرام در لوله به‌کار نمی‌رود. به‌طور کلی، بررسی دقیق‌تر معادلات حاکمه، در موقع استفاده از آنها در کاربردهای جدید تشابه اصطکاک سیال و انتقال گرما، ضروری بوده، نتایج حاصله همواره به شکل ساده معادلهٔ (۵-۵۶) نخواهد بود. خواننده مشتاق می‌تواند به‌منظور کسب اطلاع بیش‌تر در این زمینه مهم به کتاب‌های مرجع انتهای فصل مراجعه کند. باید گفت که تشابه ساده‌ای که در بالا به‌دست آمد درک ما را از فرآیندهای فیزیکی در جابه‌جایی و تقویت این نکته که فرآیندهای انتقال گرما و انتقال لزجت هم در سطح میکروسکوپی و هم در سطح ماکروسکوپی مرتبطاند، بالا می‌برد.

مثال ۵-۷ نیروی کشش روی صفحهٔ تخت

برای سیستم جریان مثال ۵-۴، نیروی کشش که بر ۴۰cm اول صفحه اعمال می‌شود را با استفاده از تشابه بین اصطکاک سیال و انتقال گرما حساب کنید.

حل :

برای محاسبه ضریب اصطکاک از معادله (۵-۵۶) استفاده کرده، سپس نیروی کششی را حساب می‌کنیم. ضریب اصطکاک متوسط را باید بیابیم؛ بنابراین:

$$\overline{St}\,Pr^{\frac{۲}{۳}} = \frac{\overline{C}_f}{۲} \qquad \text{(الف)}$$

چگالی در ۳۱۶/۵K برابر است با:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^۵}{(۲۸۷)(۳۱۶/۵)} = ۱/۱۱۵\ \frac{kg}{m^۳}$$

برای طول ۴۰cm داریم:

$$\overline{St} = \frac{\overline{h}}{\rho c_p u_\infty} = \frac{۸/۶۹۸}{(۱/۱۱۵)(۱۰۰۶)(۲)} = ۳/۸۸ \times ۱۰^{-۳}$$

سپس از معادله (الف) داریم:

$$\frac{\overline{C}_f}{۲} = (۳/۸۸ \times ۱۰^{-۳})(۰/۷)^{\frac{۲}{۳}} = ۳/۰۶ \times ۱۰^{-۳}$$

تنش برشی متوسط در دیوار از معادله (۵-۵۲) حساب می‌شود:

$$\overline{\tau}_w = \overline{C}_f \rho \frac{u_\infty^۲}{۲}$$

$$= (۳/۰۶ \times ۱۰^{-۳})(۱/۱۱۵)(۲)^۲$$

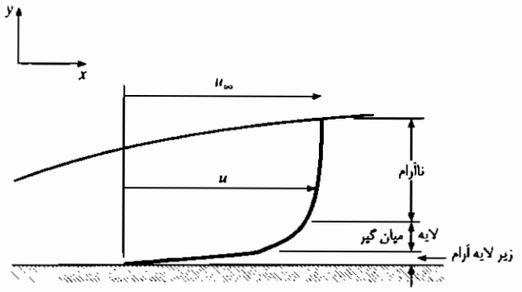
$$= ۰/۰۱۳۶\ \frac{N}{m^۲}$$

نیروی کششی برابر حاصل‌ضرب این تنش برشی در مساحت است:

$$D = (۰/۰۱۳۶)(۰/۴) = ۵/۴۴\,mN \qquad [۱/۲۳ \times ۱۰^{-۳}\ lb_f]$$

۵-۸ انتقال گرمای لایهٔ مرزی ناآرام

بخشی از لایه مرزی ناآرام را به‌صورت شکل ۵-۱۰ در نظر بگیرید. ناحیه‌ای خیلی باریک در نزدیکی سطح صفحه دارای سرشت آرام بوده، کنش لزجی و انتقال گرمای آن در شرایطی مشابه جریان آرام صورت می‌گیرد. در بیرون از این صفحه و در فواصل y بزرگ‌تر، کنش ناآرامی ایجاد می‌شود ولی باز هم کنش لزجی ملکولی و هدایت گرما اهمیت دارد. این ناحیه را ***لایه میان‌گیر*** می‌نامند. در فاصله باز هم دورتر، جریان کاملاً ناآرام و سازوکار مبادله گرما و اندازه حرکت اصلی شامل تکه‌های ماکروسکوپی سیال است که در جریان به این‌طرف و آن‌طرف می‌رود. در این ناحیهٔ کاملاً ناآرام از ***لزجت گردابی و ضریب هدایت گرمای گردابی*** صحبت می‌کنیم. مقدار این خواص گردابی ممکن است ده برابر مقادیر ملکولی باشد.



شکل ۵-۱۰ نیم‌رخ سرعت در لایه مرزی ناآرام روی صفحه تخت.

سازوکار فیزیکی انتقال گرما در جریان ناآرام کاملاً شبیه جریان آرام است؛ تفاوت عمده در آن است که به‌جای ضریب هدایت گرما و لزجت معمولی باید خواص گردابی را در نظر بگیریم. مشکل اصلی در بررسی تحلیلی آن است که این خواص گردابی در عرض لایه مرزی تغییر کرده و این تغییر را تنها از داده‌های تجربی می‌توان معین کرد. این نکته‌ای پر اهمیت است. در نتیجه، کلیه تحلیل‌های جریان ناآرام باید بالاخره بر داده‌های تجربی تکیه کند. زیرا نظریه کاملاً مناسبی برای پیش‌بینی رفتار جریان ناآرام وجود ندارد.

با ملاحظه سرعت ماکروسکوپی لحظه‌ای در سیستم جریان ناآرام که به وسیله بادسنج لیزری یا وسیله حساس دیگری

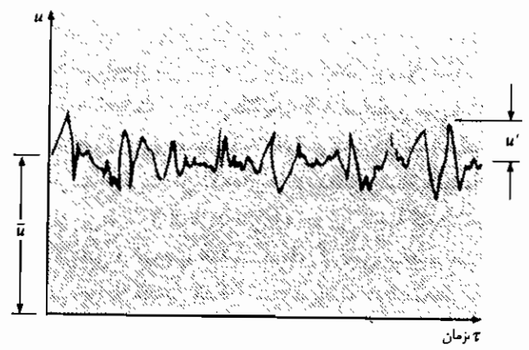
اندازه‌گیری شده، متوجه افت و خیزهای قابل توجهی حول سرعت متوسط جریان مطابق شکل ۵-۱۱ خواهید شد که در آن $\bar{u}$ سرعت متوسط و u' مقدار **افت و خیز** نسبت به مقدار متوسط است. بنابراین سرعت لحظه‌ای برابر است با:

$$u = \bar{u} + u' \qquad (۵-۵۷)$$

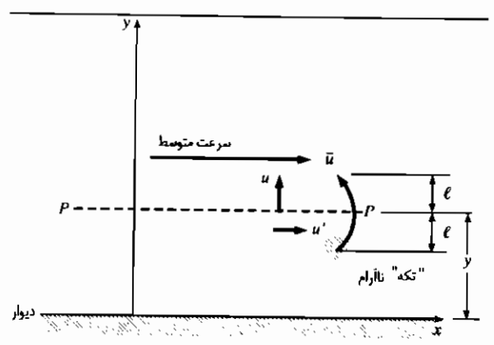
مقدار متوسط افت و خیز u' باید در دوره‌ای طولانی و برای شرایط جریان پایدار برابر صفر باشد. در مؤلفهٔ y سرعت نیز افت و خیزهایی موجود است و داریم:

$$v = \bar{v} + v' \qquad (۵-۵۸)$$

این افت و خیزها موجب تنش برشی ناآرام می‌شود که می‌توان آن‌را با مراجعه به شکل ۵-۱۲ تحلیل کرد.



شکل ۵-۱۱ افت و خیزهای ناآرام نسبت به زمان.



شکل ۵-۱۲ تنش برشی ناآرام و طول آمیزش.

آهنگ انتقال جرم ناآرام لحظه‌ای در عرض صفحه به ازای واحد سطح صفحه $P-P$ برابر $\rho v'$ است. همراه با این انتقال جرم، در مؤلفه x سرعت u' تغییری به‌وجود می‌آید. شار اندازه حرکت خالص واحد سطح، در راستای x، تنش برشی ناآرام صفحه $P-P$ یا $\rho v' u'$ را نشان می‌دهد. وقتی تکهٔ ناآرامی به سمت بالا حرکت کند ($v' > 0$)، وارد ناحیه‌ای با u' بالاتر شده، احتمالاً موجب افت و خیز کند شونده در u' می‌شود، یعنی $u' < 0$. برای $v' > 0$ نیز استدلال مشابهی وجود دارد. بنابراین تنش برشی ناآرام متوسط چنین است:

$$\tau_t = -\rho \overline{v' u'} \qquad (۵-۵۹)$$

باید توجه کرد که حتی اگر $\bar{v'} = \bar{u'} = 0$ باشد، متوسط ***حاصل‌ضرب افت و خیز*** $\overline{u' v'}$ برابر صفر نیست.

لزجت گردابی و طول آمیزش

لزجت گردابی و یا پخشیدگی گردابی برای اندازه حرکت ε_M چنین تعریف می‌شود.

$$\tau_t = -\rho \overline{v' u'} = \rho \varepsilon_M \frac{du}{dy} \qquad (۵-۶۰)$$

تا اینجا انتقال ماکروسکوپی گرما و اندازه حرکت جریان ناآرام را به قرینه ملکولی آنها در جریان آرام مرتبط کردیم. بنابراین معادله (۵-۶۰) نتیجه طبیعی این تشابه است. برای تحلیل مسائل انتقال ملکولی (مثلاً مرجع ۷ صفحه ۳۶۹ را ببینید) معمولاً مفهوم ***پویش آزاد متوسط*** و یا فاصلهٔ متوسطی را معرفی می‌کنند که ذرّه‌بین برخوردها می‌پیماید. پراندل برای توضیح پدیده‌های جریان ناآرام مفهوم مشابهی را معرفی می‌کند. ***طول آمیزش پراندل***، متوسط فاصله‌ای است که تکه‌های ناآرام سیال در راستای عمود بر جریان متوسط می‌پیمایند.

تکه ناآرامی را تصور کنید که در فاصله ℓ در بالا یا پایین صفحه $P-P$، شکل ۵-۱۲، قرار گرفته باشد. این تکه سیال در عرض صفحه به عقب و جلو رفته، موجب تنش برشی ناآرام یا گردابی می‌شود. سرعت در $y + \ell$ تقریباً برابر است با:

$$u(y + \ell) \approx u(y) + \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

در حالی‌که در $y - \ell$:

$$u(y - \ell) \approx u(y) - \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

پراندل فرض مسلم دانست که مقدار افت و خیز ناآرام u' متناسب با متوسط دو کمیت فوق است و یا:

$$u' \approx \ell \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۵-۶۱)$$

فاصله ℓ را طول آمیزش پراندل می‌نامند. پراندل همچنین فرض مسلم دانست که v' از نظر بزرگی هم‌مرتبه با u' باشد و بنابراین تنش برشی ناآرام معادلهٔ (۵-۶۰) چنین است:

$$\tau_t = -\overline{\rho u' v'} = \rho \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \rho \varepsilon_M \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۵-۶۲)$$

بنابراین لزجت گردابی ε_M برابر است با:

$$\varepsilon_M = \ell^2 \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۵-۶۳)$$

گفتیم که خواص گردابی و بنابراین طول آمیزش شدیداً در لایه مرزی تغییر می‌کند. طی سال‌ها از روش‌های تحلیلی بسیاری استفاده شده تا این تغییر را به حساب آورند. فرضیه پراندل آن است که طول آمیزش متناسب با فاصله از دیوار است و یا:

$$\ell = K y \qquad (۵-۶۴)$$

که K ثابت نسبت است، فرض دیگر این است که در ناحیهٔ نزدیک دیوار، تنش برشی تقریباً ثابت است به‌طوری که $\tau_t \approx \tau_w$. وقتی این فرض را همراه با معادلهٔ (۵-۶۴) استفاده کنیم، معادلهٔ (۵-۶۲) چنین می‌شود:

$$\tau_w = \rho K^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

با جذر گرفتن و انتگرال‌گیری نسبت به y داریم:

$$u = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C \qquad (۵-۶۵)$$

که C ثابت انتگرال‌گیری است. هم‌خوانی معادلهٔ (۵-۶۵) با داده‌های تجربی خیلی خوب است، به‌جز در ناحیه خیلی بزرگ به دیواره که دارای زیرلایه آرام است. پخش سرعت در این زیرلایه اساساً خطی است.

اکنون توضیح کیفی اولیهٔ لایه‌های مرزی ناآرام را با بیان تنش برشی به صورت مجموع پخش‌های ملکولی و ناآرام، به‌طریق کمی نشان می‌دهیم:

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_M)\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۵-۶۶)$$

نیم‌رخ سرعت عمومی با وارد کردن دو مختص بی‌بعد زیر به‌دست می‌آید:

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \qquad (۵-۶۷)$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\, y}{\nu} \qquad (۵-۶۸)$$

با استفاده از این دو سنجه و فرض (ثابت $\tau \approx$)، معادله (۵-۶۶) را چنین می‌نویسیم:

$$du^+ = \frac{dy^+}{1 + \frac{\varepsilon_M}{\nu}} \qquad (۵-۶۹)$$

طبق توضیح کیفی قبلی، زیرلایهٔ آرام ناحیه‌ای است با $\varepsilon_M \sim 0$، لایه میان‌گیر با $\varepsilon_M \sim \nu$ و لایه ناآرام با $\varepsilon_M > \nu$. بنابراین با قرار دادن $\varepsilon_M = 0$ در معادله (۵-۶۹) و انتگرال‌گیری داریم:

$$u^+ = y^+ + c$$

در این دیوار به ازای $y^+ = 0$ داریم $u^+ = 0$، بنابراین $c = 0$ و:

$$u^+ = y^+ \qquad (۵-۷۰)$$

رابطهٔ سرعت (رابطه خطی) زیرلایهٔ آرام است. در ناحیه کاملاً ناآرام $\frac{\varepsilon_M}{\nu} >> 1$ می‌باشد. از معادلهٔ (۵-۶۵):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\frac{1}{y}$$

با جای‌گزینی این رابطه و معادلهٔ (۵-۶۴) در معادله (۵-۶۳) داریم:

$$\varepsilon_M = K\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\, y$$

یا:

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = K y^+ \qquad (۵-۷۱)$$

با جای‌گزینی این رابطه در معادلهٔ (۵-۶۹) برای $\frac{\varepsilon_M}{\nu} >> 1$ و انتگرال‌گیری داریم:

$$u^+ = \frac{1}{K}\ln y^+ + c \qquad (۵-۷۲)$$

برای ناحیهٔ میان‌گیر نیز همین **شکل** معادله به‌دست می‌آید. محدوده‌های هر ناحیه با مقایسه معادلات فوق با اندازه‌های تجربی سرعت به‌دست می‌آید و معمولاً ثابت‌های زیر پذیرفته شده است:

$$\begin{aligned} &0 < y^+ < 5 : && u^+ = y^+ && \text{زیر لایهٔ آرام}\\ &5 < y^+ < 30 : && u^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05 && \text{لایهٔ میان‌گیر}\\ &30 < y^+ < 400 : && u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 && \text{لایه ناآرام} \end{aligned} \qquad (۵-۷۳)$$

مجموعه معادلات (۵-۷۳) را ***نیم‌رخ سرعت عمومی*** می‌نامند و با داده‌های تجربی خیلی خوب می‌خوانند؛ گرچه مجدداً باید توجه داشت که ثابت‌های این معادلات را باید از اندازه‌گیری‌های تجربی سرعت معین کرد. نکته مساعد آن است که از مدل ساده طول آمیزشی پراندل معادله‌ای به‌دست می‌آید که به‌خوبی با داده‌ها مناسبت دارد.

انتقال گرمای ناآرام با انتقال اندازه حرکت ناآرام مشابه است. شار اندازه حرکت ناآرام که با معادلهٔ (۵-۵۹) تصریح شده حامل افت و خیز انرژی ناآرامی است که با گرادیان دما متناسب است. در تشابه با معادلهٔ (۵-۶۲) داریم:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{ناآرام}} = -\rho c_p \varepsilon_H \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۵-۷۴)$$

یا برای نواحی‌ای که انتقال انرژی ملکولی و ناآرام هر دو اهمیت دارد:

$$\frac{q}{A} = -\rho c_p (\alpha + \varepsilon_H)\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۵-۷۵)$$

انتقال گرمای ناآرام بر پایه تشابه اصطکاک سیال

برای تعیین انتقال گرمای لایه مرزی ناآرام از تحلیل‌های متعددی مشابه تحلیل نیم‌رخ سرعت عمومی فوق استفاده شده است. این تحلیل‌ها با موفقیت توأم بوده‌اند ولی برای منظور ما کاربرد تشابه کولبورن میان اصطکاک سیال و انتقال گرما ساده‌تر است و نتایج حاصل و با تجربه مطابقت و شکل ساده‌تری دارد.

در ناحیهٔ ناآرام $\varepsilon_M >> \nu$ و $\varepsilon_H >> \alpha$ است. عدد پراندل را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H} \qquad (۷۶-۵)$$

اگر اندازه حرکت گردابی و انتقال انرژی نسبت به مقادیر ملکولی‌شان هر دو به یک نسبت افزایش یابند، می‌توان ضرایب انتقال گرما را از معادله (۵-۵۶) و با استفاده از عدد پراندل ملکولی عادی محاسبه کرد. لزجت گردابی در مرکز ناآرام لایه مرزی ممکن است ۱۰۰ برابر مقدار ملکولی موجود در زیرلایه آرام باشد و در مورد پخشیدگی گردابی گرما در مقایسه پخشیدگی ملکولی، رفتار مشابهی وجود دارد. برای به حساب آوردن اثر عدد پراندل بر کل لایهٔ مرزی به متوسط حسابی نیاز است و نتیجه می‌شود که کاربرد $Pr^{\frac{1}{3}}$ خیلی مناسب است و با تشابه اصطکاک سیال انتقال گرمای آرام می‌خواند. پس محاسبات را بر پایه این تشابه بنا می‌کنیم و برای انجام این محاسبات به مقادیر تجربی C_f جریان لایه مرزی ناآرام نیاز داریم.

اشلیشتینگ [۱] اندازه‌گیری‌های تجربی ضرایب اصطکاک جریان ناآرام روی صفحات تخت را بررسی کرده است. نتایج حاصل از آن بررسی را به منظور استفاده در محاسبهٔ انتقال گرمای ناآرام با تشابه انتقال گرما - اصطکاک سیال ارائه می‌کنیم. ضریب اصطکاک پوستی **موضعی** به ازای اعداد رینولدز بین 5×10^5 و 10^7 از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C_{fx} = 0.0592\, Re_x^{-\frac{1}{5}} \qquad (۷۷-۵)$$

برای اعداد رینولدز بالاتر از 10^7 تا 10^9 فرمول شولتز - گرونوو Schultz – Grunow [۸] توصیه می‌شود:

$$C_{fx} = 0.370\, (\log \mathrm{Re}_x)^{-2.584} \qquad (۷۸-۵)$$

ضریب اصطکاک متوسط برای صفحه تخت با لایه مرزی آرام تا بحرانی Re و ناآرامی پس از آن را می‌توان از فرمول زیر حساب کرد:

$$\bar{C}_f = \frac{0.455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2.584}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^9 \qquad (۷۹-۵)$$

که مقدار ثابت A مطابق جدول ۵-۱ به بحرانی Re بستگی دارد. برای اعداد رینولدز پایین‌تر می‌توان فرمول اندک ساده‌تری به‌دست آورد:

$$\bar{C}_f = \frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^7 \qquad (۸۰-۵)$$

معادلات (۵-۷۹) و (۵-۸۰) در محدوده مشترک کاربردشان با هم مطابقت داشته، در عمل، انتخاب هر یک به راحتی محاسبه بستگی دارد.

با کاربرد تشابه اصطکاک سیال $St\, Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{C_f}{2}$، انتقال گرمای ناآرام موضعی چنین به‌دست می‌آید:

$$St_x\, Pr^{\frac{2}{3}} = 0.0296\, \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{5}} \qquad 5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7 \qquad (۸۱-۵)$$

یا:

$$St_x\, Pr^{\frac{2}{3}} = 0.185\, (\log \mathrm{Re}_x)^{-2.584} \qquad 10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9 \qquad (۸۲-۵)$$

جدول ۵-۱

A	$Re_{\text{بحرانی}}$
۱۰۵۰	3×10^5
۱۷۴۲	5×10^5
۳۳۴۰	10^6
۸۹۴۰	3×10^6

انتقال گرمای متوسط در کل لایه مرزی ناآرام - آرام برابر است با:

$$\overline{St}\, Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{\bar{C}_f}{2} \qquad (۸۳-۵)$$

به ازای $Re_{\text{بحرانی}} = 5 \times 10^5$ و $Re_L < 10^7$ از معادلهٔ (۵-۸۰) داریم:

$$\overline{St}\, Pr^{\frac{2}{3}} = 0.037\, Re_L^{-\frac{1}{5}} - 871\, Re_L^{-1} \qquad (۸۴-۵)$$

با توجه به اینکه $\overline{St} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}}{(\mathrm{Re}_L\, Pr)}$ است می‌توان معادله (۵-۸۴) را مجدداً چنین نوشت:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = Pr^{\frac{1}{3}} (0.037\, Re_L^{0.8} - 871) \qquad (۸۵-۵)$$

ضریب انتقال گرمای متوسط را می‌توان با انتگرال‌گیری مقادیر موضعی در کل طول صفحه نیز به‌دست آورد. پس،

$$h = \frac{1}{L} \left(\int_o^{x_{crit}} h_{lam}\, dx + \int_{x_{crit}}^{L} h_{turb}\, dx \right)$$

با استفاده از معادلهٔ (۵-۵۵) برای قسمت آرام، $Re_{crit} = 5 \times 10^5$، و معادلهٔ (۵-۸۱) برای قسمت ناآرام به همان نتایج معادلهٔ (۵-۸۵) می‌رسیم. به ازای اعداد رینولدز بزرگ‌تر، ضریب اصطکاک حاصل از معادلهٔ (۵-۷۹) را می‌توان به کار برد. در نتیجه: به ازای $10^7 < Re_L < 10^9$ و $Re_{crit} = 5 \times 10^5$ داریم:

$$Nu_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \left[0.228 Re_L (\log\ \mathrm{Re}_L)^{-2.584} - 871 \right] Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (۸۵-۵\text{الف})$$

خواننده باید توجه داشته باشد که اگر عدد رینولدز گذاری غیر از ۵۰۰/۰۰۰ انتخاب گردد، به تناسب آن باید معادلات (۵-۸۴) و (۵-۸۵) تغییر کنند. معادله دیگری توسط ویتیکر Whitaker [۱۰] پیشنهاد شده که ممکن است برای بعضی از مایعات، به‌علت وجود جمله نسبت لزجت، نتایج بهتری بدهد:

$$\overline{Nu}_L = 0.036\, Pr^{0.43} (Re_L^{0.8} - 9200) \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w} \right)^{\frac{1}{4}} \qquad (۸۶-۵)$$

به ازای

$$0.7 < Pr < 380$$
$$2 \times 10^5 < Re_L < 5/5 \times 10^6$$
$$0.26 < \frac{\mu_\infty}{\mu_w} < 3/5$$

تمام خواص غیر از μ_w در دمای جریان آزاد ارزیابی شده‌اند. در استفاده از معادله برای گازها، جمله نسبت لزجت حذف می‌شود و کلیه خواص فیزیکی در دمای فیلم تعیین می‌شود.

شار گرمایی ثابت

در مرجع ۱۲ نشان داده شده است که عدد نوسلت موضعی به ازای شار گرمایی ثابت دیوار در جریان ناآرام فقط حدود ۴ درصد بزرگ‌تر از مقدار آن برای سطح هم‌دما است؛ یعنی:

$$Nu_x = 1.04\, Nu_x \Big]_{T_w = \text{const}} \qquad (۸۷-۵)$$

چرچیل [۱۱] روش‌های جامع‌تری در مورد انتقال گرمای لایه مرزی ناآرام ارائه کرده است.

مثال ۵-۸ انتقال گرمای ناآرام از صفحهٔ تخت هم‌دما

هوای به‌دمای $20^\circ C$ و فشار $1 atm$ روی صفحه تختی با سرعت $35 \frac{m}{s}$ جریان دارد. طول صفحه $75 cm$ و دمای آن $60^\circ C$ است. به فرض عمق صفحه در راستای محور z برابر واحد باشد، انتقال گرما از صفحه را حساب کنید.

حل:

خواص فیزیکی در دمای فیلم را تعیین می‌کنیم:

$$T_f = \frac{20 + 60}{2} = 40^\circ C = 313 K$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1/0132 \times 10^5}{(287)(313)} = 1/128\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu = 1/9056 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{m.s}$$

$$Pr = 0.7 \qquad k = 0.02723\ \frac{W}{m.^\circ C} \qquad c_p = 1/007 \frac{kJ}{kg.^\circ C}$$

عدد رینولدز برابر است با:

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{(1/128)(35)(0/75)}{1/9056 \times 10^{-5}} = 1/553 \times 10^6$$

و لایه مرزی ناآرام است زیرا عدد رینولدز بیش‌تر از 5×10^5 می‌باشد. بنابراین برای محاسبه انتقال گرمای متوسط روی صفحه از معادلهٔ (۵-۸۵) استفاده می‌کنیم:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = Pr^{\frac{1}{3}} (0.037\, Re_L^{0.8} - 871)$$
$$= (0.7)^{\frac{1}{3}} [(0.037)(1/553 \times 10^6)^{0.8} - 871] = 2180$$

$$\bar{h} = \overline{Nu}_L \frac{k}{L} = \frac{(2180)(0.02723)}{0.75} = 79/1\ \frac{W}{m^2.^\circ C} \left[13/9 \frac{Btu}{h.ft^2.^\circ F} \right]$$

$$q = \bar{h} A (T_w - T_\infty) = (79/1)(0/75)(60 - 20) = 2373\, W \left[8150 \frac{Btu}{h} \right]$$

۵-۹ ضخامت لایه مرزی ناآرام

برخی بررسی‌های تجربی نشان داده‌اند که نیم‌رخ سرعت در لایه مرزی ناآرام، بیرون زیرلایه آرام، را می‌توان با رابطهٔ توان یک هفتم زیر بیان کرد:

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \qquad (۸۸-۵)$$

که مثل گذشته δ ضخامت لایه مرزی است. انتگرال اندازه حرکت را در تحلیل انتگرالی، با معادلهٔ (۵-۸۸) ارزیابی می‌کنیم زیرا زیرلایه آرام خیلی نازک است. گرچه، نمی‌توان تنش برشی دیوار را از معادلهٔ (۵-۸۸) محاسبه کرد زیرا مقدار آن در $y = 0$ بی‌نهایت می‌شود.

برای تعیین ضخامت لایه مرزی ناآرام از معادلهٔ (۵-۱۷) به عنوان رابطهٔ اندازه حرکت انتگرالی استفاده کرده، تنش برشی دیوار را از روابط تجربی اصطکاک پوستی قبل ارزیابی می‌کنیم. طبق معادلهٔ (۵-۵۲):

$$\tau_w = \frac{C_f \rho u_\infty^2}{2}$$

و بنابراین برای $Re_x < 10^7$ از معادلهٔ (۵-۷۷) داریم:

$$\tau_w = 0.0296 \left(\frac{\nu}{u_\infty x} \right)^{\frac{1}{5}} \rho u_\infty^2 \qquad (۸۹-۵)$$

اکنون، با استفاده از معادله اندازه حرکت انتگرالی به ازای گرادیان فشار صفر [معادله (۵-۱۷)] همراه با نیم‌رخ سرعت و تنش برشی دیوار داریم:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right] \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy = 0.0296 \left(\frac{\nu}{u_\infty x} \right)^{\frac{1}{5}}$$

با انتگرال‌گیری و ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7} (0.0296) \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} x^{-\frac{1}{5}} \qquad (۹۰-۵)$$

این معادله را برای دو وضع فیزیکی انتگرال‌گیری می‌کنیم:

۱ - لایه مرزی از لبه بالاروند صفحه، کاملاً ناآرام باشد.

۲ - لایه مرزی تا $Re_{\text{بحرانی}} = 5 \times 10^5$ دارای الگوی رشد آرام است و سپس رشد آن ناآرام می‌شود.

برای حالت اول معادلهٔ (۵-۹۰) را با این شرط که در $x = 0$ و مقدار $\delta = 0$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\frac{\delta}{x} = 0.381\, Re_x^{-\frac{1}{5}} \qquad (۹۱-۵)$$

برای مورد ۲ شرط زیر را داریم:

$$\delta = \delta_{lam} \qquad \text{در} \quad x_{crit} = 5 \times 10^5 \frac{\nu}{u_\infty} \qquad (۹۲-۵)$$

حالا δ_{lam} را از رابطهٔ دقیق (۵-۲۱ الف) محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_{lam} = ۵/۰\, x_{crit}\, (۵\times ۱۰^{۵})^{-\frac{۱}{۲}} \qquad (۹۳\text{-}۵)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۵-۸۹) داریم:

$$\delta - \delta_{lam} = \frac{۷۲}{۷}\,(۰/۰۲۹۶)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{\frac{۱}{۵}} \frac{۵}{۴}\,(x^{\frac{۴}{۵}} - x_{crit}^{\frac{۴}{۵}}) \qquad (۹۴\text{-}۵)$$

با ترکیب روابط مختلف بالا داریم:

$$\frac{\delta}{x} = ۰/۳۸۱\, Re_x^{-\frac{۱}{۵}} - ۱۰۲۵۶\, Re_x^{-۱} \qquad (۹۵\text{-}۵)$$

این رابطه تنها برای ناحیه $۱۰^{۷} > Re_x > ۱۰^{۵} \times ۵$ به‌کار می‌رود.

مثال ۵-۹ ضخامت لایهٔ مرزی ناآرام

ضخامت لایه مرزی ناآرام را در انتهای صفحه مثال ۵-۷ حساب کنید. به فرض این لایه (الف) از لبه بالاروند صفحه و (ب) از نقطهٔ گذار در $Re_{بحرانی} = ۵\times ۱۰^{۵}$ شروع می‌شود.

حل :

عدد رینولدز را قبلاً $Re_L = ۱/۵۵۳\times ۱۰^{۶}$ حساب کرده‌ایم. با جای‌گزینی این مقدار و $x = L = ۰/۷۵\,\text{m}$ در معادله (۵-۹۱) و (۵-۹۵) داریم:

(الف)
$$\delta = (۰/۷۵)(۰/۳۸۱)(۱/۵۵۳\times ۱۰^{۶})^{-۰/۲}$$
$$= ۰/۰۱۶۵\text{m} = ۱۶/۵\text{mm} \quad [۰/۶۵\ \text{in}]$$

(ب)
$$\delta = (۰/۷۵)[(۰/۳۸۱)(۱/۵۵۳\times ۱۰^{۶})^{-۰/۲}$$
$$- ۱۰۲۵۶(۱/۵۵۳\times ۱۰^{۶})^{-۱}]$$
$$= ۰/۰۰۹۹\text{m} = ۹/۹\text{mm}\ [۰/۳۹\ \text{in}]$$

تفاوت دو مقدار فوق ۴۰ درصد است.

۵-۱۰ انتقال گرما در جریان آرام لوله

سیستم جریان در لوله شکل ۵-۱۳ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم انتقال گرما را در شرایطی محاسبه کنیم که جریان گسترش یافته، آرام باقی می‌ماند. دمای دیوار T_w، شعاع لوله r_o و سرعت در مرکز لوله $u_\circ$ است. فشار در هر مقطع یکنواخت فرض می‌شود. پخش سرعت را می‌توان با در نظر گرفتن ***جزء سیال*** شکل ۵-۱۴ به‌دست آورد. نیروهای فشاری با نیروهای برشی لزجی موازنه می‌شوند، بنابراین:

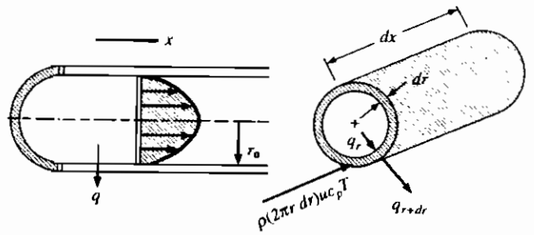
$$\pi r^{۲}\, dp = \tau\, ۲\pi r\, dx = ۲\pi r\mu\, dx\, \frac{du}{dr}$$

یا:
$$du = \frac{۱}{۲\mu}\, r\, \frac{dp}{dx}\, dr$$

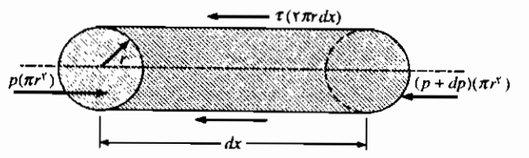
و:
$$u = \frac{۱}{۴\mu}\, \frac{dp}{dx}\, r^{۲} + \text{ثابت} \qquad (۹۶\text{-}۵)$$

با شرط مرزی زیر:

$$u = ۰ \qquad \text{در} \qquad r = r_\circ$$
$$u = \frac{۱}{۴\mu}\, \frac{dp}{dx}\,(r^{۲} - r_\circ^{۲})$$



شکل ۵-۱۳ حجم کنترل برای تحلیل انرژی در جریان لوله.



شکل ۵-۱۴ موازنهٔ نیرو روی جزء سیال در جریان لوله.

سرعت در مرکز لوله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$u_\circ = -\frac{r_\circ^{۲}}{۴\mu}\, \frac{dp}{dx} \qquad (۹۷\text{-}۵)$$

بنابراین پخش سرعت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{u}{u_\circ} = ۱ - \frac{r^{۲}}{r_\circ^{۲}} \qquad (۹۸\text{-}۵)$$

که همان پخش سرعت سهمی شکل جریان لوله‌ای آرام است. حالا فرآیند انتقال گرمای این سیستم جریان را در نظر بگیرید. برای سادگی تحلیل، شار گرمایی ثابتی را در دیوار لوله فرض می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{dq_w}{dx} = ۰$$

جریان گرمای هدایتی به‌داخل این جزء حلقوی برابر است با:

$$dq_r = -\, k\, ۲\pi r\, dx\, \frac{\partial T}{\partial r}$$

و گرمای هدایتی به بیرون برابر است با:

$$dq_{r+dr} = -\, k\, ۲\pi\, (r + dr)\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^{۲} T}{\partial r^{۲}}\, dr\right)$$

گرمای خالص جابه‌جا شده به بیرون از این جزء برابر است با:

$$۲\pi r\, dr\, \rho c_p \mu\, \frac{\partial T}{\partial x}\, dx$$

موازنه انرژی چنین است:

گرمای خالص هدایت شده به‌داخل = انرژی خالص جابه‌جا شده به بیرون

و یا با صرف‌نظر از مشتقات مرتبه دوم:

$$r\rho c_p\, u\, \frac{\partial T}{\partial x}\, dx\, dr = k \left(\frac{\partial T}{\partial r} + r\, \frac{\partial^{۲} T}{\partial r^{۲}}\right) dx\, dr$$

که می‌توان آن‌را چنین نوشت:

$$\frac{۱}{ur}\, \frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{۱}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۹۹\text{-}۵)$$

شار گرمایی در دیوار را ثابت فرض می‌کنیم. بنابراین، دمای متوسط سیال باید نسبت به x، به‌صورت خطی افزایش یابد و یا:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{ثابت}$$

این بدان معنی است که نیم‌رخ‌های دما در xهای متفاوت در طول لوله مشابه‌اند. شرایط مرزی برای معادله (۵-۹۹) عبارتند از:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = ۰ \qquad \text{در } r = ۰$$

$$k\, \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_\circ} = q_w = \text{ثابت}$$

برای حل معادلهٔ (۵-۹۹) باید پخش سرعت از معادله (۵-۹۸) را جای‌گزین کنیم. فرض بر آن است که میدان‌های دما و سرعت مستقل‌اند؛ یعنی گرادیان دما بر محاسبه نیم‌رخ سرعت تأثیری ندارد. این معادل آن است که بگوییم خواص فیزیکی جریان، ثابت می‌مانند. با جای‌گزینی نیم‌رخ سرعت در معادله (۵-۹۹) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{۱}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x}\, u_\circ \left(۱ - \frac{r^{۲}}{r_\circ^{۲}}\right) r$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$r\, \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{۱}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x}\, u_\circ \left(\frac{r^{۲}}{۲} - \frac{r^{۴}}{۴r_\circ^{۲}}\right) + C_۱$$

و با انتگرال‌گیری مجدد داریم:

$$T = \frac{۱}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x}\, u_\circ \left(\frac{r^{۴}}{۴} - \frac{r^{۶}}{۱۶r_\circ^{۲}}\right) + C_۱ \ln r + C_۲$$

با اعمال اولین شرط مرزی داریم:

$$C_۱ = ۰$$

با توجه به اینکه گرادیان دمای محوری $\frac{\partial T}{\partial x}$ ثابت است، دومین شرط مرزی صادق بوده است. و بالاخره می‌توان پخش دما را برحسب دما در مرکز لوله نوشت:

$$T = T_c \qquad \text{در } r = ۰ \quad \text{بنابراین } C_۲ = T_c$$

$$T - T_c = \frac{۱}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x}\, \frac{u_\circ r_\circ^{۲}}{۴} \left[\left(\frac{r}{r_\circ}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴}\left(\frac{r}{r_\circ}\right)^{۴}\right] \qquad (۱۰۰\text{-}۵)$$

دمای کپه‌ای

معمولاً ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در جریان لوله چنین تعریف می‌شود:

$$q'' = h\,(T_w - T_b) = \text{شار گرمایی موضعی} \qquad (۱۰۱\text{-}۵)$$

که T_w دمای دیوار و T_b ***دمای کپه‌ای***، یا دمای ***سیال انرژی*** متوسط در عرض لوله است که چنین محاسبه می‌شود:

$$T_b = \bar{T} = \frac{\int_\circ^{r_\circ} \rho ۲\, \pi r\, dr\, uc_p\, T}{\int_\circ^{r_\circ} \rho ۲\, \pi r\, dr\, uc_p} \qquad (۱۰۲\text{-}۵)$$

دلیل استفاده از دمای کپه‌ای در تعریف ضرایب انتقال گرما برای جریان لوله را می‌توان چنین توضیح داد. در جریان لوله شرط جریان - آزاد که به‌آسانی قابل تشخیص باشد مثل جریان روی صفحه تخت وجود ندارد. حتی دمای خط مرکزی، T_c، به‌آسانی برحسب متغیرهای جریان ورودی و انتقال گرما بیان نمی‌شود. مسأله اصلی در بسیاری از مسائل انتقال گرما در جریان لوله یا کانال، انرژی کلی است که در طول جزئی لوله در سراسر طول کانال به سیال انتقال یافته است. در هر موقعیت x، دمای مشخص‌کننده انرژی کل جریان، دمای متوسط انرژی جرمی انتگرال‌گیری شده در سراسر سطح جریان است. صورت کسر در معادله (۵-۱۰۲) کل جریان انرژی در لوله و مخرج آن حاصل‌ضرب جریان جرمی و گرمای ویژهٔ انتگرال‌گیری شده روی سطح جریان را نشان می‌دهد. بنابراین دمای کپه‌ای نمایش‌گر انرژی کل جریان در محلی ویژه است. به این دلیل، دمای کپه‌ای را گاهی دمای «ناو آمیزش» می‌نامند. زیرا چنان‌چه سیال را در اتاقک آمیزش قرار دهیم و بگذاریم تا به تعادل برسد، دمای آن برابر این مقدار می‌شود. دمای کپه‌ای برای پخش دمایی معادلهٔ (۵-۱۰۰) تابعی خطی از x است زیرا شار گرمایی دیوار لوله ثابت است. با محاسبه دمای کپه‌ای از معادله (۵-۱۰۲) داریم:

$$T_b = T_c + \frac{۷}{۴۸}\, \frac{u_\circ r_\circ^{۲}}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۱۰۳\text{-}۵)$$

و دمای دیواره برابر است با:

$$T_w = T_c + \frac{۱۱}{۹۶}\, \frac{u_\circ r_\circ^{۲}}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۱۰۴\text{-}۵)$$

ضریب انتقال گرما از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$q = hA\,(T_w - T_b) = kA \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_\circ}$$

$$y = \frac{k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_\circ}}{T_w - T_b} \qquad (۱۰۵\text{-}۵)$$

گرادیان دما از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_\circ} = \frac{u_\circ}{\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{r}{۲} - \frac{r^{۴}}{۴r_\circ^{۲}}\right)_{r=r_\circ} = \frac{u_\circ r_\circ}{۴\alpha}\, \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۱۰۶\text{-}۵)$$

با جای‌گزینی معادلات (۵-۱۰۳) و (۵-۱۰۴) و (۵-۱۰۶) در معادلهٔ (۵-۱۰۵) داریم:

$$h = \frac{۲۴}{۱۱}\, \frac{k}{r_\circ} = \frac{۴۸}{۱۱}\, \frac{k}{d_\circ}$$

که چنان‌چه برحسب عدد نوسلت بیان شود نتیجه چنین می‌شود:

$$Nu_d = \frac{hd_\circ}{k} = ۴/۳۶۴ \qquad (۱۰۷\text{-}۵)$$

که با محاسبه دقیق سلارز Sellars، تریبوس Tribus و کلاین Klein [۳] که نیم‌رخ دما را ضمن توسعه بررسی می‌کنند، تطابق دارد. در فصل ۶ برای محاسبه انتقال گرما در جریان آرام در لوله چند رابطه تجربی عرضه می‌شود.

یادآور می‌شویم که وقتی می‌گویند سیال در دمای معینی وارد لوله‌ای می‌شود منظور در دمای کپه‌ای است. در معادلات توازن انرژی کل در سیستم‌ها از دمای کپه‌ای استفاده می‌شود.

❑ ۵-۱۱ جریان ناآرام در لوله

نیم‌رخ سرعت جریان ناآرام در لوله طبق شکل ۵-۱۵ است. زیر لایه آرام یا «فیلم» فضای نزدیک سطح را اشغال می‌کند در حالی‌که هسته مرکزی جریان ناآرام است. برای تعیین تحلیلی انتقال گرما در این وضعیت طبق معمول باید پخش دما در جریان را بدانیم. در این تحلیل، برای یافتن پخش دما باید اثر گردابه‌های ناآرام در انتقال گرما و اندازه حرکت را در نظر گرفت. از تحلیل تقریبی که هدایت و انتقال گرما را به انتقال اندازه حرکت در جریان، یعنی آثار لزجی، ربط می‌دهد استفاده می‌کنیم.

جریان گرما در عرض جزء سیال در جریان آرام را می‌توان چنین بیان کرد:

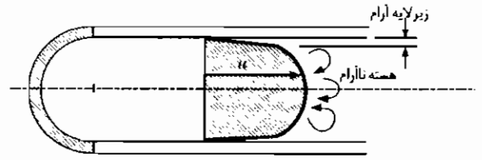
$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dy}$$

با تقسیم دو طرف معادله بر ρc_p داریم:

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -\alpha\frac{dT}{dy}$$

به یاد آورید که α ضریب پخشیدگی ملکولی گرما است. به فرض انتقال گرما در جریان ناآرام چنین بیان می‌شود:

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -(\alpha + \varepsilon_H)\frac{dT}{dy} \qquad (۵-۱۰۸)$$



شکل ۵-۱۵ نیم‌رخ سرعت در جریان لوله ناآرام.

که ε_H ضریب پخشیدگی گردابی گرما است.

معادلهٔ (۵-۱۰۸) هدایت گرمای کل را به‌صورت مجموعی از هدایت ملکولی و هدایت گردابی ماکروسکوپی بیان می‌کند. به‌طریق مشابه، تنش برشی در جریان ناآرام را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_M\right)\frac{du}{dy} = (\nu + \varepsilon_M)\frac{du}{dy} \qquad (۵-۱۰۹)$$

که ε_M ضریب پخشیدگی گردابی اندازه حرکت است. اکنون آهنگ انتقال گرما و اندازه حرکت را یکسان فرض می‌کنیم، یعنی: $\varepsilon_M = \varepsilon_H$ و $Pr = \nu = \alpha$ یا ۱.

با تقسیم معادله (۵-۱۰۸) بر معادلهٔ (۵-۱۰۹) داریم:

$$\frac{q}{c_p A\tau}du = -dT$$

فرض دیگر آن است که نسبت انتقال گرمای واحد سطح به تنش برشی، در عرض میدان جریان ثابت است. این فرض با فرضی که گرما و اندازه حرکت با آهنگ یکسان انتقال می‌یابند، سازگار است. بنابراین:

$$\frac{q}{A\tau} = \text{ثابت} = \frac{q_w}{A_w\tau_w} \qquad (۵-۱۱۰)$$

سپس، با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۵-۱۰۹) بین شرایط دیوار و شرایط کپه‌ای متوسط داریم:

$$\frac{q_w}{A_w\tau_w c_p}\int_{u=0}^{u=u_m} du = \int_{T_w}^{T_b} -dT$$

$$\frac{q_w u_m}{A_w\tau_w c_p} = T_w - T_b \qquad (۵-۱۱۱)$$

ولی انتقال گرما در دیوار را می‌توان چنین بیان کرد:

$$q_w = hA_w(T_w - T_b)$$

و تنش برشی را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\tau_w = \frac{\Delta p\,(\pi d_0^2)}{4\pi d_0 L} = \frac{\Delta p}{4}\frac{d_0}{L}$$

افت فشار را می‌توان برحسب ضریب اصطکاک f چنین بیان کرد:

$$\Delta p = f\frac{L}{d}\rho\frac{u_m^2}{2} \qquad (۵-۱۱۲)$$

بنابراین:

$$\tau_w = \frac{f}{8}\rho u_m^2 \qquad (۵-۱۱۳)$$

با جای‌گزینی عبارت مربوط به τ_w و q_w در معادله (۵-۱۱۱) داریم:

$$St = \frac{h}{\rho c_p u_m} = \frac{Nu_d}{Re_d Pr} = \frac{f}{8} \qquad (۵-۱۱۴)$$

معادله (۵-۱۱۴) تشابه رینولدزی جریان در لوله نامیده می‌شود. این رابطه آهنگ انتقال گرما را با اتلاف اصطکاکی در جریان لوله مربوط کرده، وقتی در مورد گازهایی با اعداد ***پراندل*** نزدیک به واحد به‌کار رود با نتایج آزمایشات تطابق خوبی دارد. (به‌یاد آورید که $Pr = 1$ یکی از فرض‌های این تحلیل بود).

یک فرمول تجربی برای ضریب اصطکاک ناآرام به‌ازای اعداد رینولدز تا حدود 2×10^5 برای جریان در لوله‌های صاف عبارت است از:

$$f = \frac{0/316}{Re_d^{1/4}} \qquad (۵-۱۱۵)$$

با جای‌گزینی این عبارت در معادلهٔ (۵-۱۱۳) داریم:

$$\frac{Nu_d}{Re_d Pr} = 0/0395\,Re_d^{-1/4}$$

یا: (۵-۱۱۶)

$$Nu_d = 0/0395\,Re_d^{7/8}$$

زیرا فرض کرده‌ایم که ***عدد پراندل*** برابر واحد باشد. کاربرد این رابطه انتقال گرمای ناآرام در لوله‌های صاف به‌دلیل فرض $Pr \approx 1/0$ بسیار محدود است. تشابه اصطکاک سیال - انتقال گرما در بخش

۵-۷ نشان داد که در مسأله صفحه تخت، وابستگی به عدد پراندل به‌صورت $Pr^{1/3}$ است و نتیجه می‌شود که برای جریان ناآرام در لوله این وابستگی نسبتاً خوب عمل می‌کند. معادلات (۵-۱۱۴) و (۵-۱۱۶) را می‌توان با این ضریب اصلاح کرد. داریم:

$$St\,Pr^{2/3} = \frac{f}{8} \qquad (۵-۱۱۴\text{ الف})$$

$$Nu_d = 0/0395\,Re_d^{7/8}Pr^{1/3} \qquad (۵-۱۱۶\text{ الف})$$

همان‌طور که در فصل ۶ می‌بینیم، ضرایب انتقال گرمای حاصل از معادله (۵-۱۱۶ الف) اندکی بیش‌تر از اعداد حاصل از آزمایش‌هاست. مقصود از بحث تا اینجا این بوده که نشان دهیم می‌توان به‌روش تحلیلی نسبتاً ساده به رابطه‌ای برای انتقال گرمای ناآرام رسید. همان‌طور که قبلاً نشان دادیم، برای بسط دقیق تشابه میان انتقال گرما و اصطکاک سیال باید بررسی‌هایی انجام داد که خارج از موضوع بحث ماست و طریق استدلال ساده‌ای که در اینجا انتخاب شد برای نشان دادن طبیعت عمومی فرآیندهای فیزیکی است.

معادله (۶-۴) رابطهٔ صحیح‌تری برای محاسبه ناآرام در لولهٔ صاف است و آن را برای مقایسه در اینجا عرضه می‌کنیم:

$$Nu_d = 0/023\,Re^{0/8}\,Pr^{0/4} \qquad (۶-۴)$$

کلیه خواص فیزیکی در معادله (۶-۴) در دمای کپه‌ای ارزیابی می‌شود.

❑ ۵-۱۲ انتقال گرما در جریان خیلی سریع

در تحلیل قبلی انتقال گرمای لایه مرزی (بخش ۵-۶) از آثار اتلاف لزجی داخل لایه مرزی صرف‌نظر شد. وقتی سرعت جریان آزاد خیلی بالا است، مثلاً در هواپیمای سریع پرواز، باید این آثار تلفاتی را در نظر گرفت. تحلیل را از مورد بی‌دررو، یعنی دیوار کاملاً عایق، شروع می‌کنیم. در این مورد دمای دیوار ممکن است خیلی بیش‌تر از دمای جریان آزاد باشد حتی اگر هیچ انتقال گرمایی صورت نگیرد. این دمای بالا از دو وضع نتیجه می‌شود: (۱) افزایش دمای سیال وقتی در سطح صفحه به حالت سکون در می‌آید و انرژی جنبشی سیال به انرژی گرمایی داخلی تبدیل می‌شود و (۲) تأثیر گرم شدن ناشی از اتلاف لزجی. وضع اول را در نظر بگیرید. وقتی گازی را به‌حالت سکون در می‌آوریم انرژی جنبشی آن تبدیل به انرژی گرمایی شده، این فرآیند با معادله انرژی جریان پایدار فرآیند بی‌دررو توصیف می‌شود:

$$i_0 = i_\infty + \frac{1}{2g_c}u_\infty^2 \qquad (۵-۱۱۷)$$

که i_0 آنتالپی رکود گاز است. این معادله را می‌توان برحسب دما چنین نوشت:

$$c_p(T_0 - T_\infty) = \frac{1}{2g_c}u_\infty^2$$

که T_0 دمای رکود و T_∞ دمای جریان آزاد ایستایی است. با بیان آن برحسب عدد ماخ جریان آزاد داریم:

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_\infty^2 \qquad (۵-۱۱۸)$$

که M_∞ عدد ماخ است که به‌صورت $M_\infty = \frac{u_\infty}{a}$ تعریف می‌شود و a سرعت صوت است که برای گاز کامل از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT} \qquad (۵-۱۱۹)$$

که R ثابت گازهاست.

در جریان لایه مرزی واقعی، سیال به‌طور واگشتنی به حال سکون درنمی‌آید زیرا کنش لزجت از نظر ترمودینامیکی فرآیندی برگشت‌ناپذیر است. به‌علاوه تمام انرژی جنبشی جریان آزاد به انرژی گرمایی تبدیل نمی‌شود بلکه بخشی از آن به‌صورت گرما و بخشی به شکل کار لزجی تلف می‌شود. برای به‌حساب آوردن برگشت‌ناپذیری‌ها در سیستم جریان لایه مرزی، ***ضریب بازیابی*** را چنین تعریف می‌کنیم:

$$r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \qquad (۵-۱۲۰)$$

که T_{aw} دمای بی‌دررو واقعی دیوار و T_∞ دمای ایستایی جریان آزاد است. ضریب بازیابی را می‌توان به‌طریق تجربی و یا برای بعضی از سیستم‌های جریان، با محاسبات تحلیلی به‌دست آورد.

معادله انرژی لایه مرزی:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (۵-۲۲)$$

برای جریان خیلی سریع با توجه به جملهٔ گرمایش لزجی، حل شده است. گرچه حل کامل آن تا حدودی پرزحمت است ولی نتایج نهایی خیلی ساده‌اند. ما تنها نتایج را ارائه کرده، چگونگی کاربرد آن‌را نشان می‌دهیم. خواننده را برای حل دقیق معادلهٔ (۵-۲۲) به پیوست B ارجاع می‌دهیم. اکرت Eckert [۴] خلاصه‌ای عالی از مسأله انتقال گرمای خیلی سریع در گزارش خود ارائه کرده است. بعضی از نیم‌رخ‌های نمونه دمای لایه مرزی دیوار بی‌دررو در جریان خیلی سریع در شکل B-۳ آورده شده است.

نتیجه اساسی از تحلیل انتقال گرمای خیلی سریع آن است که آهنگ انتقال گرما را عموماً می‌توان با همان روابط جریان غیرقابل تراکم سرعت پایین محاسبه کرد به شرطی که ضریب انتقال گرما را با رابطه زیر تعریف مجدد کنیم:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_{aw}) \qquad (۵-۱۲۱)$$

توجه کنید که در این رابطه از اختلاف دمای بی‌دررو دیوار و دمای واقعی دیوار استفاده شده است. پس وقتی دیوار به دمای بی‌دررو باشد جریان گرما از رابطه فوق برابر صفر است. برای گازها، به‌ازای اعداد ***پراندل*** نزدیک به واحد، ضریب بازیابی از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$r = Pr^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{جریان آرام} \qquad (۵-۱۲۲)$$

$$r = Pr^{\frac{1}{3}} \qquad \textit{جریان ناآرام} \qquad (۵-۱۲۳)$$

این ضرایب بازیابی را می‌توان همراه معادلهٔ (۵-۱۱۹) برای به‌دست آوردن دمای بی‌در روی دیوار به‌کار برد.

ممکن است گرادیان‌های دمای قابل توجهی در لایه‌های مرزی خیلی سریع به‌وجود آید و در نتیجه تغییرات خواص فیزیکی در عرض لایه مرزی زیاد باشد. در این حالت باز هم می‌توان از معادلات انتقال گرما با خواص ثابت استفاده کرد به شرطی که خواص فیزیکی را در دمای مرجعی T^* که اکرت [۴] توصیه می‌کند، در نظر بگیریم:

$$T^* = T_\infty + ۰/۵۰ (T_w - T_\infty) + ۰/۲۲ (T_{aw} - T_\infty) \qquad (۵-۱۲۴)$$

تشابه میان انتقال گرما و اصطکاک سیال [معادله (۵-۵۶)] را می‌توان با معلوم بودن ضریب اصطکاک نیز به‌کار برد. با خلاصه کردن روابط محاسبات انتقال گرمای خیلی سریع داریم:

لایه مرزی آرام ($Re_x < ۵ \times ۱۰^۵$):

$$St_x^* \, Pr^{*\frac{2}{3}} = ۰/۳۳۲ \, Re_x^{*-\frac{1}{2}} \qquad (۵-۱۲۵)$$

لایه مرزی ناآرام ($۵ \times ۱۰^۵ < Re_x < ۱۰^۷$):

$$St_x^* \, Pr^{*\frac{2}{3}} = ۰/۰۲۹۶ \, Re_x^{*-\frac{1}{5}} \qquad (۵-۱۲۶)$$

لایه مرزی ناآرام ($۱۰^۷ < Re_x < ۱۰^۹$)

$$St_x^* \, Pr^{*\frac{2}{3}} = ۰/۱۸۵ \, (\log Re_x^*)^{-۲/۵۸۴} \qquad (۵-۱۲۷)$$

بالانویس * در معادلات بالا نشان می‌دهد که خواص فیزیکی در دمای مرجعی ارزیابی شده‌اند که از معادله (۵-۱۲۴) به‌دست می‌آید.

برای به‌دست آوردن ضریب انتقال گرمای متوسط باید عبارات بالا را در طول صفحه انتگرال‌گیری کرد. چنان‌چه عدد رینولدز در محدوده‌ای قرار گیرد که مجبور شویم از معادله (۵-۱۲۷) استفاده کنیم، نمی‌توان انتگرال‌گیری را به شکل بسته بیان کرد و باید از انتگرال‌گیری عددی استفاده کرد. در انتگرال‌گیری مسأله انتقال گرمای سریع باید دقت کرد زیرا دمای مرجع بخش‌های آرام و ناآرام لایه مرزی به‌علت استفاده از ضریب بازیابی متفاوت برای جریان آرام و ناآرام از معادلات (۵-۱۲۲) و (۵-۱۲۳)، متفاوت است.

وقتی سرعت جریان خیلی زیاد باشد، ممکن است دمای بی‌دررو دیوار آن‌قدر بالا رود که گاز گسسته شده، تغییر خواص فیزیکی در لایه مرزی خیلی گسترده شود. اکرت [۴] توصیه می‌کند که این مسائل را بر اساس ضریب انتقال گرمایی بررسی کنیم که برحسب اختلاف ***آنتالپی*** تعریف می‌شود.

$$q = h_i A (i_w - i_{aw}) \qquad (۵-۱۲۸)$$

بنابراین ضریب بازیابی آنتالپی چنین تعریف می‌شود:

$$r_i = \frac{i_{aw} - i_\infty}{i_\circ - i_\infty} \qquad (۵-۱۲۹)$$

که i_{aw} آنتالپی در شرایط دیوار بی‌دررو است. همان روابط قبلی را برای محاسبه ضریب بازیابی و انتقال گرما به‌کار می‌بریم و تنها فرق آن این است که در اینجا تمام خواص فیزیکی در آنتالپی مرجع i^* ارزیابی می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$i^* = i_\infty + ۰/۵ (i_w - i_\infty) + ۰/۲۲ (i_{aw} - i_\infty) \qquad (۵-۱۳۰)$$

عدد استانتون چنین تعریف مجدد می‌شود:

$$St_i = \frac{h_i}{\rho u_\infty} \qquad (۵-۱۳۱)$$

سپس در محاسبه ضریب انتقال گرما، از این عدد استانتون در معادلات (۵-۱۲۵)، (۵-۱۲۶) یا (۵-۱۲۷) استفاده می‌شود. در محاسبه آنتالپی‌ها برای استفاده در روابط فوق باید از آنتالپی ***کل*** استفاده کرد؛ یعنی باید انرژی شیمیایی گسستگی و انرژی گرمایی داخلی را در نظر گرفت. دقت روش آنتالپی مرجع در محاسبه انتقال گرمای خیلی سریع، بیش از ۱۰٪ است.

مثال ۵-۱۰ انتقال گرمای خیلی سریع برای صفحهٔ تخت

صفحه‌ای تخت به‌طول ۷۰cm و عرض ۱/۰m را در تونل بادی قرار می‌دهیم که شرایط جریان در آن $M = ۳$ و $p = \frac{۱}{۳۰}$ atm و $T = -۴۰^\circ C$ است. برای آن‌که دمای صفحه به $۳۵^\circ C$ برسد چه‌قدر بار سرمایی باید به‌کار رود.

حل :

باید بخش‌های آرام و ناآرام لایه مرزی را جداگانه بررسی کنیم زیرا ضرایب بازیابی، و در نتیجه دماهای بی‌دررو دیوار، که در محاسبه جریان گرما به‌کار رفته‌اند برای هر یک از رژیم‌های جریان، متفاوت است. تفاوت آنها در این مسأله نسبتاً کم است، ولی روشی را دنبال می‌کنیم که برای تفاوت زیاد به‌کار می‌رود. بنابراین می‌توان روش عمومی حل را نشان داد. سرعت صوت جریان آزاد از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT_\infty} = [(۱/۴)(۱/۰)(۲۸۷)(۲۳۳)]^{\frac{1}{2}} = ۳۰۶ \ \frac{m}{s} \left[۱۰۰۳ \frac{ft}{s}\right]$$

بنابراین سرعت جریان آزاد عبارت است از:

$$u_\infty = (۳)(۳۰۶) = ۹۱۸ \ \frac{m}{s} \left[۳۰۱۲ \frac{ft}{s}\right]$$

عدد رینولدز بیشینه را با محاسبه بر پایه خواص فیزیکی در شرایط جریان آزاد به‌دست می‌آوریم:

$$\rho_\infty = \frac{(۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^۵)(\frac{۱}{۲۰})}{(۲۸۷)(۲۳۳)} = ۰/۰۷۵۸ \ \frac{kg}{m^۳} \left[۴/۷۳ \times ۱۰^{-۳} \frac{lb_m}{ft^۳}\right]$$

$$\mu_\infty = ۱/۴۳۴ \times ۱۰^{-۵} \ \frac{kg}{m.s} \qquad \left[۰/۰۳۴۷ \frac{lb_m}{h.ft}\right]$$

$$Re_{L,\infty} = \frac{(۰/۰۷۵۸)(۹۱۸)(۰/۷۰)}{۱/۴۳۴ \times ۱۰^{-۵}} = ۳/۳۹۵ \times ۱۰^۶$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که هر دو انتقال گرمای لایه مرزی آرام و ناآرام را باید در نظر گرفت. نخست دمای مرجع دو رژیم فوق را معین کرده، سپس خواص فیزیکی را در این دماها ارزیابی می‌کنیم.

بخش آرام

$$T_\circ - T_\infty \left(۱ + \frac{\gamma - ۱}{۲} M_\infty\right) = (۲۳۳)[۱ + (۰/۲)(۳)^۲] = ۶۵۲ \ K$$

با فرض آنکه عدد پراندل حدود ۰/۷ باشد داریم:

$$r = Pr^{\frac{1}{2}} = (۰/۷)^{\frac{1}{2}} = ۰/۸۳۷$$

$$r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_\circ - T_\infty} = \frac{T_{aw} - ۲۳۳}{۶۵۲ - ۲۳۳}$$

و $T_{aw} = ۵۸۴ \ K = ۳۱۱^\circ C \ [۵۹۲^\circ F]$. بنابراین دمای مرجع از معادلهٔ (۵-۱۲۳) برابر است با:

$$T^* = ۲۳۳ + (۰/۵)(۳۵ + ۴۰) + (۰/۲۲)(۵۸۴ - ۲۳۳) = ۳۴۷/۸ K$$

حال عدد پراندل را در این دما به‌دست می‌آوریم:

$$Pr^* = ۰/۶۹۷$$

پس این محاسبه معتبر است. چنان‌چه تفاوت مقدار Pr^* و مقدار به‌کار رفته در تعیین ضریب بازیابی زیاد باشد باید محاسبه را تکرار کرد تا مطابقت مطلوب حاصل شود.

سایر خواص مورد استفاده در تحلیل انتقال گرمای آرام عبارتند از:

$$\rho^* = \frac{(۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^۵)(\frac{۱}{۲۰})}{(۲۸۷)(۳۴۷/۸)} = ۰/۰۵۰۸ \ \frac{kg}{m^۳}$$

$$\mu^* = ۲/۰۷ \times ۱۰^{-۵} \ \frac{kg}{m.s}$$

$$k^* = ۰/۰۳ \ \frac{W}{m.^\circ C} \qquad \left[۰/۰۱۷۳ \frac{Btu}{h.ft.^\circ F}\right]$$

$$c_p^* = ۱/۰۰۹ \ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$$

بخش ناآرام

با فرض $Pr = ۰/۷$:

$$r = Pr^{\frac{1}{3}} = ۰/۸۸۸ = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_\circ - T_\infty} = \frac{T_{aw} - ۲۳۳}{۶۵۲ - ۲۳۳}$$

$$T_{aw} = ۶۰۵ \ K = ۳۳۲^\circ C$$

$$T^* = ۲۳۳ + (۰/۵)(۳۵ + ۴۰) + (۰/۲۲)(۶۰۵ - ۲۳۳) = ۳۵۲/۳ \ K$$

$$Pr^* = ۰/۶۹۵$$

ملاحظه می‌شود که عدد پراندل به‌دست آمده Pr^* خیلی به‌مقدار فرض شده نزدیک است. سایر خواص مورد استفاده در تحلیل انتقال گرمای ناآرام عبارتند از:

$$\rho^* = \frac{(۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^۵)(\frac{۱}{۲۰})}{(۲۸۷)(۳۵۲/۳)} = ۰/۰۵۰۱ \ \frac{kg}{m^۳}$$

$$\mu^* = ۲/۰۹ \times ۱۰^{-۵} \ \frac{kg}{m.s}$$

$$k^* = ۰/۰۳۰۲ \ \frac{W}{m.^\circ C}$$

$$c_p^* = ۱/۰۰۹ \ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$$

انتقال گرمای آرام

فرض می‌کنیم که:

$$Re^*_{\text{بحرانی}} = ۵ \times ۱۰^۵ = \frac{\rho^* u_\infty x_c}{\mu^*}$$

$$x_c = \frac{(۵ \times ۱۰^۵)(۲/۰۷ \times ۱۰^{-۵})}{(۰/۰۵۰۸)(۹۱۸)} = ۰/۲۲۲ \ m$$

$$\overline{Nu}^* = \frac{\bar{h} x_c}{k^*} = ۰/۶۶۴ \ (Re^*_{crit})^{\frac{1}{2}} Pr^{*\frac{1}{3}}$$

$$= (۰/۶۶۴)(۵ \times ۱۰^۵)^{\frac{1}{2}} (۰/۶۹۷)^{\frac{1}{3}} = ۴۱۶/۳$$

$$\bar{h} = \frac{(۴۱۶/۳)(۰/۰۳)}{۰/۲۲۲} = ۵۶/۲۵ \ \frac{W}{m^۲.^\circ C} \qquad \left[۹/۹۱ \frac{Btu}{h.ft^۲.^\circ F}\right]$$

این ضریب انتقال گرمای متوسط بخش آرام لایه مرزی است و انتقال گرما را چنین حساب می‌کنیم:

$$q = \bar{h} A (T_w - T_{aw})$$

$$= (۵۶/۲۶)(۰/۲۲۲)(۳۵ - ۳۱۱)$$

$$= -۳۴۴۵ \ W \qquad \left[-۱۱۷۵۰ \frac{Btu}{h}\right]$$

بنابراین در بخش آرام صفحه به‌ازای متر عمق در راستای محور z مقدار ۳۴۴۵ W بار سرمایی لازم است.

انتقال گرمای ناآرام

برای تعیین انتقال گرمای ناآرام باید عبارت ضریب انتقال گرمای موضعی را از فرمول زیر به‌دست آوریم:

$$St_x^* \, Pr^{*\frac{2}{3}} = ۰/۰۲۹۶ \, Re_x^{*-\frac{1}{5}}$$

و سپس از $x = ۰/۲۲۲ \ m$ تا $x = ۰/۷ m$ انتگرال می‌گیریم تا انتقال گرمای کل معین شود:

$$h_x = Pr^{*-\frac{2}{3}} \rho^* u_\infty c_p (۰/۰۲۹۶) \left(\frac{\rho^* u_\infty x}{\mu^*}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

با جای‌گزینی مقادیر عددی خواص فیزیکی داریم:

$$h_x = ۹۴/۳۴ \, x^{-\frac{1}{5}}$$

ضریب انتقال گرمای متوسط ناحیه ناآرام از فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$\bar{h} = \frac{\int_{۰/۲۲۲}^{۰/۷} h_x \, dx}{\int_{۰/۲۲۲}^{۰/۷} dx} = ۱۱۱/۴۶ \ \frac{W}{m^۲.^\circ C} \qquad \left[۱۹/۶ \frac{Btu}{h.ft^۲.^\circ F}\right]$$

با استفاده از این مقدار می‌توان انتقال گرمای ناحیه نا آرام صفحه تخت را حساب کـــــرد:

$$q = \bar{h}A\,(T_w - T_{aw})$$
$$= (۱۱۱/۴۶)(۰/۷ - ۰/۲۲۲)(۳۳۲ - ۳۵)$$
$$= -۱۵\,۸۲۳\,\text{W} \qquad \left[-۵۴۰۰۶\ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

کل مقدار بار سرمایی لازم برابر جمع انتقال گرمای بخش‌های آرام و ناآرام است:

سرمایش کل = ۳۴۴۵ + ۱۵ ۸۲۳ = ۱۹ ۲۶۸ W $\left[۶۵۷۶۱\ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$

در این محاسبات فرض بر آن است که عمق در راستای محور z برابر یک متر باشد.

۵-۱۳ خلاصه

در بخش اعظم این فصل جریان روی صفحات تخت و انتقال گرمای مربوط به آن بررسی شد. برای راحتی خواننده معادلات را همراه با محدودیت‌های مربوطه‌شان در جدول ۵-۲ خلاصه کرده‌ایم. روش کلی عبارت است از:

۱- خواص فیزیکی سیال را ارزیابی کنید. این خواص معمولاً در دمای فیلم ارزیابی می‌شود.
۲- شرایط مرزی را مشخص کنید، یعنی دما ثابت یا شار گرمایی ثابت.
۳- رژیم جریان را با توجه به عدد رینولدز مشخص کنید.
۴- معادله مناسب را با توجه به رژیم جریان و محدودیت‌های خواص فیزیکی سیال انتخاب کنید.
۵- مقدار (مقادیر) ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی و یا مقدار انتقال گرما را حساب کنید.

جدول ۵-۲ خلاصه معادلات جریان روی صفحات تخت

خواص فیزیکی در $T_f = \frac{T_w + T_\infty}{۲}$ ارزیابی شده‌اند مگر خلاف آن ذکر شود

رژیم جریان	محدودیت‌ها	معادله	شمارهٔ معادله
	انتقال گرما		
آرام، موضعی	T_w = ثابت, $Re_x < ۵\times۱۰^۵$ $۰/۶ < Pr < ۵۰$	$Nu_x = ۰/۳۳۲ Re_x^{۱/۲} Pr^{۱/۳}$	(۴۴-۵)
آرام، موضعی	T_w = ثابت, $Re_x < ۵\times۱۰^۵$, $Re_x\,Pr > ۱۰۰$	$Nu_x = \dfrac{۰/۳۳۸۷\, Re_x^{۱/۲} Pr^{۱/۳}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۰۴۶۸}{Pr}\right)^{۲/۳}\right]^{۱/۴}}$	(۵۱-۵)
آرام، موضعی	q_w = ثابت, $Re_x < ۵\times۱۰^۵$, $۰/۶ < Pr < ۵۰$	$Nu_x = ۰/۴۵۳ Re_x^{۱/۲} Pr^{۱/۳}$	(۴۸-۵)
آرام، موضعی	q_w = ثابت, $Re_x < ۵\times۱۰^۵$	$Nu_x = \dfrac{۰/۴۶۳۷\, Re_x^{۱/۲} Pr^{۱/۳}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۰۲۰۷}{Pr}\right)^{۲/۳}\right]^{۱/۴}}$	(۵۱-۵)
آرام، متوسط	T_w = ثابت و $Re_L < ۵\times۱۰^۵$	$\overline{Nu}_L = ۲Nu_{x=L} = ۰/۶۶۴ Re_L^{۱/۲} Pr^{۱/۳}$	(۴۶-۵)
آرام، موضعی	T_w = ثابت, $Re_x < ۵\times۱۰^۵$, (فلزات مایع) $Pr < ۱$	$Nu_x = ۰/۵۶۴ (Re_x\, Pr)^{۱/۲}$	
آرام، موضعی	T_w = ثابت, شروع در $x = x_۰$, $Re_x < ۵\times۱۰^۵$, $۰/۶ < Pr < ۵۰$	$Nu_x = ۰/۳۳۲ Re_x^{۱/۲} Pr^{۱/۳}\left[۱ - \left(\frac{x_۰}{x}\right)^{۳/۴}\right]^{-۱/۳}$	(۴۳-۵)
ناآرام، موضعی	T_w = ثابت, $۵\times۱۰^۵ < Re_x < ۱۰^۷$	$St_x\, Pr^{۲/۳} = ۰/۰۲۹۶ Re_x^{-۰/۲}$	(۸۱-۵)
ناآرام، موضعی	T_w = ثابت, $۱۰^۷ < Re_x < ۱۰^۹$	$St_x\, Pr^{۲/۳} = ۰/۱۸۵ (\log Re_x)^{-۲/۵۸۴}$	(۸۲-۵)

جدول ۵-۲ خلاصه معادلات جریان روی صفحات تخت (ادامه)

خواص فیزیکی در $T_f = \frac{T_w + T_\infty}{۲}$ ارزیابی شده‌اند مگر خلاف آن ذکر شود

رژیم جریان	محدودیت‌ها	معادله	شمارهٔ معادله
	انتقال گرما		
ناآرام، موضعی	q_w = ثابت, $۵\times۱۰^۵ < Re_x < ۱۰^۷$	ثابت $Nu_x = ۱/۰۴\, Nu_{xT_w=}$	(۸۷-۵)
آرام - ناآرام،	T_w = ثابت, $Re_x < ۱۰^۷$,	$\overline{St}\, Pr^{۲/۳} = ۰/۰۳۷ Re_L^{-۰/۲} - ۸۷۱ Re_L^{-۱}$	(۸۴-۵)
متوسط	$Re_{crit} = ۵\times۱۰^۵$	$\overline{Nu}_L = Pr^{۱/۳}(۰/۰۳۷ Re_L^{۰/۸} - ۸۷۱)$	(۸۵-۵)
آرام - ناآرام،	T_w = ثابت, $Re_x < ۱۰^۷$,	$\overline{Nu}_L = ۰/۰۳۶ Pr^{۰/۳۳} (Re_L^{۰/۸} - ۹۲۰۰) \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{۱/۴}$	(۸۶-۵)
متوسط	μ در T_∞، مایعات		
	μ_w در T_w		
جریان خیلی سریع	T_w = ثابت,	مثل معادلهٔ مربوط به جریان سریع با خواص فیزیکی ارزیابی شده در $T^* = T_\infty + ۰/۵(T_w - T_\infty) + ۰/۲۲(T_{aw} - T_\infty)$	
	$q = hA\,(T_w - T_{aw})$		
	$r = \dfrac{(T_{aw} - T_\infty)}{(T_o - T_\infty)}$		
	ضریب بازیابی =		
	$= Pr^{۱/۲}$ (آرام)		
	$= Pr^{۱/۳}$ (ناآرام)		

ضخامت لایه مرزی			
آرام	$Re_x < ۵\times۱۰^۵$	$\dfrac{\delta}{x} = ۵/۰\, Re_x^{-۱/۲}$	(۵-۲۱ الف)
ناآرام	$Re_x < ۱۰^۷$	$\dfrac{\delta}{x} = ۰/۳۸۱\, Re_x^{-۱/۵}$	(۵-۹۱)
ناآرام	$۵\times۱۰^۵ < Re_x < ۱۰^۷$, $Re_{crit} = ۵\times۱۰^۵$, $\delta = \delta_{\text{lam}}$ در Re_{crit}	$\dfrac{\delta}{x} = ۰/۳۸۱\, Re_x^{-۱/۵} - ۱۰۲۵۶\, Re_x^{-۱}$	

ضرایب اصطکاک			
آرام، موضعی	$Re_x < ۵\times۱۰^۵$	$C_{fx} = ۰/۶۶۴\, Re_x^{-۱/۲}$	(۵-۵۴)
ناآرام، موضعی	$۵\times۱۰^۵ < Re_x < ۱۰^۷$	$C_{fx} = ۰/۰۵۹۲\, Re_x^{-۱/۵}$	(۵-۷۷)
ناآرام، موضعی	$۱۰^۷ < Re_x < ۱۰^۹$	$C_{fx} = ۰/۳۷\,(\log Re_x)^{-۲/۵۸۴}$	(۵-۷۸)
ناآرام، متوسط	$Re_{crit} < Re_x < ۱۰^۹$	$\bar{C}_f = \dfrac{۰/۴۵۵}{(\log Re_L)^{۲/۵۸۴}} - \dfrac{A}{Re_L}$	(۵-۷۹)

A از جدول ۵-۱ برداشت می‌شود.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ منظور از تراز مرزی هیدرودینامیکی چیست؟
۲ عدد رینولدز را تعریف کنید. چرا این عدد مهم است؟
۳ ساز و کار فیزیکی کنش لزجت چیست؟
۴ جریان آرام و ناآرام را از نظر فیزیکی چگونه تشخیص می‌دهید؟
۵ معادله اندازه حرکت برای لایه مرزی آرام روی صفحه تخت چیست؟ برای یافتن این معادله چه فرض‌هایی در نظر گرفته شده است؟
۶ ضخامت لایه مرزی را تعریف کنید.
۷ معادله انرژی لایه مرزی آرام روی صفحه تخت چیست؟ چه فرض‌هایی برای یافتن این معادله در نظر گرفته شده است؟
۸ منظور از لایه مرزی گرمایی چیست؟
۹ عدد پراندل را تعریف کنید. چرا این عدد مهم است؟
۱۰ ساز و کار فیزیکی جابه‌جایی را توصیف کنید. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی چه ربطی با این سازوکار دارد؟
۱۱ رابطه بین اصطکاک سیال و انتقال گرما را توصیف کنید.
۱۲ دمای کپه‌ای را تعریف کنید. چگونه از آن استفاده می‌شود؟
۱۳ ضریب انتقال گرما در محاسبات انتقال گرمای خیلی سریع چگونه تعریف می‌شود؟

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۵-۱ آب جاری در وافشانه
۵-۲ انبساط بی‌دررو هوا
۵-۳ جریان جرم و ضخامت لایه مرزی
۵-۴ صفحهٔ تخت هم‌دمایی که در سراسر طولش گرما می‌بیند
۵-۵ صفحه تخت با شار گرمایی ثابت
۵-۶ جریان روغن روی صفحهٔ تخت گرم شده
۵-۷ نیروی کشش روی صفحهٔ تخت
۵-۸ انتقال گرمای ناآرام از صفحهٔ تخت هم‌دما
۵-۹ ضخامت لایه مرزی ناآرام
۵-۱۰ انتقال گرمای خیلی سریع برای صفحهٔ تخت

❑ مسائل

۵-۱ برای منبسط کردن هوا از شرایط رکود ۱/۳۸ MPa و ۲۰۰°C به ۰/۱۳۸ MPa شیپوره‌ای طراحی شده است. آهنگ جرمی جریان در این شیپوره $۴/۵ \frac{kg}{s}$ است. به فرض شیپوره در ترکیب با وسیله تونل باد بلودون* به کار می‌رود به‌طوری که شیپوره ناگهان در داخل مخزنی کاملاً تخلیه‌شده، خالی می‌شود. دمای هوای مخزن وقتی که فشار آن ۰/۱۳۸ MPa می‌شود چقدر است؟ به فرض مخزن کاملاً عایق‌شده، هوا به‌صورت گاز کامل رفتار می‌کند و انبساط در شیپوره هم‌آنتروپی است.

۵-۲ با استفاده از نیم‌رخ سرعت خطی

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{\delta}$$

برای جریان روی صفحهٔ تخت، عبارت ضخامت لایه مرزی را به صورت تابعی از x بیابید.

۵-۳ با استفاده از رابطه پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = ۰$$

و پخش سرعت:

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{۳}{۲}\frac{y}{\delta} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{y}{\delta}\right)^۳$$

و عبارت مربوط به ضخامت لایهٔ مرزی:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{۴/۶۴}{\sqrt{Re_x}}$$

عبارتی برای مؤلفهٔ سرعت v به صورت تابعی از x و y بیابید. مقدار v را در لبهٔ بیرونی لایه مرزی و در فواصل ۶ و ۱۲ اینچی از لبهٔ بالاروند در شرایط مسأله ۵-۳ بیابید.

۵-۴ مسأله ۵-۳ را برای نیم‌رخ سرعت خطی مسألهٔ ۵-۲ تکرار کنید.

۵-۵ با استفاده از نیم‌رخ سرعت خطی مسألهٔ ۵-۲ و پخش دمایی سهمی درجه سوم [معادلهٔ (۵-۳۰)] عبارتی برای ضریب انتقال گرما به صورت تابعی از عدد رینولدز لایه مرزی آرام روی صفحه‌ای تخت بیابید.

۵-۶ هوای با فشار ۲۰ kPa و دمای ۵°C با سرعت $۱/۵ \frac{m}{s}$ وارد لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm می‌شود. با استفاده از تحلیل صفحهٔ تخت، فاصله‌ای از مدخل را حساب کنید که در آن جریان کاملاً توسعه‌یافته است.

۵-۷ سیالی بین دو صفحهٔ موازی بزرگ جریان می‌یابد. عبارتی برای پخش سرعت به‌صورت تابعی از فاصله از خط مرکزی بین دو صفحه در شرایطی که جریان کاملاً توسعه‌یافته باشد، بیابید.

۵-۸ با استفاده از معادلهٔ انرژی (۵-۳۲) عبارتی برای ضریب انتقال گرما در شرایط زیر بیابید.

$$u = u_\infty \quad \text{ثابت} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{y}{\delta_t}$$

۵-۹ برای انتقال گرما در لایه مرزی آرام روی صفحهٔ تخت در شرایط ثابت $u = u_x$ عبارتی بیابید. به فرض پخش دما از رابطهٔ سهمی درجه سوم در معادلهٔ (۵-۳۰) به‌دست آید. این راه‌حل شرطی را تقریب می‌زند که در جریان فلز سیال روی صفحهٔ تخت مشاهده شد.

۵-۱۰ نشان دهید که برای لایه مرزی آرام غیرقابل تراکم روی صفحهٔ تخت با گرادیان فشار صفر در $y = ۰$ داریم $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$.

۵-۱۱ راه‌حل‌های تحلیلی این فصل را مرور کرده، محدودیت‌های اعمال شده در معادلات (۵-۲۵)، (۵-۲۶)، (۵-۴۴)، (۵-۴۶)، (۵-۸۵) و (۵-۱۰۷) را ذکر کنید.

۵-۱۲ نسبت ضخامت لایه مرزی گرمایی به لایه مرزی هیدرودینامیکی برای سیالات زیر را حساب کنید: هوا در ۱ atm و ۲۰°C، آب در ۲۰°C، هلیم در ۱ atm و ۲۰°C، آمونیاک مایع در ۲۰°C، گلیسیرین در ۲۰°C.

۵-۱۳ برای آبی که با دمای ۱۵°C و سرعت $۳ \frac{m}{s}$ روی صفحه تختی جریان دارد جریان جرمی از لایهٔ مرزی را در فاصلهٔ ۵ cm از لبهٔ بالاروند صفحه حساب کنید.

* Blowdown Wind-Tunnel تونل بادی که گاز متراکم ذخیره شده در آن از مقطع آزمایش بیرون آمده، منبسط می‌شود و جریان گاز یا هوای مدل آزمایش را به‌وجود می‌آورد. (م)

۵-۱۴ هوایی به دمای ۹۰°C و ۱ atm فشار با سرعت $۳۰ \frac{m}{s}$ روی صفحهٔ تختی جریان دارد. ضخامت لایهٔ مرزی در فاصلهٔ ۲/۵ cm از لبه بالاروند صفحه چه‌قدر است؟

۵-۱۵ هوا روی صفحه‌ای تخت با سرعت ثابت $۲۰ \frac{m}{s}$ و شرایط محیطی ۲۰ kPa و ۲۰°C جریان می‌یابد. صفحه تا دمای ثابت ۷۵°C، با شروع از فاصله ۷/۵ cm لبهٔ بالاروند، گرم می‌شود. کل انتقال گرما از لبهٔ بالاروند تا نقطه‌ای در فاصلهٔ ۳۵ cm لبه بالاروند چه‌قدر است؟

۵-۱۶ بین دو صفحهٔ موازی بزرگ، آب به دمای ۱۵°C با سرعت $۱/۵ \frac{m}{s}$ جریان می‌یابد. فاصلهٔ دو صفحه ۱۵ mm است. فاصله از لبهٔ بالاروند محلی را بیابید که جریان کاملاً توسعه می‌یابد.

۵-۱۷ هوای تحت شرایط استاندارد ۱ atm و ۳۰°C روی صفحه‌ای تخت با سرعت $۲۰ \frac{m}{s}$ جریان می‌یابد. صفحه مربعی به ضلع ۶۰ cm و دمای آن ۹۰°C است. انتقال گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۱۸ هوا در ۷ kPa و ۳۵°C در عرض صفحه‌ای تخت و مربعی به ضلع ۳۰ cm با سرعت $۷/۵ \frac{m}{s}$ می‌گذرد. دمای صفحه ۶۵°C است. گرمای تلف شده از صفحه را حساب کنید.

۵-۱۹ هوا در ۹۰°C و فشار جو روی صفحه‌ای تخت افقی با سرعت $۶۰ \frac{m}{s}$ جریان دارد. صفحه مربعی به ضلع ۶۰ cm و دمای یکنواخت آن ۱۰°C می‌باشد. کل انتقال گرما چه‌قدر است؟

۵-۲۰ ضریب انتقال گرما را بر حسب طول برای جریان روی صفحه‌ای تخت به طول ۱ m در شرایط زیر رسم کنید: الف) هلیم در $۱ \frac{lb}{in^۲}$ مطلق، ۸۰°F، $\left[۳/۰۴۸ \frac{m}{s}\right]$ $u_\infty = ۱۰ \frac{ft}{s}$؛ ب) هیدروژن در $۱ \frac{lb}{in^۲}$ مطلق، ۸۰°F، $u_\infty = ۱۰ \frac{ft}{s}$؛ پ) هوا در $۱ \frac{lb}{in^۲}$ مطلق، ۸۰°F، $u_\infty = ۱۰ \frac{ft}{s}$؛ ت) آب در ۸۰°F، $u_\infty = ۱۰ \frac{ft}{s}$؛ ث) هلیم در $۲۰ \frac{lb}{in^۲}$ مطلق، ۸۰°F، $u_\infty = ۱۰ \frac{ft}{s}$

۵-۲۱ انتقال گرما از صفحه‌ای مربعی به ضلع ۳۰ cm را که روی آن هوای ۳۵°C و ۱۴ kPa جریان دارد حساب کنید. دمای صفحه ۲۵۰°C و سرعت جریان آزاد $۶ \frac{m}{s}$ است.

۵-۲۲ هوا با ۲۰ kPa و ۲۰°C در عرض صفحه‌ای تخت به طول ۶۰ cm جریان دارد. سرعت جریان آزاد $۳۰ \frac{m}{s}$ است و صفحه را در کل طولش تا دمای ۵۵°C گرم می‌کنیم. برای $x = ۳۰$ cm مقدار y را حساب کنید. که به ازای آن u برابر $۲۲/۵ \frac{m}{s}$ می‌شود.

۵-۲۳ برای سیستم جریان مسأله ۵-۲۲ مقدار ضریب اصطکاک را در فاصلهٔ ۱۵ cm از لبهٔ بالاروند حساب کنید.

۵-۲۴ هوا در ۵°C و ۷۰ kPa روی صفحه‌ای تخت با سرعت $۶ \frac{m}{s}$ جریان دارد. نوار گرم‌کنی به طول ۲/۵ cm روی این صفحه و در فاصلهٔ ۱۵ cm از لبهٔ بالاروند قرار داده می‌شود. گرمای تلف شده از نوار را در واحد عمق صفحه برای وقتی حساب کنید که دمای سطح گرم‌کن ۶۵°C باشد.

۵-۲۵ هوا در ۱ atm و ۲۷°C در عرض سطح بزرگ بتنی به عرض ۱۵ m و دمای ۵۵°C جریان دارد. سرعت جریان $۴/۵ \frac{m}{s}$ است. انتقال گرمای جابه‌جایی از این سطح را حساب کنید.

۵-۲۶ هوا در ۳۰۰ K و ۷۵ kPa روی صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱ m با سرعت $۴۵ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای ثابت صفحه ۴۰۰ K است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۲۷ ابعاد صفحه‌ای تخت افقی به دمای ۵۰°C برابر ۵۰ cm × ۵۰ cm است و در عرض آن هوای ۵۰ kPa و ۱۰°C با سرعت $۲۰ \frac{m}{s}$ جریان دارد. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۲۸ هوا با سرعت $۵ \frac{m}{s}$ در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۲۰ cm جریان دارد. شرایط جریان آزاد عبارتند از: ۱۰°C و ۰/۲ atm. گرم‌کنی در سطح صفحه شرط شار گرمایی ثابت را در دیوار به‌وجود می‌آورد به‌طوری که دمای متوسط دیواره برابر ۱۰۰°C است. شار گرمایی سطح و مقدار h را در x برابر ۱۰ cm حساب کنید.

۵-۲۹ سرعت جریان هر یک از سیالات زیر در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱ m چه‌قدر باشد تا عدد رینولدز $۱۰^۷$ به‌وجود آید: (الف) آب در ۲۰°C، (ب) هوا در ۱ atm و ۲۰°C، (پ) فریون ۱۲ در ۲۰°C، (ت) آمونیاک در ۲۰°C و (ث) هلیم در ۲۰°C.

۵-۳۰ متوسط ضریب انتقال گرما برای هر یک از حالات مسألهٔ ۵-۲۹ را حساب کنید. فرض کنید خواص فیزیکی در ۲۰°C ارزیابی شده باشد.

۵-۳۱ ضخامت لایه مرزی در انتهای صفحه را برای هر یک از حالات مسألهٔ ۵-۲۹ حساب کنید.

۵-۳۲ صفحه سیاه شده‌ای در معرض آفتاب قرار می‌گیرد به‌طوری که شار گرمایی ثابت $۸۰۰ \frac{W}{m^۲}$ جذب می‌شود. طرف پشت صفحه عایق‌شده است به‌طوری که تمام انرژی جذب شده به جریان هوایی که در عرض صفحه با شرایط ۲۵°C و ۱ atm و سرعت $۳ \frac{m}{s}$ می‌وزد، داده می‌شود. دمای متوسط صفحه را حساب کنید. دمای صفحه در لبه بالاروند چه‌قدر است؟ صفحه مربعی به ضلع ۲۵ cm است.

۵-۳۳ هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K در عرض صفحه‌ای تخت و مربعی به ضلع ۵۰ cm با سرعتی می‌وزد که عدد رینولدز در لبهٔ پایین دست جریان صفحه برابر $۱/۱ \times ۱۰^۵$ است. گرم شدن تا نصف طول صفحه شروع نشده و سپس دمای سطح برابر ۴۰۰ K است. انتقال گرما از صفحه را محاسبه کنید.

۵-۳۴ هوا با مشخصات ۲۰°C و ۱۴ kPa با سرعت $۱۵۰ \frac{m}{s}$ از روی صفحه‌ای تخت به طول ۱ m و دمای ثابت ۱۵۰°C عبور می‌کند. متوسط آهنگ انتقال گرمای واحد سطح صفحه چه‌قدر است؟

۵-۳۵ معادلات هم‌ارز با معادله (۵-۸۵) را به ازای اعداد رینولدز بحرانی ۳×۱۰^۵ و ۳×۱۰^۶ بیابید.

۵-۳۶ به‌فرض بتوان ضریب انتقال گرمای موضعی جریان روی صفحهٔ تخت را با معادلهٔ (۵-۸۱) نشان داد و لایهٔ مرزی در لبهٔ بالاروند صفحه شروع شود، عبارتی برای تعیین ضریب انتقال گرمای متوسط بیابید.

۵-۳۷ روی صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱۰ cm گرم‌کنی برقی نصف شده که شار گرمایی ثابتی تولید می‌کند. آب در ۱۰°C در عرض این صفحه با سرعت $۳ \frac{m}{s}$ جریان می‌یابد. کل گرمای انتشار یافته را در صورتی حساب کنید که دمای صفحه از ۸۰°C تجاوز نکند.

۵-۳۸ مسألهٔ ۵-۳۷ را برای هوای در ۱ atm و ۳۰۰ K تکرار کنید.

۵-۳۹ برای خنک کردن صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱ متر و دمای ۵۰۰ K از هلیم در ۱ atm و ۳۰۰ K استفاده می‌شود. سرعت جریان $50\ \frac{m}{s}$ است. اتلاف گرمای کل از صفحه را حساب کنید. ضخامت لایه مرزی را هنگام خروج جریان از صفحه حساب کنید.

۵-۴۰ برای سیستم جریان در مسأله ۵-۳۹ مقدار v در لایه مرزی را در لبهٔ بالاروند و در جایی حساب کنید که $u = 25\ \frac{m}{s}$ است.

۵-۴۱ در عرض ساختمانی فلزی، در فصل تابستان، نسیم ملایمی با سرعت $10\ \frac{mi}{h}$ می‌وزد. ارتفاع دیوار این ساختمان 12 ft و عرض آن 20 ft است. شار انرژی خالص خورشیدی به مقدار $110\ \frac{Btu}{h.ft^2}$ در دیوار جذب و سپس به طریق جابه‌جایی به هوای محیط پخش می‌شود. به‌فرض دمای هوا 80°F و فشار آن 1 atm بوده، در عرض دیوار مثل روی صفحه‌ای تخت بوزد، دمای متوسط دیوار را برای شرایط تعادل حساب کنید.

۵-۴۲ کف سرخ‌کن دانه ذرت به طول 10 ft و عرض 3 ft و دمای آن 420°F است. روغن پخت در عرض این سطح با سرعت $1\ \frac{ft}{s}$ جریان داشته و دمای آزاد آن 400°F است. انتقال گرما به روغن را حساب کرده، ضخامت لایهٔ مرزی بیشینه را بسیابید. خواص روغن را می‌توان به صورت $\nu = 2\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$ و $k = 0/12\ \frac{W}{m.°C}$ و $Pr = 40$ در نظر گرفت.

۵-۴۳ هوا به دمای 27°C و فشار 1 atm روی صفحه تخت مربعی به ضلع 0/4 m با سرعت $40\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. دمای صفحه 77°C است. انتقال گرمای کل را حساب کنید.

۵-۴۴ ابعاد پشت بام ساختمانی 30 در 60 m است و به علت گرمای ناشی از آفتاب دمای آن به 300 K می‌رسد، در حالی که دمای هوای محیط 0°C است. اتلاف گرما از پشت بام مذکور را وقتی نسیمی ملایم با سرعت $5\ \frac{mi}{h}$ در عرض آن بوزد ($L = 30$ m) حساب کنید.

۵-۴۵ هوا در 1 atm و 30°C روی صفحه‌ای مربعی به ضلع 15 cm با سرعت $10\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. ضخامت لایه مرزی بیشینه را حساب کنید.

۵-۴۶ هوا در 0/2 MPa و 25°C روی صفحه‌ای تخت با سرعت $60\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. صفحه مربعی به ضلع 0/5 متر و دمای ثابت آن 150°C است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۴۷ در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 1 m هلیم در فشار 150 kPa و دمای 20°C با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. دمای ثابت صفحه 100°C است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۴۸ هوا در 50 kPa و 250 K در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 2 m با سرعت $20\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. دمای ثابت صفحه 350 K است. اتلاف گرما از این صفحه را حساب کنید.

۵-۴۹ روی صفحه‌ای تخت ازت با 50 kPa و 300 K با سرعت $100\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. طول صفحه 1/2 m و دمای ثابت آن 400 K است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۵۰ در عرض صفحه‌ای تخت و مربعی به ضلع 1 m هیدروژن در 2 atm و 15°C با سرعت $6\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای ثابت صفحه 139°C است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۵۱ آمونیاک مایع به دمای 10°C را در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 45 cm با سرعت $5\ \frac{m}{s}$ می‌دوانند. دمای صفحه 50°C است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۵۲ در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 1 m هلیم با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. فشار هلیم 45 kPa و دمای آن 50°C است. دمای ثابت صفحه 136°C است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۵۳ روی صفحه‌ای تخت هوا به فشار 0/1 atm با سرعت $300\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای ثابت صفحه 100°C و دمای هوای جریان آزاد 10°C است. انتقال گرما برای صفحه‌ای مربعی به ضلع 80 cm را حساب کنید.

۵-۵۴ آب 70°F با سرعت $20\ \frac{ft}{s}$ در عرض صفحهٔ تخت مربعی به ضلع 1 ft جاری است. دمای ثابت صفحه 130°F است. اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۵۵ h_x را در مقابل x برای هوایی به فشار 1 atm و دمای 300 K که با سرعت $30\ \frac{m}{s}$ در عرض صفحه‌ای تخت می‌وزد رسم کنید. Re برحق 5×10^5 در نظر گرفته، از کاغذ رسم نیمه لگاریتمی استفاده کنید. منحنی را تا x هم‌ارز با $Re = 10^9$ ادامه دهید. ضریب انتقال گرمای متوسط را روی همین محدوده نیز رسم کنید.

۵-۵۶ هوا با سرعت $30\ \frac{m}{s}$ و با فشار 1 atm و دمای 350 K روی صفحهٔ تختی می‌وزد. جریان جرم را از لایهٔ مرزی در xهایی حساب کنید که 10^7 و $Re_x = 10^6$ است.

۵-۵۷ هوا با سرعت $6\ \frac{m}{s}$ در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 20 cm با 50 kPa و 300 K می‌وزد. گرم‌کن برقی در صفحه نصب شده است که شار گرمایی ثابتی تولید می‌کند. کل گرمای تلف شده را در صورتی حساب کنید که دمای صفحه از 600 K تجاوز نکند.

۵-۵۸ جریان «اسلاگ*» در لوله را می‌توان به صورت جریانی که سرعت آن در کل سطح لوله ثابت است توصیف کرد. برای ضریب انتقال گرمای این قسم جریان، در حالی که در دیواره شرط شار گرمایی ثابت برقرار باشد، عبارتی بیابید. نتایج حاصله را با بخش ۵-۱۰ مقایسه کنید. دلیل تفاوت در جواب‌ها را از نظر فیزیکی توضیح دهید.

۵-۵۹ فرض کنید که پخش سرعت در هستهٔ ناآرام جریان لوله‌ای چنین بیان شود:

$$\frac{u}{u_c} = \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^{\frac{1}{7}}$$

که u_c سرعت در مرکز لوله و r_o شعاع لوله است. می‌توان فرض کرد که سرعت در زیر لایهٔ آرام نسبت به شعاع به صورت خطی تغییر کند. با استفاده از ضریب اصطکاک در معادلهٔ (۵-۱۱۵) برای ضخامت زیر لایهٔ آرام عبارتی بیابید. در این مسأله سرعت جریان متوسط را می‌توان تنها با استفاده از پخش سرعت ناآرام حساب کرد.

* slug flow یا plug flow یا piston flow جریان دوفازه (بخار - مایع) که در آن گاز به صورت ذرات جریان می‌یابد؛ وقتی سرعت ظاهری گاز از حدود 60 تا 900 $\frac{cm}{s}$ باشد جریان به این صورت است. (م)

۵-۶۰ با استفاده از نیم‌رخ سرعت مسألهٔ ۵-۵۹ عبارتی برای ضریب پخشیدگی گردابی اندازه حرکت به صورت تابعی از شعاع بیابید.

۵-۶۱ در مبدل‌ها، گاه هماهنگی نیازهای انتقال گرما با محدودیت‌های افت فشار مهم است. با فرض معلوم بودن نیاز انتقال گرمای کل و معلوم بودن اختلاف دما بین شرایط کپه‌ای و دیوار و نیز معلوم بودن افت فشار در لوله و با فرض اینکه گازی به صورت ناآرام و عدد پراندل نزدیک به واحد در لوله‌ها جریان دارد عبارتی برای طول و قطر لوله بیابید.

۵-۶۲ در لوله‌ای به قطر 2/5 cm آب طوری جریان دارد که عدد رینولدز بر اساس قطر 1500 است (فرض می‌شود که جریان آرام است). دمای کپه‌ای متوسط 35°C است. حداکثر سرعت آب را در لوله بیابید (به یاد آورید که $u_m = 0/5u_o$). ضریب انتقال گرمای این سیستم را چنان‌چه دیواره لوله در معرض شار گرمایی ثابت و نیم‌رخ‌های سرعت و دما کاملاً توسعه یافته باشند، پیدا کنید. خواص را در دمای کپه‌ای بیابید.

۵-۶۳ در سیستم جریان حلقوی که در معرض شار گرمایی ثابتی در سطوح داخلی و خارجی است جریان اسلاگ وجود دارد. دما در سطوح داخلی و خارجی در xهای یکسان، برابر است. برای پخش دما در این سیستم جریان، با فرض ثابت بودن خواص و آرام بودن جریان، عبارتی بیابید.

۵-۶۴ هوا با ماخ 4 و $3\ \frac{lb}{in^2}$ مطلق و 0°F روی صفحه‌ای تخت جریان می‌یابد. دمای صفحه ثابت و برابر 200°F است. اگر طول صفحه 18 in باشد، چه بار سرمایی برای ایجاد این دما مورد نیاز است؟

۵-۶۵ هوا روی صفحه‌ای هم‌دما به دمای ثابت 65°C جریان می‌یابد. سرعت هوا در خواص ایستایی 15°C و 7 kPa برابر $600\ \frac{m}{s}$ است. ضریب انتقال گرمای متوسط صفحه‌ای به طول 1 m را حساب کنید.

۵-۶۶ هوا با فشار 7 kPa و دمای -40°C با عدد ماخ 4 روی صفحه‌ای تخت جریان دارد. دمای صفحه 35°C و طول آن 60 سانتی‌متر است. دمای بی‌دررو دیوار را برای ناحیهٔ آرام لایه مرزی حساب کنید.

۵-۶۷ یک تونل بادی باید ساخته شود که شرایط جریان ماخ 2/8 را در $T_\infty = -40°C$ و $p = 0/05$ atm تولید کند. دمای رکود برای این شرایط چیست؟ دمای بی‌دررو دیواره برای نواحی آرام و ناآرام لایه مرزی روی صفحهٔ تخت چه خواهد بود. اگر صفحه تختی در تونل نصف شود به طوری که $Re_L = 10^7$، انتقال گرما به ازای دمای ثابت 0°C دیواره چه خواهد بود؟

۵-۶۸ نیروی کششی اعمال شده روی صفحه را در هر یک از سیستم‌های مسأله ۵-۲۰ حساب کنید.

۵-۶۹ گلیسیرین در 30°C روی صفحه تخت مربعی به ضلع 30 cm با سرعت $1/5\ \frac{m}{s}$ جریان می‌یابد. نیروی کششی 8/9 N (هر دو طرف صفحه) است. ضریب انتقال گرمای این سیستم جریان را بیابید.

۵-۷۰ نیروی کششی (اصطکاک-لزجت) روی صفحهٔ تخت مسألهٔ ۵-۲۱ را در شرایطی حساب کنید. که انتقال گرمایی وجود ندارد. از تشابه بین اصطکاک سیال و انتقال گرما برای این محاسبه استفاده نکنید؛ یعنی کشش را مستقیماً با ارزیابی تنش برشی لزجی در دیوار حساب کنید.

۵-۷۱ در عرض صفحهٔ تخت مربعی به ضلع 130 cm ازت با فشار 1 atm و دمای 20°C با سرعت $3/0\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. دمای صفحه ثابت و 100°C است. ضریب اصطکاک متوسط و انتقال گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۷۲ با استفاده از پخش سرعت جریان آرام توسعه یافته در لوله، عبارتی برای ضریب اصطکاک، به صورت معادلهٔ (۵-۱۱۲) بیابید.

۵-۷۳ روغن موتور به دمای 10°C در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 15 cm جریان دارد و سطح بالایی این صفحه در معرض شار گرمایی ثابتی به میزان $10\ \frac{kW}{m^2}$ قرار دارد. (الف) اختلاف دمای متوسط، (ب) اختلاف دما در لبهٔ بالاروند و (پ) ضریب انتقال گرمای متوسط را معین کنید. از رابطهٔ چرچیل [معادلهٔ (۵-۵۱)] استفاده کنید. $u_\infty = 0/5\ \frac{m}{s}$ بگیرید.

۵-۷۴ مسأله ۵-۷۳ را در حالتی که دمای سطح صفحه ثابت و برابر دمای لبهٔ بالاروند باشد حل کنید و انتقال گرمای کل را معین کنید.

۵-۷۵ برای هوایی به 25°C و 1 atm با سرعت جریان آزاد $45\ \frac{m}{s}$، طول صفحهٔ تختی را حساب کنید که تولید اعداد رینولدز 5×10^5 و 10^8 می‌کند. ضخامت لایه مرزی در این اعداد رینولدز چه‌قدر است؟

۵-۷۶ ضخامت لایه مرزی در $Re = 5\times10^5$ را برای سیالات زیر که روی صفحهٔ تختی با سرعت $20\ \frac{m}{s}$ جاری هستند تعیین کنید: (الف) هوا در 1 atm و 10°C، (ب) آب مایع اشباع در 10°C، (پ) هیدروژن در 1 atm و 10°C، (ت) آمونیاک مایع اشباع در 10°C و (ث) فریون ۱۲ مایع اشباع در 10°C.

۵-۷۷ بسیاری از روابط انتقال گرما در جریان روی صفحهٔ تخت چنین است:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = C\, Re_x^{\ n} f(Pr)$$

رابطه‌ای برای $\frac{\bar{h}_L}{h_{x=L}}$ بر حسب ثابت‌های C و n به‌دست آورید.

۵-۷۸ معادلات (۵-۵۱) و (۵-۴۴) را برای روغن موتور به 20°C و عدد رینولدز 10000 مقایسه کنید.

۵-۷۹ هوا به 1 atm و 300 K روی سطحی از صفحهٔ مربعی به ضلع 75 cm و به دمای 350 K می‌وزد. سرعت جریان آزاد $45\ \frac{m}{s}$ است. انتقال گرما و نیروی کشش روی یک وجه صفحه و انتقال گرمای ناحیهٔ آرام لایه مرزی را حساب کنید.

۵-۸۰ عدد رینولدز بحرانی را در مسألهٔ ۵-۷۹ برابر 5×10^5 بگیرید و ضخامت لایه مرزی در این نقطه و در لبهٔ بالاروند صفحه را با فرض (الف) جریان آرام تا Re_{crit} و جریان ناآرام پس از آن و (ب) جریان ناآرام از لبهٔ بالاروند، حساب کنید.

۵-۸۱ اگر دمای صفحه مسألهٔ ۵-۷۹ تا 500 K بالا برده شود و شرایط جریان آزاد مثل قبل باشد، کل انتقال گرما را در صورتی حساب کنید که خواص فیزیکی در (الف) شرایط جریان آزاد، (ب) دمای فیلم و (پ) دمای دیواره، ارزیابی شده باشد. در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

۵-۸۲ هوا در 250 K و 1 atm با سرعت $10\ \frac{m}{s}$ در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع 30 cm جاری است. شار گرمایی ثابت صفحه $700\ \frac{W}{m^2}$ است. دمای صفحه را در xهایی برابر 1/5، 10، 20 و 30 cm تعیین کنید.

۵-۸۳ روغن موتور در ۲۰°C در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۲۰ cm با سرعت $10\ \frac{m}{s}$ رانده می‌شود. دمای صفحه ۴۰ °C است. گرمای تلف شده از صفحه و نیروی کشش برای یک وجه صفحهٔ گرم نشده را حساب کنید.

۵-۸۴ صفحهٔ تخت بزرگی به طول ۴/۰ m و عرض ۱/۰ m در معرض هوای محیط به دمای ۲۷°C و سرعت $30\ \frac{mi}{h}$ در راستای موازی با طول ۴/۰ m است. اگر دمای صفحه ۷۷°C باشد، گرمای کل تلف شده را بیابید. شار گرمایی تلف شده را نیز به وات بر مترمربع در xهایی برابر ۳ cm، ۵۰ cm، ۱/۰ m و ۴/۰ m حساب کنید.

۵-۸۵ هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱۰ cm با سرعت $30\ \frac{m}{s}$ جاری است. گرم شدن تا قبل از $x = 5/0$ cm شروع نمی‌شود و پس از آن دمای سطح صفحه ۴۰۰ K است. کل اتلاف گرما از صفحه را حساب کنید.

۵-۸۶ در صفحه و شرایط مسألهٔ ۵-۸۵ تنها یک نوار ۰/۵ cm که مرکزش در $x = 5/0$ cm قرار دارد تا ۴۰۰ K گرم می‌شود. گرمای تلف شده از این نوار را بیابید.

۵-۸۷ دو صفحهٔ مربعی به ضلع ۲۰ cm به فاصلهٔ ۳/۰ cm از هم قرار دارند. هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K و $15\ \frac{m}{s}$ وارد فضای بین دو صفحه می‌شود. آیا بین دو لایه مرزی تداخلی به‌وجود می‌آید؟

۵-۸۸ آب به ۱۵/۶°C در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۲۰ cm با سرعت $5\ \frac{m}{s}$ جاری است. نوار نازکی به عرض ۵ mm در فاصلهٔ ۱۰ cm از لبهٔ بالاروند روی صفحه قرار دارد. اگر نوار تا ۳۷/۸°C گرما ببیند، اتلاف گرما از نوار را حساب کنید.

۵-۸۹ هوا در ۳۰۰ K و ۴ atm در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱۰ cm با سرعت $35\ \frac{m}{s}$ جاری است. دمای ثابت صفحه ۴۰۰ K است. اتلاف گرما از صفحه را بیابید.

۵-۹۰ روی صفحهٔ مسألهٔ ۵-۸۹ گرم‌کنی برقی قرار دارد که شار گرمایی ثابت $1000\ \frac{W}{m^2}$ را با همان شرایط جریان هوا در عرض صفحه تولید می‌کند. حداکثر دمای سطح صفحه چه‌قدر می‌شود؟

۵-۹۱ عدد رینولدز بحرانی جریان روی صفحهٔ تختی در کاربردی خاص 10^6 است. هوا در ۱ atm، ۳۰۰ K و $10\ \frac{m}{s}$ در عرض صفحه هم‌دمایی با این عدد بحرانی و دمای صفحهٔ ۴۰۰ K جاری است. عدد رینولدز در انتهای صفحه 5×10^6 است. ضریب انتقال گرمای متوسط در این سیستم، طول صفحه و گرمای تلف شده از این صفحه چه‌قدر است؟

۵-۹۲ ضریب انتقال گرمای متوسط را برای شرایط مسألهٔ ۵-۹۱ اما برای عدد رینولدز بحرانی 5×10^5 حساب کنید. گرمای تلف شده از صفحه در این حالت چه‌قدر است؟

۵-۹۳ گلیسیرین در ۱۰°C با سرعت $2\ \frac{m}{s}$ در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۳۰ cm جاری است. دمای ثابت صفحه ۳۰°C است. اتلاف گرما از این صفحه را بیابید.

۵-۹۴ اتیلن گلیکول در ۲۰°C در عرض صفحه‌ای به دمای ثابت ۰°C جاری است. صفحه مربعی به ضلع ۲۰ cm است و عدد رینولدز در انتهای صفحه ۱۰۰۰۰۰ است. گرمای جذب شده توسط صفحه را بیابید.

مسائل طراحی

۵-۹۵ تونل باد کم سرعتی را برای مطالعهٔ لایه‌های مرزی تا $Re_x = 10^7$ با هوای ۱ atm و ۲۵°C طرح کرده‌اند. حداکثر سرعت جریانی راکه می‌توان از سیستم بادبزن موجود انتظار داشت، $30\ \frac{m}{s}$ است. طول مقطع آزمایش صفحهٔ تخت چه‌قدر باشد تا به اعداد رینولدز مورد نظر برسیم؟ در این شرایط حداکثر ضخامت لایه مرزی چه‌قدر است؟ حداکثر ضخامت لایه مرزی برای سرعت جریان ۷ و $12\ \frac{m}{s}$ چه‌قدر است؟

۵-۹۶ با استفاده از معادله‌های (۵-۵۵)، (۵-۸۱) و (۵-۸۲) برای انتقال گرمای موضعی در محدوده‌های مربوطه‌شان عبارتی برای ضریب انتقال گرمای متوسط یا عدد نوسلت در محدودهٔ $5 \times 10^5 < Re_L < 10^9$ بیابید. برای انتگرال‌گیری لازم از روش عددی و برای ساده کردن نتایج از منحنی استفاده کنید.

۵-۹۷ برای اندازه‌گیری اتلاف گرمای آب جاری روی صفحه‌ای تخت، آزمایشی طرح‌ریزی شده است. صفحه مربعی به ضلع ۳۰ cm و دمای تقریباً ثابت ۵۰°C است در حالی‌که دمای آب حدود ۱۰°C خواهد بود. (الف) سرعت جریان لازم برای مطالعهٔ محدودهٔ اعداد رینولدز 10^4 تا 10^7 را بیابید. (ب) ضرایب انتقال گرما و آهنگ انتقال گرما را برای چند نقطه در محدودهٔ مشخص شده حساب کنید.

۵-۹۸ جریان هوا روی صفحهٔ تخت را در شرایط جریان آرام در ۱ atm در نظر بگیرید. اثر دما بر ضریب انتقال گرما را با رسیدگی پنج مورد با دمای جریان آزاد ثابت ۲۰°C، سرعت جریان آزاد ثابت، و دمای سطح ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۵۰ و ۳۵۰°C بررسی کنید. از این تحلیل چه نتیجه می‌گیرید؟ با این نتایج، تغییر تقریبی ضریب انتقال گرما با دمای مطلق را برای هوای به فشار ۱ atm تعیین کنید.

❑ مراجع

1 Schlichting, H.: " Boundary Layer Theory, " 7th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.

2 von Kármán, T.: Über laminaire und turbulente Reibung, *Angew. Math. Mech.*, vol. 1, pp. 233–252, 1921; also *NACA Tech. Mem.* 1092, 1946.

3 Sellars, J. R., M. Tribus, and J. S. Klein: Heat Transfer to Laminar Flows in a Round Tube or Flat Conduit: The Graetz Problem Extended, *Trans. ASME,* vol. 78, p. 441, 1956.

4 Eckert, E. R. G.: Survey of Boundary Layer Heat Transfer at High Velocities and High Temperatures, *WADC Tech. Rep.,* pp. 59–624, April 1960.

5 White, F. M.: "Viscous Fluid Flow," McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

6 Knudsen, J. D., and D. L. Katz: "Fluid Dynamics and Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

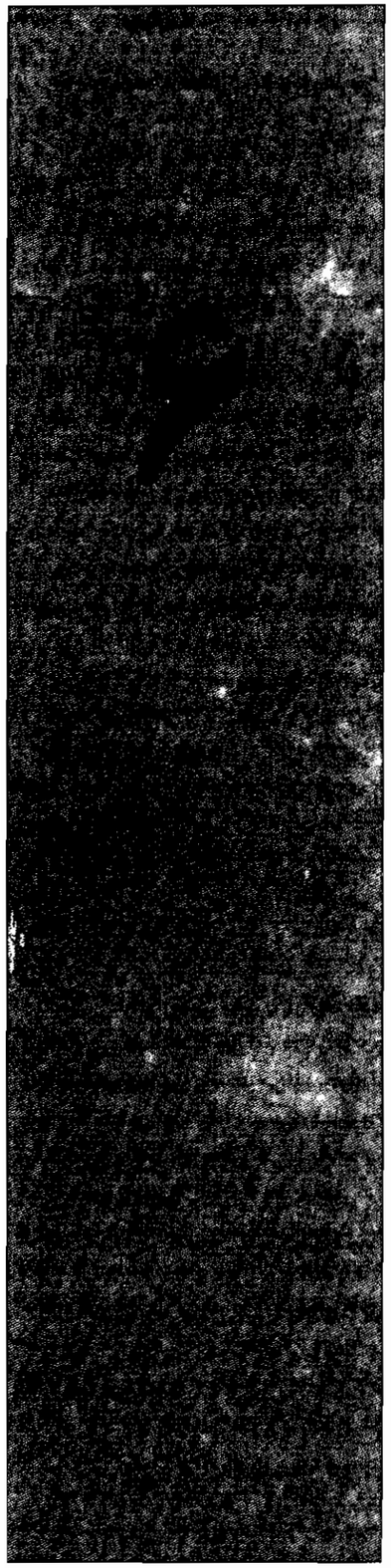
7 Holman, J. P.: "Thermodynamics," 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Now York, 1980.

8 Schultz-Grunow, F.: Neues Widerstandsgesetz für glatte, *Lilfifahrtforschüng,* vol. 17, p. 239, 1940; also *NACA Tech. Mem.* 986, 1941.

9 Churchill, S.W., and H. Ozee: Correlations for Laminar Forced Convection in Flow over an Isothermal Flat Plate and in Developing and Fully Developed Flow in an Isothermal Tube, *J. Heat Transfer,* vol. 95, p. 46, 1973.

10 Whitaker, S.: Forced Convection Heat Transfer Correlation for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and for Flow in Packed Beds and Tube Bundles, *AIChEJ.,* vol. 18,p. 361, 1972.

11 Churchill, S. W.: A Comprehensive Correlating Equation for Forced Convection from Flat Plates, *AIChE J.,* vol. 22, p. 264, 1976.



روابط تجربی و عملی در انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری

❑ ۶-۱ مقدمه

در بحث و تحلیل‌های فصل ۵ چگونگی محاسبه انتقال گرمای جابه‌جایی چند اجباری، مورد عملی نشان داده شد؛ گرچه آن مسائل را می‌شد به‌طریق تحلیلی حل کرد. بدین ترتیب اصول فرآیند جابه‌جایی و رابطه‌شان با دینامیک سیالات نشان داده شد و تأکید اولیه به درک روشنی از سازو کار فیزیکی معطوف بود. متأسفانه، رسیدن به راه‌حل‌های تحلیلی مسائل جابه‌جایی همواره ممکن نبوده، مجبوریم برای کسب اطلاعات طرح و نیز تثبیت داده‌های فرارتری که به درک فیزیکی فرآیندهای انتقال گرما کمک می‌کنند به روش‌های تجربی رو آوریم.

نتایج حاصل از داده‌های تجربی معمولاً یا به شکل فرمول‌های تجربی و یا نمودارهای ترسیمی بیان می‌شود به نحوی که می‌توان از آنها با حداکثر کلیت استفاده کرد. در کوشش برای عمومیت بخشیدن به نتایج حاصل از تجربیات شخصی، به شکل نوعی رابطه تجربی، با اشکال مواجه می‌شویم. چنان‌چه راه حلی تحلیلی برای مسأله مشابهی در دست باشد، ربط داده‌ها ساده‌تر می‌شود زیرا می‌توان نتایج را به‌صورت تابعی حدس زد و از داده‌های تجربی برای یافتن مقادیر ثابت یا نمای بعضی پارامترهای مهم مثل اعداد رینولدز و پراندل استفاده کرد. چنان‌چه راه حل تحلیلی برای مسأله‌ای مشابه در دست نباشد، مجبوریم به بینشی مبتنی بر درک فیزیکی مسأله و یا به برداشت‌هایی متوسل شویم که می‌توان از معادلاتِ دیفرانسیلیِ فرآیندهایِ جریان. (بر پایهٔ تخمین‌های ابعادی یا مرتبه‌بزرگی) بیرون کشید. در هر حال جانشینی برای درک و بصیرتِ فیزیکی وجود ندارد.

برای اینکه نشان دهیم چگونه می‌توان مسأله جدیدی را تحلیل کرد و رابطه تابعی مهمی از معادلات دیفرانسیل به‌دست آورد، مسأله تعیین ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکیِ جریان روی صفحهٔ تخت را در نظر بگیرید. این مسأله در فصل ۵ حل شد ولی اکنون می‌خواهیم از تحلیل مرتبه‌بزرگیِ معادلات دیفرانسیل استفاده کرده، شکل تابعی جواب را به‌دست آوریم. معادله اندازه حرکت:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

را باید در رابطه با معادله پیوستگی حل کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

می‌توان گفت که سرعت u داخل لایه مرزی، هم مرتبهٔ سرعت جریان آزاد u_∞ و بُعد y هم مرتبه با ضخامت لایه مرزی δ است. بنابراین:

$$u \sim u_\infty$$
$$y \sim \delta$$

و می‌توان معادله پیوستگی را به شکل تقریبی زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = ۰$$

$$\frac{u_\infty}{x} + \frac{v}{\delta} \approx ۰$$

یا:

$$v \sim \frac{u_\infty \delta}{x}$$

سپس از تحلیل معادله اندازه حرکت با استفاده از این مرتبه بزرگی برای v، خواهیم داشت:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$$

$$u_\infty \frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x} \frac{u_\infty}{\delta} \approx \nu \frac{u_\infty}{\delta^۲}$$

یا:

$$\delta^۲ \sim \frac{\nu x}{u_\infty}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

با تقسیم طرفین بر x عبارت بالا به صورت بی‌بعد زیر درمی‌آید:

$$\frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = \frac{۱}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

این تغییر تابعیِ ضخامتِ لایه مرزی برحسب عدد رینولدز وموقعیت x دقیقاً همانی است که در بخش ۵-۴ به‌دست آمد. این تحلیل نسبتاً سرراست است و نتایج درستی به‌دست می‌دهد ولی ممکن است کاربرد تحلیل مرتبه‌بزرگی در مسائل پیچیده‌تر، به‌ویژه مسائل نواحی جریان ناآرام یا جداشده، همیشه به این سادگی نباشد. با وجود این، اغلب می‌توان با بررسی مرتبه‌بزرگی جملات مختلف معادله دیفرانسیلِ حاکم بر مسأله‌ای خاص، به اطلاعات با ارزش و بینش فیزیکی دست یافت.

تحلیل ابعادی روشی معمول در ربط داده‌های تجربی است و گروه‌های بی‌بعد مناسب مثل اعداد رینولدز و پراندل از بررسی‌های کاملاً ابعادی و تابعی به‌دست می‌آیند. البته فرض بر آن است که سطوح گرمایشی که از نظر هندسی مشابهند دارای نیم‌رخ دما و میدان جریان مشابهند. به‌طور کلی، استفاده از تحلیل ابعادی در هر مسأله جدید، وقتی از قبل راه حل تحلیلی برای آن وجود ندارد، بی‌نهایت مشکل است. معمولاً در صورت معلوم‌بودن معادلات دیفرانسیلِ حاکم، بهتر است از تحلیل مرتبه‌بزرگی، مانند بالا استفاده کرد. به این ترتیب می‌توان متغیرهای بی‌بعد مهم را برای همبستگی داده‌های تجربی تعیین‌کرد. در بعضی از مسائل جریان و انتقال گرمای پیچیده، ممکن است مدل فیزیکی روشنی از فرآیندها موجود نباشد و مجبور شویم این مدل را قبل از هم‌بسته کردن اطلاعات تجربی بسازیم.

اشلیشتینگ [۶]، گیدت Giedt [۷] و کلاین Kline [۲۸] ملاحظات مربوط به تشابه و کاربرد آنها در مسائل لایه مرزی و انتقال گرما را مورد بحث قرار داده‌اند.

هدف این بحث تأکید و حتی اشاره به روشی جدید در حل مسائل نبوده، بلکه صرفاً می‌خواهیم ضرورت استفاده از استدلال فیزیکی شهودی در مسأله‌ای مشکل و مزیت آشکار استفاده از یک یا همه اطلاعات موجود را نشان دهیم. گاه در همبسته کردن داده‌های تجربی مسأله‌ای که قبلاً حل نشده باید از روش‌های غیرمستقیم استفاده‌کرد.

❑ ۶-۲ روابط تجربی برای جریان در لوله و مجرای گرد

چگونگی بررسی تحلیلی مسأله انتقال گرما در جریانِ آرامِ کاملاً گسترش یافته در لوله را در تحلیل بخش ۵-۱۰ نشان دادیم. حالات مربوط به جریان آرام توسعه‌نیافته و سیستم‌های جریانی که خواص سیال در آنها به‌طور گسترده با دما تغییر می‌کند و سیستم‌های جریان ناآرام، خیلی پیچیده‌ترند ولی در طرح مبدل‌های گرمایی و تجهیزات انتقال گرمای وابسته به آن بسیار مهمند. این مسائل پیچیده‌تر راگاه می‌توان به‌طریق تحلیلی حل کرد ولی این راه‌حل‌ها، اگر امکان‌پذیر باشند، بسیار پرزحمتند. در اهداف طراحی و مهندسی، معمولاً همبستگی‌های تجربی بیش‌ترین فایده را دارند. ما در این بخش بعضی از روابط تجربی مهم تر و مفیدتر را ارائه و محدودیت‌های آنها را نشان می‌دهیم.

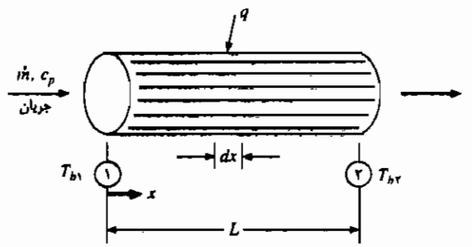
دمای کپه‌ای

نخست بیش‌تر مفهوم دمای کپه‌ای را بررسی می‌کنیم که در تمام مسائل انتقال گرمای جریان داخل کانال‌های بسته مهم است. در فصل ۵ دیدیم که دمای کپه‌ای، شرایط انرژی متوسط یا «کلاهک آمیزش» را نشان می‌دهد. بنابراین در جریان لوله‌ای شکل ۶-۱ کل انرژی افزوده را می‌توان برحسب اختلاف دمای کپه‌ای نشان داد:

$$q = \dot{m}\, c_p (T_{b۲} - T_{b۱}) \qquad (۶-۱)$$

به فرض c_p در طول،نسبتاً ثابت باشد. گرمای افزوده dq در جزء طول dx را می‌توان بر حسب تفاضل دمای کپه‌ای یا بر حسب ضریب انتقال گرما بیان کرد:

$$dq = \dot{m}\, c_p\, dT_b = h(۲\pi r)\, dx\, (T_w - T_b) \qquad (۶-۲)$$



شکل ۶-۱ انتقال گرمای کل بر حسب اختلاف دمای کپه‌ای.

که T_w و T_b دمای دیوار و دمای کپه‌ای در فاصله x هستند. ضریب انتقال گرمای کل را می‌توان چنین بیان کرد:

$$q = hA\,(T_w - T_b)_{av} \qquad (۶-۳)$$

که A کل مساحت سطح انتقال گرما است. چون T_w و T_b می‌توانند در طول لوله تغییر کنند، برای استفاده در معادلهٔ (۶-۳) باید فرآیند متوسط و مناسبی انتخاب کرد. در این فصل بیش‌تر به روش‌های تعیین h، ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی، می‌پردازیم. در فصل ۱۰ در مورد روش‌های مختلفی بحث می‌کنیم که در آنها تغییر دما در مبدل‌ها به‌طور صحیح به حساب می‌آید.

دیتوس Dittus و بولتر Boelter [۱] برای جریان ناآرام کاملاً گسترش‌یافته در لوله‌های صاف، رابطه سنتی زیر را پیشنهاد کرده‌اند:

$$\mathrm{Nu}_d = ۰/۰۲۳\, \mathrm{Re}_d^{۰/۸}\, \mathrm{Pr}^n \qquad (۶-۴\text{الف})$$

خواص در این معادله، در دمای کپه‌ایِ سیال در نظر گرفته می‌شود و مقدار نمای n چنین است:

$$n = \begin{cases} ۰/۴ & \text{برای گرمایش سیال} \\ ۰/۳ & \text{برای سرمایش سیال} \end{cases}$$

معادلهٔ (۶-۴) برای جریان ناآرام کاملاً گسترش‌یافته در لوله‌های صاف، برای سیالاتی با عدد پراندل از حدود ۰/۶ تا ۱۰۰ و اختلاف دمای متوسط ۰/۶ تا ۱۰۰ بین شرایط دیوار و سیال معتبر است.

گنیلینسکی Gnielinski [۴۵] با اطلاعات جدیدتر خود پیشنهاد می‌کند که نتایج بهتر برای جریان ناآرام در لوله‌های صاف را می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد:

$$\mathrm{Nu} = ۰/۰۲۱۴\,(\mathrm{Re}^{۰/۸} - ۱۰۰)\,\mathrm{Pr}^{۰/۴} \qquad (۶-۴\text{ب})$$

به‌ازای $۰/۵ < \mathrm{Pr} < ۱/۵$ و $۱۰^۴ < \mathrm{Re} < ۵ \times ۱۰^۶$

یا

$$\mathrm{Nu} = ۰/۰۱۲\,(\mathrm{Re}^{۰/۸۷} - ۲۸۰)\,\mathrm{Pr}^{۰/۴} \qquad (۶-۴\text{پ})$$

به‌ازای $۱/۵ < \mathrm{Pr} < ۵۰۰$ و $۳۰۰۰ < \mathrm{Re} < ۱۰^۶$

ممکن است بپرسیم که چرا شکل تابع به‌صورت معادلهٔ (۶-۴) است. استدلال فیزیکی آن که بر پایهٔ تجربهٔ حاصل از تحلیل‌های فصل ۵ استوار است دقیقاً وابستگی فرآیند انتقال گرما به میدان جریان و در نتیجه به عدد رینولدز را نشان خواهد داد. آهنگ نسبی پخش گرما و اندازه حرکت با عدد پراندل به‌هم مربوط می‌شود بنابراین می‌توان انتظار داشت که عدد پراندل در راه‌حل نهایی، سنجه‌ای مهم باشد. می‌توان به وابستگی انتقال گرما به اعداد رینولدز و پراندل نسبتاً اطمینان داشت. ولی مسأله، شکل صحیح تابعی این رابطه است؛ یعنی اینکه ضرورتاً باید حاصل‌ضربی از دو تابع نمایی از اعداد رینولدز و پراندل را انتظار داشت؟ جواب این است که می‌توان انتظار این شکل تابعی را داشت، زیرا در راه حل‌های تحلیلی مربوط به صفحه تخت در فصل ۵ و تشابه اعداد رینولدز جریان ناآرام، به این صورت ظاهر می‌شود. به‌علاوه، استفاده از این نوع رابطهٔ تابعی برای هم‌بسته نمودن داده‌های تجربی، چنان که در زیر بیان می‌شود، راحت است.

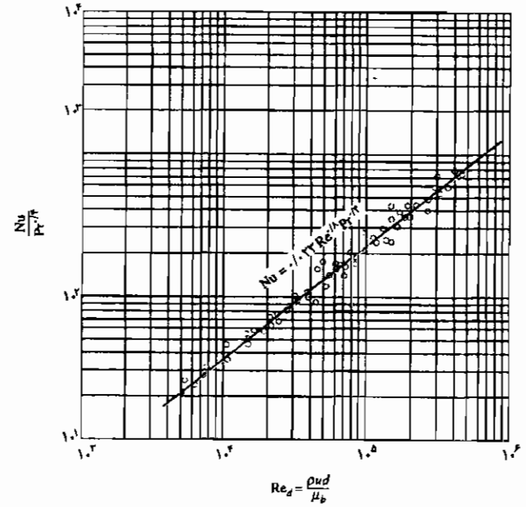
فرض کنید در یک سری آزمایش، آهنگ انتقال گرمای سیالات مختلف در جریان ناآرام داخل لوله‌های صاف، تحت شرایط دمایی مختلف اندازه‌گیری شود. برای تغییر محدوده عدد رینولدز، علاوه بر تغییر آهنگ جریان جرم، می‌توان از لوله‌هایی با قطر مختلف استفاده کرد. می‌خواهیم با رسیدن به معادله‌ای تجربی که نمایشگر تمام این داده‌هاست نتایج این آزمایش‌ها را تعمیم دهیم. همان‌طور که در بالا توضیح دادیم می‌توان گفت که داده‌های انتقال گرما به اعداد رینولدز و پراندل وابسته‌اند. شاید ساده‌ترین نوع رابطهٔ مورد استفاده، تابعی نمایی برای هر کدام از این سنجه‌ها باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$\mathrm{Nu}_d = C\, \mathrm{Re}_d^m\, \mathrm{Pr}^n$$

که C و m و n ثابت و باید از داده‌های آزمایش معین شوند.

نخست لگاریتم Nu_d نسبت به لگاریتم Re_d سیال را رسم می‌کنیم تا وابستگی انتقال گرما به عدد رینولدز را تخمین بزنیم، یعنی مقدار تقریبی نمای m را بیابیم. این نمودار را برای سیال در دمای ثابت رسم می‌کنیم و از آنجاکه عدد پراندل سیال تقریباً ثابت است اثر عدد پراندل ناچیز خواهد بود. با استفاده از این مقدار m، داده‌های تمام سیالات را به‌صورت $\log\left(\frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d^m}\right)$ نسبت به $\log \mathrm{Pr}$ رسم می‌کنیم و برای نمای n مقداری به‌دست می‌آید. سپس با استفاده از این مقدار n کلیه داده‌ها را مجدداً به صورت $\log\left(\frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Pr}^n}\right)$ نسبت به $\log \mathrm{Re}_d$ رسم کرده، مقدار نهایی نمای m و مقدار ثابت C معین می‌شود. نمونه این داده‌های نوع نهایی در شکل ۶-۲ رسم شده است. معمولاً معادله هم‌بستگی نهایی داده‌ها را تا ۲۵± درصد نشان می‌دهد.

چنان‌چه در این جریان، اختلاف‌های دما زیاد باشد ممکن است در خواص سیال بین دیوارهٔ لوله و جریانِ مرکزی تغییر زیادی به‌وجود آید. این تغییرات در خواص می‌توانند به صورت تغییری در نیم‌رخ سرعت، شکل ۶-۳، ظاهر شود. انحراف از نیم‌رخ سرعت جریان هم‌دمای شکل از اینجا ناشی می‌شود که لزجت گازها با افزایش دما افزایش می‌یابد. در حالی که لزجت سیالات با بالا رفتن دما کاهش می‌یابد.

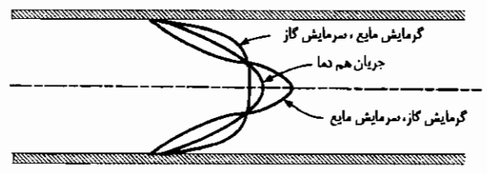


شکل ۶-۲ هم‌بستگی داده‌های نمونه برای جابه‌جایی اجباری در لوله‌های صاف، جریان ناآرام.

برای به‌حساب آوردن این تغییر خواص، سیدر و تیت [۲] رابطهٔ زیر را پیشنهاد کرده‌اند:

$$Nu_d = 0/027\ Re_d^{0/8}\ Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0/14} \qquad (۶-۵)$$

کلیه خواص در شرایط دمای کپه‌ای در نظر گرفته شده‌اند به‌جز μ_w که در دمای دیوار ارزیابی شده است.



شکل ۶-۳ تأثیر گرمایش بر نیم‌رخ سرعت در جریان لوله آرام.

معادلات (۶-۴) و (۶-۵) برای جریان ناآرام کاملاً گسترش یافته در لوله‌ها به کار می‌روند. در ناحیه مدخل، جریان گسترش یافته نیست و نوسلت [۳] معادله زیر را توصیه می‌کند:

$$Nu_d = 0/036\ Re_d^{0/8}\ Pr^{1/3} \left(\frac{d}{L}\right)^{0/055} \qquad (۶-۶)$$

برای $10 < \frac{L}{d} < 400$

که L طول لوله و d قطر آنست. خواص فیزیکی در معادلهٔ (۶-۶) در دمای کپه‌ای متوسط در نظر گرفته شده‌اند. هارتنت Hartnett [۲۴] برای ناحیه مدخل گرمایی مربوط به آب و روغن، داده‌های تجربی‌ای ارائه کرده است. آلن Allen و اکرت Eckert [۲۵] دربارهٔ انتقال ناآرام آب در لوله‌های صاف و در شار گرمایی یکنواخت مطالعات دقیقی کرده‌اند.

مطالعات فوق محاسبه را ساده می‌کنند ولی در حد ۲۵ ± در صد خطا دارند. پتوکف [۴۲] عبارتی دقیق‌تر و گرچه پیچیده‌تر برای جریان ناآرام کاملاً گسترش‌یافته در لوله‌های صاف به‌دست آورده است:

$$Nu_d = \frac{\left(\frac{f}{8}\right) Re_d\ Pr}{1/07 + 12/7 \left(\frac{f}{8}\right)^{1/2} (Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^n \qquad (۶-۷)$$

که $n = 0/11$ برای $T_w > T_b$، $n = 0/25$ برای $T_w < T_b$ و $n = 0$ برای شار گرمایی ثابت یا برای گازها کلیه خواص به‌جز μ_b و μ_w در دمای $T_f = \frac{T_w + T_b}{2}$ در نظر گرفته شده‌اند. می‌توان ضریب اصطکاک لوله‌های صاف را از معادلهٔ (۶-۴) و یا از فرمول زیر به‌دست آورد:

$$f = (1/82 \log_{10} Re_d - 1/64)^{-2} \qquad (۶-۸)$$

معادله (۶-۷) در محدوده‌های زیر به کار می‌رود:

برای دقت ۶ در صد $0/5 < Pr < 200$

برای دقت ۱۰ در صد $0/5 < Pr < 2000$

$10^4 < Re_d < 5 \times 10^6$

$0/08 < \frac{\mu_b}{\mu_w} < 40$

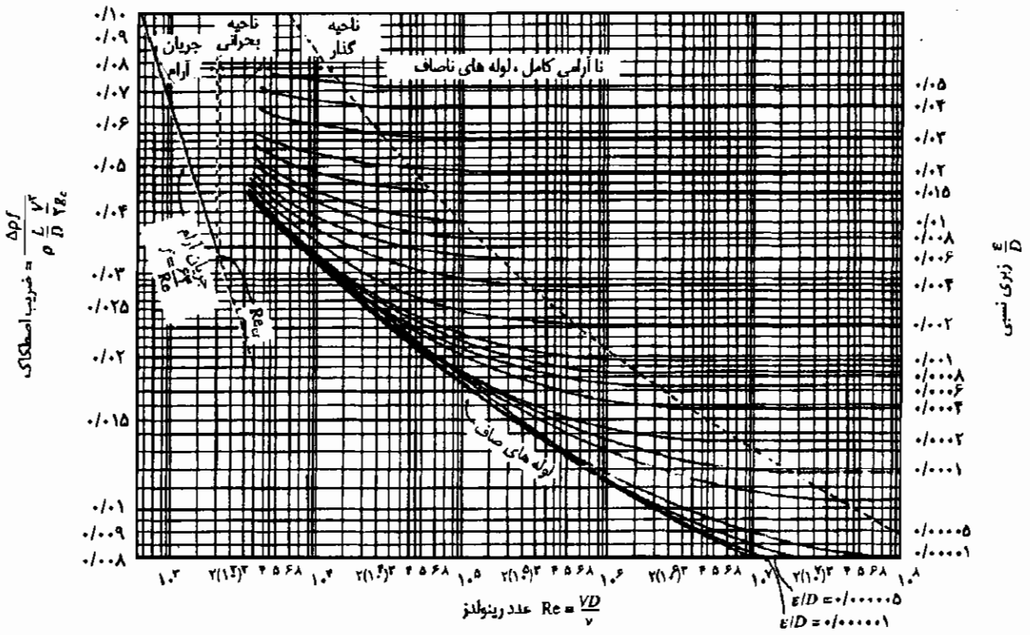
هاوسن Hausen [۴] رابطه تجربی زیر را برای جریان آرام کاملاً گسترش‌یافته در لوله‌ها در دمای ثابت دیواره ارائه می‌کند:

$$Nu_d = 3/66 + \frac{0/0668 \left(\frac{d}{L}\right) Re_d\ Pr}{1 + 0/04 \left[\left(\frac{d}{L}\right) Re_d\ Pr\right]^{2/3}} \qquad (۶-۹)$$

ضریب انتقال گرمای حاصل از این رابطه، مقدار متوسط در کل طول لوله است. توجه کنید که وقتی لوله به‌حد کافی بلند است عدد نوسلت به مقدار ثابت ۳/۶۶ نزدیک می‌شود. این حالت شبیه مسأله شار گرمایی ثابت فصل ۵ [معادله (۵-۱۰۷)] است با این تفاوت که در اینجا به‌جای تغییر خطی نسبت به طول، دمای ثابت دیواره داریم. وقتی عدد نوسلت به مقداری ثابت نزدیک می‌شود، نیم‌رخ دما کاملاً گسترش‌یافته است.

سیدر و تیت [۲] برای انتقال گرمای آرام در لوله‌ها، رابطه تجربی تا حدی ساده‌تر ارائه کرده‌اند:

$$Nu_d = 1/86 (Re_d\ Pr)^{1/3} \left(\frac{d}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0/14} \qquad (۶-۱۰)$$



شکل ۶-۴ ضرایب اصطکاک برای لوله‌ها، از مرجع ۵.

در این فرمول ضریب انتقال گرمای متوسط بر پایهٔ متوسط حسابی اختلاف دمای ورودی و خروجی و تمام خواص سیال در دمای کپه‌ای متوسط سیال ارزیابی می‌شود به‌جز μ_w که در دمای دیواره ارزیابی می‌شود. روشن است که معادله (۶-۱۰) را نمی‌توان برای لوله‌های خیلی دراز به‌کار برد زیرا ضریب انتقال گرمای حاصل از آن برابر صفر است. نودسن Knudsen و کاتز Katz [۹، صفحه ۱۹۲] معادله (۶-۱۰) را با سایر روابط مقایسه کرده، نشان دادند که این معادله به ازای:

$$Re_d\ Pr\ \frac{d}{L} > 10$$

معتبر است. حاصل ضرب اعداد رینولدز و پراندل در روابط جریان آرام به عدد پکلت Peclet معروف است:

$$Pe = \frac{du\rho c_p}{k} = Re_d\ Pr \qquad (۶-۱۱)$$

گاه محاسبه ضرایب انتقال گرمای آرام به علت همراه بودن آثار جابه‌جایی طبیعی با آثار جابه‌جایی اجباری پیچیده می‌شود. بررسی مسائل جابه‌جایی اجباری و آزاد ترکیبی در فصل ۷ انجام می‌گیرد.

روابط تجربی بالا به غیر از معادلهٔ (۶-۷)، برای لوله‌های صاف به‌کار می‌رود. به‌طور کلی از این روابط نمی‌توان برای لوله‌های زبر استفاده کرد و گاه بهتر است برای رسیدن به راه‌حل، از تشابه رینولدز بین اصطکاکِ سیال و انتقال گرما استفاده شود. چنان‌چه رابطه را بر حسب عدد استانتون بنویسیم:

$$St_b\ Pr_f^{2/3} = \frac{f}{8} \qquad (۶-۱۲)$$

ضریب اصطکاک f چنین تعریف می‌شود:

$$\Delta P = f \frac{L}{d} \rho\ \frac{u_m^2}{2g_c} \qquad (۶-۱۳)$$

که u_m سرعت جریان متوسط است. مقادیر ضریب اصطکاک برای زبری‌های مختلف در شکل ۶-۴ نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که معادلهٔ (۶-۱۲) همان معادلهٔ (۵-۱۱۴) است به غیر از عدد استانتون آن که در $Pr^{2/3}$ ضرب شده تا تغییر خواص گرمایی سیالات مختلف به‌حساب آید. این اصلاح طبق توصیه کولبورن [۵] انجام شده و دلیلش این است که ارتباط ضریب اصطکاک و انتقال گرما به عدد پراندل در جریان لوله مثل جریان صفحه تخت [معادله (۵-۵۶)] است. در معادله (۶-۱۲) عدد استانتون بر پایه دمای کپه‌ای به‌دست می‌آید در حالی که عدد پراندل و ضریب اصطکاک بر پایه خواصِ دمای فیلم محاسبه شده‌اند. برای کسب اطلاع بیش‌تر در زمینه آثار زبری لوله بر انتقال گرما مراجع ۲۷، ۲۹، ۳۰، ۳۱ را ببینید.

اگر مقطع کانالِ جریان دایره‌ای نباشد، پیشنهاد می‌کنیم روابط انتقال گرما بر پایه قطر هیدرولیکی، DH، نوشته شود که چنین

تعریف می‌شود:

$$D_H = \frac{4A}{P} \qquad (۱۴-۶)$$

که A مساحت مقطع جریان و P محیط مرطوب شده است. علت استفاده از این گروه‌بندی خاص جملات آن است که وقتی برای مقطع دایره‌ای به کار رود مقدار قطر فیزیکی را به‌دست می‌دهد. برای محاسبه اعداد رینولدز و نوسلت و یافتن ضریب اصطکاک برای استفاده در تشابه رینولدز باید از قطر هیدرولیکی استفاده کرد.

اغلب با استفاده از مفهوم قطر هیدرولیکی روابط قابل قبولی برای اصطکاک سیال و انتقال گرما در بسیاری از مسائل عملی به‌دست می‌آید ولی مواردی استثنایی وجود دارد که نمی‌توان از این روش استفاده کرد. ایروین Irvine [۲۰]، نودسن و کاتز [۹] بعضی از مسائل انتقال گرما در کانال‌های غیر دایره‌ای را خلاصه کرده‌اند. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای کسب اطلاع بیش‌تر این مراجع را ببیند.

شاه Shah و لاندن London [۴۰] اطلاعات انتقال گرما و اصطکاک سیال را برای جریان آرام کاملاً گسترش‌یافته در داکت‌های با مقاطع جریان مختلف گردآوری کرده‌اند و بعضی از این روابط در جدول ۶-۱ نشان داده شده‌اند. در این جدول نام‌گذاری چنین است و عدد نوسلت و رینولدز بر پایه قطر هیدرولیکی مساحت مقطع جریان است:

$\overline{\mathrm{Nu}}_H$ = عدد نوسلت متوسط برای شارگرمایی یکنواخت در جهت جریان و دمای یکنواخت دیواره در مقطع جریان خاص

$\overline{\mathrm{Nu}}_T$ = عدد نوسلت متوسط برای دمای دیوار یکنواخت

$\frac{f\mathrm{Re}_{DH}}{4}$ = حاصل‌ضرب ضریب اصطکاک و عدد رینولدز برپایه قطر هیدرولیکی

کیز Kays [۳۶] و سلارز Sellars، تریبوس Tribus و کلاین (مرجع ۳ فصل ۵) اعداد نوسلت متوسط و موضعی نواحی ورودی آرام لوله‌های با مقطع دایره‌ای را برای حالتی محاسبه کرده‌اند که نیم‌رخ سرعت کاملاً گسترش‌یافته است. نتایج حاصل از این تحلیل‌ها در شکل ۶-۵ برحسب معکوس عدد گراتز Graetz نشان داده شده‌اند که:

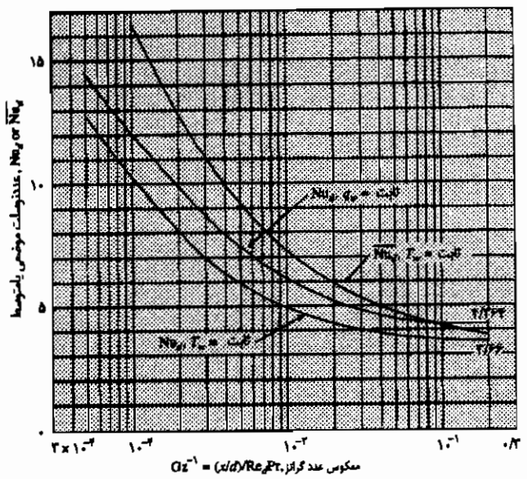
$$\text{عدد گراتز} = Gz = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,\frac{d}{x} \qquad (۱۵-۶)$$

☑جدول ۶-۱ انتقال‌گرما و اصطکاک سیال برای جریان آرام کاملاً گسترش یافته در کانال‌های با مقاطع مختلف. اعداد نوسلت متوسط بر پایه قطرهای هیدرولیک مقاطع است

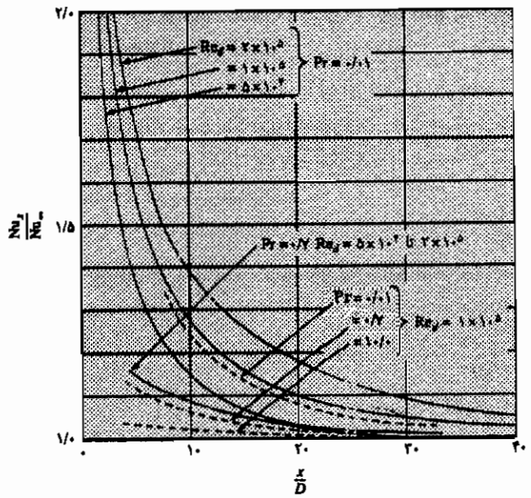
شکل هندسی $\left(\frac{L}{D_h} > ۱۰۰\right)$	Nu_H شارگرمایی‌محور ثابت‌دیواره	Nu_T دمای‌محوری ثابت‌دیواره	$\frac{f\mathrm{Re}_{DH}}{4}$
$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	۳/۱۱۱	۲/۴۷	۱۳/۳۳۳
$\frac{b}{a} = ۱$	۳/۶۰۸	۲/۹۷۶	۱۴/۲۲۷
	۴/۰۰۲	۳/۳۴	۱۵/۰۵۴
$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$	۴/۱۲۳	۳/۳۹۱	۱۵/۵۴۸
	۴/۳۶۴	۳/۶۵۷	۱۶/۰۰۰
$\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$	۵/۳۳۱	۴/۴۴	۱۸/۲۳
$\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$	۴/۷۹	۳/۹۶	۱۷/۲۵
$\frac{b}{a} = \frac{1}{8}$	۶/۴۹۰	۵/۵۹۷	۲۰/۵۸۵
$\frac{b}{a} = ۰$	۸/۲۳۵	۷/۵۴۱	۲۴/۰۰۰
$\frac{b}{a} = ۰$ گرم شده / عایق شده	۵/۳۸۵	۴/۸۶۱	۲۴/۰۰۰

آثار مدخل در جریان ناآرام در لوله‌ها پیچیده‌تر از حالت جریان آرام است و نمی‌توان آنها را برحسب تابع ساده‌ای از عدد گراتز بیان کرد. کیز [۳۶] اثر مزبور را برای چندین مقدار Re و Pr محاسبه کرده‌است که نتایج آن در شکل ۶-۶ خلاصه شده‌اند. محور yها نسبت عدد نوسلت موضعی به عدد نوسلت در فاصله‌ای دور از مدخل و یا برای شرایط گرمایی کاملاً توسعه یافته است. به طورکلی، هر چه عدد پراندل بزرگ‌تر باشد، طول مدخل کوتاه‌تر است. ملاحظه می‌شود که طول مدخل گرمایی برای جریان ناآرام خیلی کوتاه‌تر از طول مربوط به جریان آرام است.

بررسی کامل بسیاری از روابط انتقال گرمای موجود برای جریان در لوله و کانال توسط کاکاک Kakac و شاه shah و آونگ Aung [۴۶] داده شده است.



شکل ۶-۵ اعداد نوسلت موضعی و متوسط برای نواحی مدخل گرمایی لوله دایروی در جریان آرام کاملاً گسترش یافته.



شکل ۶-۶ اعداد نوسلت مدخل گرمایی ناآرام برای لوله‌های دایروی با q_w = ثابت.

مثال ۶-۱ جریان ناآرام در لوله

هوا با فشار ۲ atm و دمای ۲۰۰°C ضمن جریان در لوله‌ای به قطر ۱ in (۲/۵۴ cm) و با سرعت $۱۰\ \frac{m}{s}$ گرم می‌شود. انتقال گرمای واحد طول لوله را به ازای شرایط شارگرمایی ثابت در دیواره و دمای دیوارهٔ ۲۰ °C (در کل طول لوله) حساب کنید. دمای کپه‌ای در ۳ متر طول لوله چه قدر افزایش خواهد یافت؟

حل:

نخست عدد رینولدز را حساب می‌کنیم تا بدانیم آیا جریان آرام است یا ناآرام و سپس رابطه تجربی مناسب برای محاسبه انتقال گرما انتخاب می‌کنیم. خواص هوا در دمای کپه‌ای ۲۰۰°C عبارتند از:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(۲)(۱/۰۱۳۲\times۱۰^۵)}{(۲۸۷)(۴۷۳)} = ۱/۴۹۳\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^۳} \qquad \left[۰/۰۹۳۲\ \frac{\mathrm{lb}_m}{\mathrm{ft}^۳}\right]$$

$$\mathrm{Pr} = ۰/۶۸۱$$

$$\mu = ۲/۵۷\times۱۰^{-۵}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}} \quad \left[۰/۰۶۲۲\ \frac{\mathrm{lb}_m}{\mathrm{h.ft}}\right]$$

$$k = ۰/۰۳۸۶\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m.°C}} \quad \left[۰/۰۲۲۳\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft.°F}}\right]$$

$$C_p = ۱/۰۲۵\ \frac{\mathrm{KJ}}{\mathrm{Kg.°C}}$$

$$\mathrm{Re}_d = \frac{\rho u_m\, d}{\mu} = \frac{(۱/۴۹۳)(۱۰)(۰/۰۲۵۴)}{۲/۵۷\times۱۰^{-۵}} = ۱۴۷۵۶$$

بنابراین جریان ناآرام است. برای محاسبه ضریب انتقال گرما از معادلهٔ (۶-۴الف) استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{hd}{k} = ۰/۰۲۳\,\mathrm{Re}_d^{۰/۸}\,\mathrm{Pr}^{۰/۴} = (۰/۰۲۳)(۱۴۷۵۶)^{۰/۸}(۰/۶۸۱)^{۰/۴}$$

$$= ۴۲/۶۷$$

$$h = \frac{k}{d}\,\mathrm{Nu}_d = \frac{(۰/۰۳۸۶)(۴۲/۶۷)}{۰/۰۲۵۴}$$

$$= ۶۴/۸۵\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲.°\mathrm{C}} \qquad \left[۱۱/۴۲\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^۲.°\mathrm{F}}\right]$$

جریان گرمای واحد طول برابر است با:

$$\frac{q}{L} = h\,\pi\,d(T_w - T_b) = (۶۴/۸۵)\pi(۰/۰۲۵۴)(۲۰)$$

$$= ۱۰۳/۵\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}} \qquad \left[۱۰۷/۷\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{ft}}\right]$$

حالا می‌توانیم توازن انرژی را نوشته، افزایش دمای کپه‌ای را در ۳ متر طول لوله حساب کنیم:

$$q = \dot{m}\,C_p\,\Delta T_b = L\left(\frac{q}{L}\right)$$

هم چنین داریم:

$$\dot{m} = \rho u_m\,\frac{\pi d^۲}{۴} = (۱/۴۹۳)(۱۰)\,\pi\,\frac{(۰/۰۲۵۴)^۲}{۴}$$

$$= ۷/۵۶۵\times۱۰^{-۳}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \qquad \left[۰/۰۱۶۷\ \frac{\mathrm{lb}_m}{\mathrm{s}}\right]$$

مقادیر عددی فوق را در معادله انرژی وارد کرده، داریم:

$$(۷/۵۶۵\times۱۰^{-۳})(۱۰۲۵)\,\Delta T_b = (۳/۰)(۱۰۳/۵)$$

و:

$$\Delta T_b = ۴۰/۰۴°\mathrm{C} \qquad \left[۱۰۴/۰۷°\mathrm{F}\right]$$

مثال ۶-۲ گرمایش آب در جریان آرام در لوله

آب به دمای ۶۰°C با سرعت متوسط ۲ $\frac{cm}{s}$ وارد لوله‌ای به قطر ۱ in (۲/۵۴ cm) می‌شود. دمای آب خروجی را در صورتی حساب کنید که طول لوله ۳ متر بوده و دمای دیوار در ۸۰°C ثابت باشد.

حل :

نخست عدد رینولدز را در دمای کپه‌ای ورودی حساب می‌کنیم تا بتوانیم رژیم جریان را تعیین کنیم. خواص آب در ۶۰°C عبارتند از:

$$\rho = ۹۸۵ \frac{kg}{m^۳} \qquad c_p = ۴/۱۸ \frac{kJ}{kg.°C}$$

$$\mu = ۴/۷۱ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{ms} \qquad \left[۱/۱۳۹ \frac{lb_m}{h.ft}\right]$$

$$k = ۰/۶۵۱ \frac{W}{m.°C} \qquad Pr = ۳/۰۲$$

$$Re_d = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{(۹۸۵)(۰/۰۲)(۰/۰۲۵۴)}{۴/۷۱ \times ۱۰^{-۴}} = ۱۰۶۲$$

بنابراین جریان آرام است. با محاسبهٔ سنجه افزوده داریم.

$$Re_d \; Pr \frac{d}{L} = \frac{(۱۰۶۲)(۳/۰۲)(۰/۰۲۵۴)}{۳} = ۲۷/۱۵ > ۱۰$$

بنابراین می‌توان از معادله (۶-۱۰) استفاده کرد. هنوز دمای کپه‌ای متوسط را نمی‌دانیم تا خواص را ارزیابی کنیم بنابراین نخست محاسبه را بر پایه ۶۰°C انجام داده، دمای کپه‌ای خروجی را تعیین کرده، سپس تکرار دوم را انجام می‌دهیم تا مقدار دقیق‌تری را به‌دست آوریم. اگر شرایط ورودی و خروجی را به ترتیب با زیرنویس‌های ۱ و ۲ مشخص کنیم، معادله انرژی چنین خواهد بود:

$$q = h\pi dL \left(T_w - \frac{T_{b۱} + T_{b۲}}{۲} \right) = \dot{m}\, C_p\, (T_{b۲} - T_{b۱}) \quad \text{(الف)}$$

در دمای دیوار ۸۰°C داریم:

$$\mu_w = ۳/۵۵ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{m.s}$$

از معادلهٔ (۶-۱۰) داریم:

$$Nu_d = (۱/۸۶) \left[\frac{(۱۰۶۲)(۳/۰۲)(۰/۰۲۵۴)}{۳}\right]^{\frac{۱}{۳}} \left(\frac{۴/۷۱}{۳/۵۵}\right)^{۰/۱۴} = ۵/۸۱۶$$

$$h = \frac{k\, Nu_d}{d} = \frac{(۰/۶۵۱)(۵/۸۱۶)}{۰/۰۲۵۴} = ۱۴۹/۱ \frac{W}{m^۲.°C} \left[۲۶/۲۶ \frac{Btu}{h.ft^۲.°F}\right]$$

آهنگ جریان جرمی برابر است با:

$$\dot{m} = \rho \frac{\pi d^۲}{۴} u_m = \frac{(۹۸۵)\pi(۰/۰۲۵۴)^۲(۰/۰۲)}{۴} = ۹/۹۸۲ \times ۱۰^{-۳} \frac{kg}{s}$$

با وارد کردن مقدار h و $\dot{m}$ و $T_{b۱}$=۶۰°C و T_w=۸۰°C در معادله (الف) داریم:

$$(۱۴۹/۱)\, \pi\, (۰/۰۲۵۴)(۳/۰) \left(۸۰ - \frac{T_{b۲} + ۶۰}{۲}\right)$$

$$= (۹/۹۸۲ \times ۱۰^{-۳})(۴۱۸۰)(T_{b۲} - ۶۰) \quad \text{(ب)}$$

این معادله را می‌توان حل کرد و داریم:

$$T_{b۲} = ۷۱/۹۸\,°C$$

بنابراین باید به عقب برگشته، خواص را در دمای زیر ارزیابی کنیم:

$$T_{b\,\text{متوسط}} = \frac{۷۱/۹۸ + ۶۰}{۲} = ۶۶\,°C$$

داریم:

$$\rho = ۹۸۲ \frac{kg}{m^۳} \qquad c_p = ۴۱۸۵ \frac{J}{Kg.°C}$$

$$\mu = ۴/۳۶ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{m.s}$$

$$k = ۰/۶۵۶ \frac{W}{m.°C} \qquad Pr = ۲/۷۸$$

$$Re_d = \frac{(۱۰۶۲)(۴/۷۱)}{۴/۳۶} = ۱۱۴۷$$

$$Re\; Pr \frac{d}{L} = \frac{(۱۱۴۷)(۲/۷۸)(۰/۰۲۵۴)}{۳} = ۲۷/۰۰$$

$$Nu_d = (۱/۸۶)(۲۷/۰۰)^{\frac{۱}{۳}} \left(\frac{۴/۳۶}{۳/۵۵}\right)^{۰/۱۴} = ۵/۷۴۳$$

$$h = \frac{(۰/۶۵۶)(۵/۷۴۳)}{۰/۰۲۵۴} = ۱۴۸/۳ \frac{W}{m^۲.°C}$$

این مقدار h را مجدداً در معادلهٔ (الف) قرار داده، داریم:

$$T_{b۲} = ۷۱/۸۸°C \qquad [۱۶۱/۴°F]$$

در این مسأله با انجام تکرار به تفاوت خیلی کمی می‌رسیم. اگر اختلاف دمای کپه‌ای زیادی وجود داشت، تغییر خواص فیزیکی موجب اثر بیش‌تری می‌شد.

مثال ۶-۳ گرمایش هوا در جریان لوله آرام به ازای شار گرمایی ثابت

هوا در ۱ atm و ۲۷°C با سرعت ۳/۰ $\frac{m}{s}$ وارد لوله‌ای صاف به قطر ۵/۰ mm می‌شود. طول لوله ۱۰ cm است. روی دیوار لوله شار گرمایی ثابتی اعمال می‌شود. چنان‌چه دمای کپه‌ای خروجی برابر ۷۷°C باشد انتقال گرما را بیابید. دمای دیوارهٔ خروجی و مقدار h در خروج را نیز حساب کنید.

حل :

نخست باید نوع رژیم جریان را تعیین کنیم و برای این منظور خواص را در دمای کپه‌ای متوسط در نظر می‌گیریم:

$$\bar{T}_b = \frac{۲۷ + ۷۷}{۲} = ۵۲°C = ۳۲۵\; K$$

$$\nu = ۱۸/۲۲ \times ۱۰^{-۶} \frac{m^۲}{s} \qquad Pr = ۰/۷۰۳$$

$$k = ۰/۰۲۸۱۴ \frac{W}{m.°C}$$

$$Re_d = \frac{ud}{\nu} = \frac{(۳)(۰/۰۰۵)}{۱۸/۲۲ \times ۱۰^{-۶}} = ۸۲۳ \quad \text{(الف)}$$

بنابراین جریان آرام است. طول لوله نسبتاً کوتاه است پس اثر مدخل گرمایی وجود دارد و به شکل ۶-۵ مراجعه می‌کنیم. عکس عدد گراتز چنین حساب می‌شود:

$$Gz^{-۱} = \frac{۱}{Re_d\, Pr} \frac{x}{d} = \frac{۰/۱}{(۸۲۳)(۰/۷۰۳)(۰/۰۰۵)} = ۰/۰۳۴۶$$

بنابراین برای ثابت q_w=، عدد نوسلت در خروج را به کمک شکل ۶-۵ چنین می‌یابیم:

$$Nu = \frac{hd}{k} = ۴/۷ = \frac{q_w\, d}{(T_w - T_b)\, k} \quad \text{(ب)}$$

انتقال گرمای کل برحسب انرژی کل به‌دست می‌آید:

$$q = \dot{m}\, C_p\, (T_{b۲} - T_{b۱})$$

در مدخل $\rho = ۱/۱۷۷۴ \frac{kg}{m^۳}$ بنابراین جریان جرمی برابر است با:

$$\dot{m} = (۱/۱۷۷۴)\, \pi\, (۰/۰۰۲۵)^۲\, (۳/۰) = ۶/۹۴ \times ۱۰^{-۵} \frac{kg}{s}$$

و:

$$q = (۶/۹۴ \times ۱۰^{-۵})(۱۰۰۶)(۷۷ - ۲۷) = ۳/۴۹\; W$$

بنابراین می‌توانیم انتقال گرما را بدون تعیین دمای دیوار یا مقادیر h پیدا کنیم. گرچه برای تعیین T_w باید q_w را برای جای‌گزینی در معادلهٔ (ب) تعیین کنیم. داریم:

$$q = q_w\, \pi dL = ۳/۴۹\; W$$

و:

$$q_w = ۲۲۲۲ \frac{W}{m^۲}$$

اکنون از معادلهٔ (ب) داریم:

$$(T_w - T_b)_{x=L} = \frac{(۲۲۲۲)(۰/۰۰۵)}{(۴/۷)(۰/۰۲۸۱۴)} = ۸۴°C$$

بنابراین دمای دیوار در خروج برابر است با:

$$T_w|_{x=L} = ۸۴ + ۷۷ = ۱۶۱°C$$

و ضریب انتقال گرما برابر است با:

$$h_{x=L} = \frac{q_w}{(T_w - T_b)_{x=L}} = \frac{۲۲۲۲}{۸۴} = ۲۶/۴۵ \frac{W}{m^۲.°C}$$

مثال ۶-۴ گرمایش هوا وقتی دیواره لوله هم‌دماست.

مثال ۶-۳ را برای حالتی که دمای دیواره ثابت باشد تکرار کنید.

حل :

خواص را مثل قبل ارزیابی کرده، برای تعیین $\overline{Nu}_d$ به ازای ثابت T_w= به شکل ۶-۵ مراجعه می‌کنیم. به ازای $Gz^{-۱} = ۰/۰۳۴۶$ می‌خوانیم:

$$Nu_d = ۵/۱۵$$

سپس ضریب انتقال گرمای متوسط را چنین حساب می‌کنیم:

$$\bar{h} = (۵/۱۵) \left(\frac{k}{d}\right) = \frac{(۵/۱۵)(۰/۰۲۸۱۴)}{۰/۰۰۵} = ۲۹/۹۸ \frac{W}{m^۲.°C}$$

انتقال گرما را بر پایهٔ دمای کپه‌ای متوسط (۵۲°C) حساب می‌کنیم، بنابراین:

$$q = \bar{h}\, \pi\, dL\, (T_w - \bar{T}_b) = ۳/۴۹\; W$$

و:

$$T_w = ۷۶/۶۷ + ۵۲ = ۱۲۸/۶۷°C$$

مثال ۶-۵ انتقال گرما در لولهٔ زبر

لوله‌ای به قطر ۲/۰ cm به زبری نسبی ۰/۰۰۱ و دمای ثابت دیوارهٔ ۹۰°C است. آب در ۴۰°C وارد و در ۶۰°C خارج می‌شود. چنان‌چه سرعت ورودی ۳ $\frac{m}{s}$ باشد. طول لوله مورد نیاز برای انجام این گرمایش را حساب کنید.

حل :

نخست انتقال گرما را از فرمول زیر حساب می‌کنیم:

$$q = \dot{m}\, C_p\, \Delta T_b = (۹۸۹)(۳/۰)\, \pi\, (۰/۰۱)^۲ (۴۱۷۴)(۶۰ - ۴۰)$$

$$= ۷۷,۸۱۲\; W$$

در شرایط لولهٔ زبر می‌توان از رابطه پتوکف، معادلهٔ (۶-۷) استفاده کرد. دمای فیلم متوسط برابر است با:

$$T_f = \frac{۹۰ + ۵۰}{۲} = ۷۰°C$$

و خواص سیال عبارتند از:

$$\rho = ۹۷۸ \frac{kg}{m^۳} \qquad \mu = ۴/۰ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{m.s}$$

$$k = ۰/۶۶۴ \frac{W}{m.°C} \qquad Pr = ۲/۵۴$$

هم‌چنین:

$$\mu_b = ۵/۵۵ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{m.s}$$

$$\mu_w = ۲/۸۱ \times ۱۰^{-۴} \frac{kg}{m.s}$$

بنابراین عدد رینولدز برابر است با:

$$Re_d = \frac{(۹۷۸)(۳)(۰/۰۲)}{۴ \times ۱۰^{-۴}} = ۱۴۶۷۰۰$$

ضریب اصطکاک را با مراجعه به شکل ۶-۴ پیدا می‌کنیم:

$$f = ۰/۰۲۱۸ \qquad \frac{f}{۸} = ۰/۰۰۲۷۲۵$$

چون $T_w > T_b$ است $n = ۰/۱۱$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$Nu_d = \frac{(۰/۰۰۲۷۲۵)(۱۴۶,۷۰۰)(۲/۵۴)}{۱/۰۷ + (۱۲/۷)(۰/۰۰۲۷۲۵)^{\frac{۲}{۳}} (۲/۵۴^{\frac{۲}{۳}} - ۱)} \left(\frac{۵/۵۵}{۲/۸۱}\right)^{۰/۱۱}$$

$$= ۶۶۶/۸$$

$$h = \frac{(۶۶۶/۸)(۰/۶۶۴)}{۰/۰۲} = ۲۲۱۳۸ \frac{W}{m^۲.°C}$$

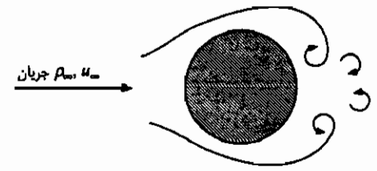
سپس طول لوله را از معادلهٔ توازن انرژی به‌دست می‌آوریم:

$$q = \bar{h}\, \pi\, dL\, (T_w - \bar{T}_b) = ۷۷۸۱۲\; W$$

$$L = ۱/۴۰\; m$$

❑ ۶-۳ جریان در عرض استوانه‌ها و کره‌ها

مهندسان اغلب به دنبال مشخصات انتقال گرمای سیستم جریان داخل لوله‌ها یا روی صفحات تخت هستند ولی گرما در جریان عرضی روی استوانه، شکل ۶-۷، نیز همان قدر اهمیت دارد. همان‌طور که انتظار می‌رود، توسعه لایه مرزی روی استوانه، مشخصات انتقال گرما را تعیین می‌کند. تا وقتی لایه مرزی آرام است، می‌توان انتقال گرما را با روشی مشابه تحلیل لایه مرزی فصل ۵، حساب کرد. گرچه در این تحلیل لازم است گرادیان فشار در نظر گرفته شود زیرا این گرادیان بر نیم‌رخ سرعت لایه مرزی اثر فراوانی می‌گذارد. در حقیقت این گرادیان فشار است که وقتی سرعت جریان آزاد خیلی زیاد باشد، موجب تشکیل ناحیه جریان جداشده در پشت استوانه می‌شود.

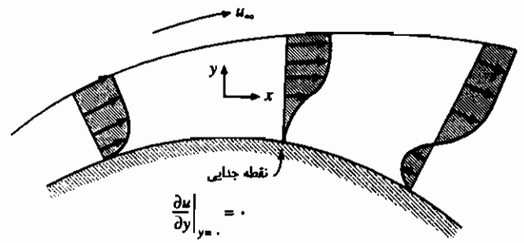


شکل ۶-۷ استوانه در جریان عرضی.

پدیده جدایی لایه مرزی در شکل ۶-۸ نشان داده شده است. دلیل فیزیکی کیفیت این پدیده آن است که طبق نظریهٔ لایه مرزی، اساساً فشار داخل لایه مرزی در هر محل xروی بدنه ثابت است. در حالت استوانه می‌توان فاصلهٔ xرا از نقطه رکود جلویی استوانه در نظر گرفت. بنابراین فشار در لایه مرزی باید از فشار جریان آزاد برای جریان پتانسیلی اطراف استوانه پیروی کند، به شرطی که این رفتار با بعضی اصول اساسی که باید در لایه مرزی اعمال شود متناقض نباشد. ضمن پیش‌روی جریان در طول قسمت جلویی استوانه، فشار کاهش یافته، سپس در طول قسمت پشت استوانه افزایش یافته، موجب افزایش سرعت جریان آزاد در قسمت جلویی استوانه و کاهش در قسمت پشت آن می‌شود. سرعت عرضی (سرعت موازی با سطح) از مقدار u_∞ در لبهٔ بیرونی لایه مرزی به صفر در سطح کاهش خواهد یافت. وقتی جریان به قسمت پشت استوانه پیش می‌رود، افزایش فشار موجب کاهش سرعت در جریان آزاد و در سراسر لایه مرزی می‌شود. افزایش فشار و کاهش سرعت با معادلهٔ برنولی که در طول خط جریان نوشته می‌شود به‌هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{dp}{\rho} = -\,d\left(\frac{u^2}{2g_c}\right)$$

از آنجا که فشار در سراسر لایه مرزی را ثابت فرض کرده‌ایم، می‌بینیم که ممکن است در لایه مرزی نزدیک سطح، جریان معکوس شود؛ یعنی اندازه حرکت لایه‌های سیال نزدیک سطح



شکل ۶-۸ پخش سرعت که جدایی جریان را روی استوانه در جریان عرضی نشان می‌دهد.

آن‌قدر بزرگ نیست که بر افزایش فشار غالب شود. وقتی گرادیان سرعت در سطح برابر صفر شود، می‌گوییم جریان به نقطه جدایی رسیده است:

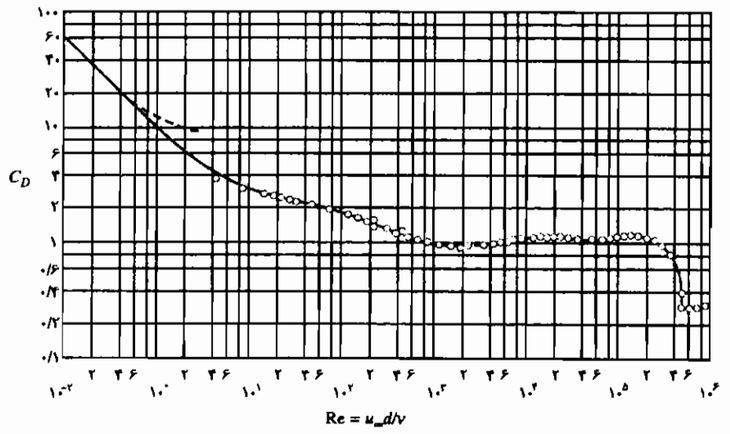
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad \text{نقطه جدایی در}$$

این نقطه جدایی را در شکل ۶-۸ نشان داده‌ایم. وقتی که جریان از نقطه جدایی بگذرد، ممکن است مطابق شکل ۶-۸ پدیده جریان معکوس رخ دهد. گاهی، ناحیهٔ جریان جداشده در قسمت پشت استوانه ناآرام و در هم می‌شود.

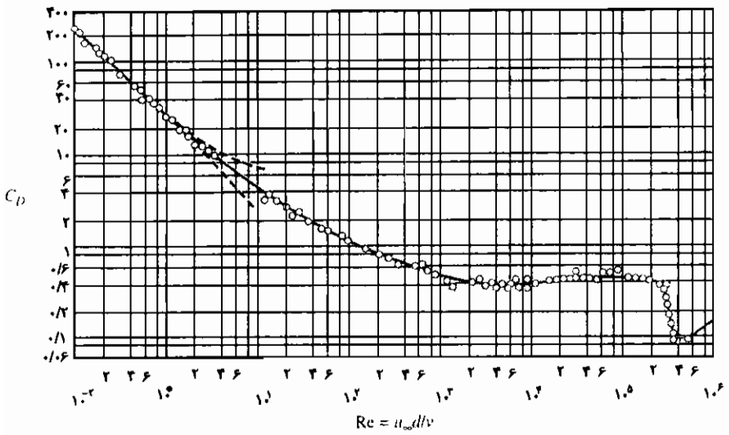
ضریب کشش برای اجسام شیب‌دار چنین‌تعریف می‌شود:

$$\text{نیروی کشش} = F_D = C_D A \frac{\rho u_\infty^2}{2g_c} \qquad (۶-۱۶)$$

که C_D ضریب کشش و Aسطح پیشانی در معرض جریان این جسم است که برای استوانه برابر حاصل‌ضرب قطر در طول است. مقادیر ضریب کشش برای استوانه‌ها و کره‌ها به‌صورت تابعی از عدد رینولدز در اشکال ۶-۹ و ۶-۱۰ داده شده‌اند.



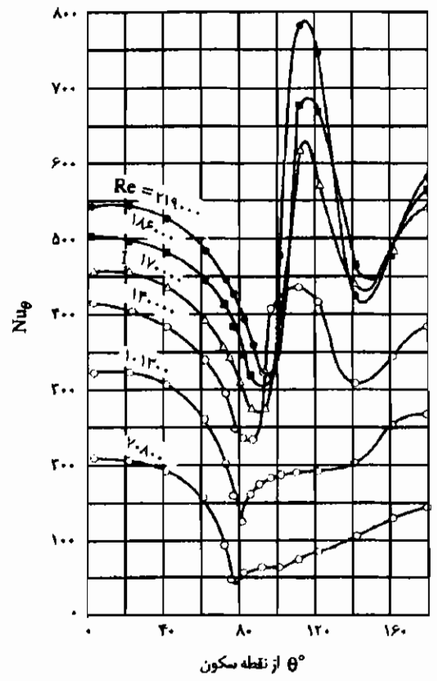
شکل ۶-۹
ضریب کشش برای استوانه‌های مستدیر به صورت تابعی از عددرینولدز، از مرجع ۶.



شکل ۶-۱۰
ضریب کشش برای کره‌ها به صورت تابعی‌از عدد رینولدز، از مرجع ۶.

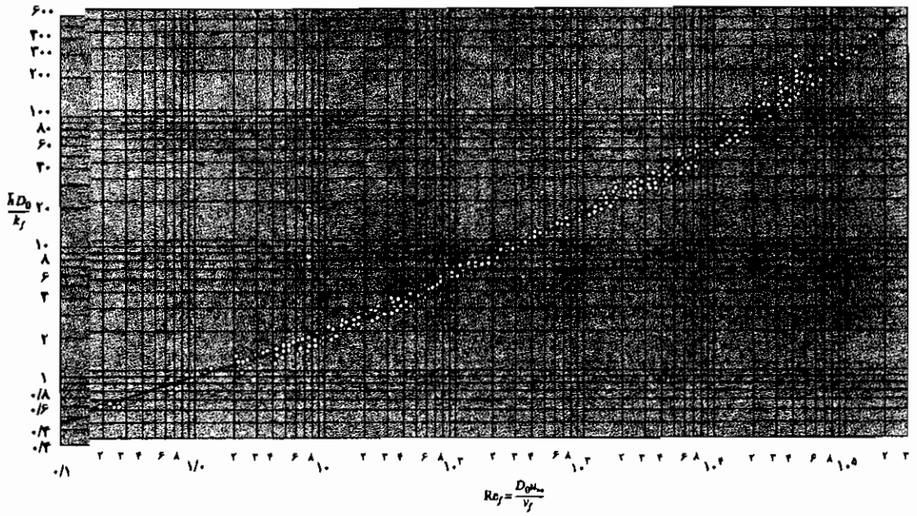
نیروی کشش روی استوانه ناشی از ترکیب مقاومت اصطکاکی و به اصطلاح فرم یا ناشی ازکشش فشاری است که از ناحیه کم‌فشارِ پشتِ استوانه به دلیل فرآیند جدایی جریان به‌وجود آمده است. به ازای اعداد رینولدز پایین هم‌مرتبهٔ واحد، جدایی جریان وجود ندارد و تمام کشش از اصطکاک لزجی ناشی می‌شود. به ازای اعداد رینولدز مرتبهٔ ده، اصطکاک و کشش فرم هم مرتبه‌اند در حالی‌که در اعداد رینولدز بیش از ۱۰۰۰، کشش فرم ناشی از ناحیه جریان جدا شده نا آرام حالت غالب دارد. در اعداد رینولد تقریباً برابر ۱۰۵، بر اساس قطر، ممکن است جریان لایه مرزی، ناآرام شده، موجب شیب بیشتر نیم‌رخ سرعت شده، جدایی جریان خیلی دیر صورت پذیرد. در نتیجه، کشش فرم کاهش می‌یابد که این کاهش با بریدن منحنی ضریب کشش در حدود $\mathrm{Re} = 3\times10^5$ نشان داده می‌شود. همین استدلال در مورد کره به کار می‌رود. در مورد سایر اجسام شیب‌دار مثل استوانه‌های با مقطع بیضی و ایرفویل‌ها[1] رفتار مشابهی دیده می‌شود.

روشن است که فرآیندهای جریانی بالا بر انتقال گرما از استوانه گرم شده به جریان سیال تأثیر می‌گذارند. گیدت [۷] رفتار انتقال گرما از استوانه گرم شده به هوا را مورد بررسی قرار داده است و نتایج حاصله در شکل ۶-۱۱ خلاصه شده‌اند. به ازای اعداد رینولدز پایین‌تر (۷۰۸۰۰ و ۱۰۱۳۰۰) ضریب انتقال گرمای کمینه تقریباً در نقطه جدایی رخ می‌دهد. در نتیجه، ضریب انتقال گرما روی قسمت عقبی استوانه، به علت حرکت گردابی ناآرام در جریان جداشده، افزایش می‌یابد. در اعداد رینولدز بالاتر دو نقطه کمینه ملاحظه می‌شود. اولی در نقطه‌گذار از لایه آرام به لایه مرزی ناآرام و دومی وقتی که لایه مرزی ناآرام جدا می‌شود،رخ می‌دهد. انتقال گرما در دو حالت سریعاً افزایش می‌یابد، یکی وقتی لایهٔ مرزی ناآرام می‌شود و دیگری وقتی که با افزایش حرکت گردابی در جدایی مواجه شویم.



شکل ۶-۱۱ عدد نوسلت موضعی برای انتقال گرما از استوانه در جریان عرضی، از مرجع ۷.

۱. Air foil جسمی به شکلی که وقتی در سیالی حرکت می‌کند مؤلفه قائم بر جهت حرکت نیروی اعمالی روی آن از مؤلفهٔ در جهت حرکت آن بزرگ‌تر است، مثل بال هواپیما، پرهٔ پروانه (م).



شکل ۶-۱۲ داده‌ها برای گرمایش و سرمایش هوایی که عمود بر استوانه جریان دارد، از مرجع ۱۰.

به علت طبیعت پیچیده فرآیندهای جدایی جریان، نمی‌توان ضرایب انتقال گرمای متوسط در جریان عرضی را به طور تحلیلی حساب کرد؛ گر چه روابط ارائه شده توسط هیلپرت Hilpert [۸] برای گازها و نودسن و کاتز [۹] برای مایعات نشان می‌دهد که ضرایب انتقال گرمای متوسط برای جریان در عرض ***استوانه‌ها*** را می‌توان از **فرمول** زیر حساب کرد:

$$\frac{hd}{k_f} = C \left(\frac{u_\infty d}{\nu_f}\right)^n \Pr_f^{\frac{1}{3}} \qquad (۶-۱۷)$$

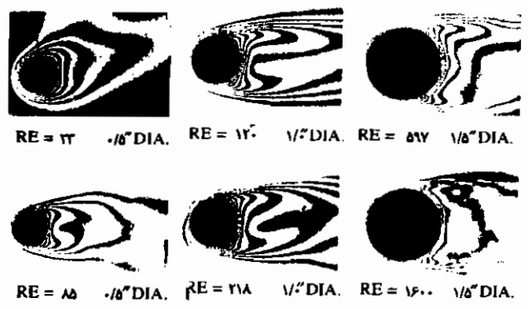
که ثابت‌های C و n در **جدول ۶-۲** آورده شده‌اند. داده‌های مربوط به انتقال گرما برای هوا در شکل ۶-۱۲ رسم شده‌اند. خواص مورد استفاده در معادلهٔ (۶-۱۷) در دمای فیلم ارزیابی شده و با زیرنویس f نشان داده شده‌اند.

در به‌دست‌آوردن ثابت‌های جدول ۶-۲، محاسبات اصلی برپایهٔ تنها داده‌های هوا صورت گرفت و پاره‌خطهای مستقیمی روی نقشه لگاریتمی مطابق شکل ۶-۱۲ رسم شد. عدد پراندل برای این داده‌ها در حدود ۰/۷۲، خیلی ثابت است. در مرجع ۹ استدلال شده است که از همین رابطه می‌توان با افزودن ضریب $\Pr^{\frac{1}{3}}$ و تقسیم آن بر $(۰/۷۲)^{\frac{1}{3}}$ و یا ضرب در ۱/۱۱ استفاده کرد. این استدلال در تجربه نیز ثابت شده است.

شکل ۶-۱۳ میدان دما در اطراف استوانه‌های گرم شدهٔ واقع در جریان هوای عرضی را نشان می‌دهد. خطوط تاریک، خطوط دماثابت‌اند که با تداخل‌سنج قابل رؤیت شده‌اند. به ناحیه جریان جدا شده در طرف پشت استوانه که به ازای اعداد رینولدز بالاتر ایجاد می‌شود و به میدان ناآرام موجود در آن ناحیه توجه کنید.

جدول ۶-۲ مقادیر ثابت برای استفاده در معادله (۶-۱۷)، براساس مراجع ۸ و ۹

Re_{df}	C	n
۰/۴-۴	۰/۹۸۹	۰/۳۳۰
۴-۴۰	۰/۹۱۱	۰/۳۸۵
۴۰-۴۰۰۰	۰/۶۸۳	۰/۴۶۶
۴۰۰۰-۴۰۰۰۰	۰/۱۹۳	۰/۶۱۸
۴۰۰۰۰-۴۰۰۰۰۰	۰/۰۲۶۶	۰/۸۰۵



شکل ۶-۱۳ عکس تداخل‌سنجی که هم دماهای اطراف استوانه افقی گرم شدهٔ واقع در جریان هوای عرضی را نشان می‌دهد.

فاند Fand [۲۱] نشان داد که ضرایب انتقال گرما از مایعات به استوانه‌ها در جریان عرضی را می‌توان با رابطهٔ زیر بهتر عرضه کرد:

$$Nu_f = (۰/۳۵ + ۰/۵۶ Re_f^{۰/۵۲}) Pr_f^{۰/۳} \qquad (۶-۱۸)$$

این رابطه برای $۱۰^{-۱} < Re_f < ۱۰^۵$ معتبر است به‌شرطی که جریان آزاد بیش از حد ناآرام نباشد.

در بعضی مواقع، به ویژه در محاسبات کامپیوتری، ممکن است کاربرد عبارتی پیچیده‌تر، راحت‌تر از معادلهٔ (۶-۱۷) باشد به‌شرطی که بتوان آن‌را در محدوده وسیع‌تری از اعداد رینولدز به کار برد. اکرت و دریک [۳۴] رابطهٔ زیر را برای انتقال گرما از لوله‌ها در جریان عرضی، بر اساس مطالعه جامع مراجع ۳۳ و ۳۹، توصیه می‌کنند:

$$Nu = (۰/۴۳ + ۰/۵۰ Re^{۰/۵}) Pr^{۰/۳۸} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{۰/۲۵}$$

برای $۱ < Re < ۱۰^۳$ (۶-۱۹)

$$Nu = ۰/۲۵ Re^{۰/۶} Pr^{۰/۳۸} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{۰/۲۵}$$

برای $۱۰^۳ < Re < ۲ \times ۱۰^۵$ (۶-۲۰)

می‌توان نسبت عدد پراندل را برای گازها حذف کرد و در این حالت خواص سیال در دمای فیلم ارزیابی می‌شود. برای مایعات این نسبت حفظ شده، خواص سیال در دمای جریان آزاد ارزیابی می‌شود. نتایج معادلات (۶-۱۹) و (۶-۲۰) با معادلهٔ (۶-۱۷) تا حد ۵ تا ۱۰ درصد تطابق دارد.

چرچیل وبرنشتین *Bernstein* [۳۷] رابطهٔ جامع‌تری ارائه کرده‌اند که برای کل محدوده داده‌های موجود قابل استفاده است:

$$Nu_d = ۰/۳ + \frac{۰/۶۲ Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۴}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \left[۱ + \left(\frac{Re}{۲۸۲,۰۰۰}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}}$$

برای $۱۰^۲ < Re_d < ۱۰^۷ ; Pe_d > ۰/۲$ (۶-۲۱)

این رابطه، داده‌ها را در حد میانی اعداد رینولدز یعنی بین ۲۰۰۰۰ و ۴۰۰۰۰۰ پیش‌بینی نمی‌کند و پیشنهاد می‌شود که برای این محدوده از فرمول زیر استفاده شود:

$$Nu_d = ۰/۳ + \frac{۰/۶۲ Re_d^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۴}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \left[۱ + \left(\frac{Re_d}{۲۸۲,۰۰۰}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

برای $۲۰,۰۰۰ < Re_d < ۴۰۰,۰۰۰ ; Pe_d > ۰/۲$ (۶-۲۲)

داده‌های انتقال گرمایی که برای رسیدن به معادله‌های (۶-۲۱) و (۶-۲۲) به کار می‌رود شامل سیالاتی مثل هوا، آب و سدیم مایع است. ویتیکر [۳۵] نیز رابطه‌ای به صورت زیر:

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k} = (۰/۴ Re^{۰/۵} + ۰/۰۶ Re^{\frac{2}{3}}) Pr^{۰/۴} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{۰/۲۵} \qquad (۶-۲۳)$$

برای $۴۰ < Re < ۱۰^۵$ و $۰/۶۵ < Pr < ۳۰۰$ و $۰/۲۵ < \frac{\mu_\infty}{\mu_w} < ۵/۲$

ارائه کرده است. تمام خواص در دمای جریان آزاد ارزیابی شده‌اند غیر از μ_w که در دمای دیواره است.

ناکایی nakai و اوکازاکی okazaki [۳۸] رابطهٔ زیر را به ازای مقادیر زیر $Pe_d = ۰/۲$ ارائه می‌کنند:

$$Nu_d = [۰/۸۲۳۷ - \ln (Pe_d^{\frac{1}{2}})]^{-۱} \quad Pe_d < ۰/۲ \qquad (۶-۲۴)$$

خواص مربوط به معادلات (۶-۲۱) و (۶-۲۲) و (۶-۲۴) در دمای فیلم ارزیابی می‌شوند.

انتخاب معادله برای جریان عرضی روی استوانه‌ها

در مورد انتخاب معادله برای جریان عرضی روی استوانه‌ها باید حدس‌هایی در نظرگرفت. واضح است که معادلهٔ (۶-۱۷) از نظر محاسباتی ساده‌ترین معادله و معادله (۶-۲۱) جامع‌ترین است. برای محاسبات کامپیوتری بهتر است از روابط جامع‌تر استفاده شود زیرا محدودهٔ وسیعی از اعداد رینولدز و سیالات را دربرمی‌گیرند. مثلاً کاربرد معادله (۶-۲۱) در هم‌بسته نمودن داده‌های سیالات از هوا تا سدیم‌مایع موفقیت‌آمیز بوده است. معادله (۶-۱۷) را نمی‌توان برای فلزات مایع به‌کار برد. در محاسبات مربوط به هوا از هر دو معادله می‌توان به نحو مطلوب استفاده کرد.

استوانه‌های غیر دایروی

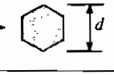
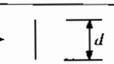
جاکوب Jakob [۲۲] نتایج حاصل از تجربیات مربوط به انتقال گرما از استوانه‌های غیردایروی را خلاصه کرده‌است. برای به‌دست آوردن همبستگی تجربی گازها می‌توان از معادلهٔ (۶-۱۷) استفاده کرد و ثابت‌های این معادله در جدول ۶-۳ خلاصه شده‌اند. داده‌های جدول ۶-۳ برای گازها $Pr \sim ۰/۷$ به‌دست آمده و با همان ضریب $Pr^{\frac{1}{3}}$ ۱/۱۱ مربوط‌به اطلاعات جدول ۶-۲ اصلاح‌شده است.

کره‌ها

مک آدامز McAdams [۱۰] رابطهٔ زیر را برای انتقال گرما از کره‌ها به گاز جاری پیشنهاد می‌کند:

$$\frac{hd}{k_f} = ۰/۳۷ \left(\frac{u_\infty d}{\nu_f}\right)^{۰/۶} \quad ,۱۷ < Re_d < ۷۰,۰۰۰ \qquad (۶-۲۵)$$

☑**جدول ۶-۳** مقادیر ثابت برای انتقال گرما از استوانه‌های غیر مستدیر، طبق مرجع ۲۲، برای استفاده در معادله (۶-۱۷)

شکل هندسی	Re_{df}	C	n
	$5\times10^3 - 10^5$	۰/۲۴۶	۰/۵۸۸
	$5\times10^3 - 10^5$	۰/۱۰۲	۰/۶۷۵
	$5\times10^3 - 1/95\times10^4$ $1/95\times10^4 - 10^5$	۰/۱۶۰ ۰/۰۳۸۵	۰/۶۳۸ ۰/۷۸۲
	$5\times10^3 - 10^5$	۰/۱۵۳	۰/۶۳۸
	$4\times10^3 - 1/5\times10^4$	۰/۲۲۸	۰/۷۳۱

آخنباخ Achenbach [۴۳] روابط قابل کاربرد در محدوده‌ای باز هم وسیع‌تر اعداد رینولدز را برای هوا با $Pr = 0/71$ به‌دست آورده است:

$$Nu = 2 + (0/25 + 3\times10^{-2}\,Re^{1/6})^{1/2}$$

برای $100 < Re < 3\times10^5$ (۶-۲۶)

$$Nu = 430 + aRe + bRe^2 + cRe^3$$

برای $3\times10^5 < Re < 5\times10^6$ (۶-۲۷)

با:

$$a = 5\times10^{-3} \quad b = 0/25\times10^{-9} \quad c = -3/1\times10^{-17}$$

برای به‌دست آوردن همبستگی در جریان مایعات روی کره‌ها می‌توان از داده‌های کرامرز Kramers [۱۱] استفاده کرد:

$$\frac{hd}{k_f}\,Pr_f^{-0.3} = 0/97 + 0/68\left(\frac{u_\infty d}{\nu_f}\right)^{0.5}$$

برای $1 < Re_d < 2000$ (۶-۲۸)

ولیت Vliet و لپرت Leppert [۱۹] برای انتقال گرما از کره به روغن و آب در محدوده وسیع‌تر اعداد رینولدز از ۱ تا ۲۰۰۰۰۰ عبارت زیر را پیشنهاد می‌کنند:

$$Nu\,Pr^{-0.3}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu}\right)^{0.25} = 1/2 + 0/53\,Re_d^{0.52} \qquad (۶-۲۹)$$

که تمام خواص در شرایط جریان آزاد ارزیابی شده‌اند به‌جز μ_w که در دمای سطح کره ارزیابی شده است. معادله (۶-۲۶) داده‌های مرجع ۱۱ و داده‌های جدیدتر مرجع ۱۹ را عرضه می‌کند.

وایتیکر [۳۵] تمام داده‌های فوق را در هم ادغام کرده و رابطه‌ای برای گازها و سیالات جاری روی کره‌ها، به‌دست آورده است:

$$Nu = 2 + (0/4\,Re_d^{1/2} + 0/06\,Re_d^{2/3})\,Pr^{0.4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4} \qquad (۶-۳۰)$$

که برای محدوده $3/5 < Re_d < 8\times10^4$ و $0/7 < Pr < 380$ معتبر است. خواص مربوط به معادلهٔ (۶-۳۰) در دمای جریان آزاد ارزیابی شده‌اند.

مثال ۶-۶ جریان هوا در عرض استوانه هم‌دما

هوا در ۱atm و ۳۵°C در عرض استوانه‌ای به قطر ۵/۰ cm با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای سطح استوانه برابر ۱۵۰°C است. اتلاف گرما به ازای واحد طول استوانه را بیابید.

حل :

نخست عدد رینولدز را تعیین و سپس ثابت‌های قابل کاربرد را از جدول ۶-۲ برای استفاده در معادلهٔ (۶-۱۷) پیدا می‌کنیم. خواص هوا در دمای فیلم ارزیابی می‌شود:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{150 + 35}{2} = 92/5°C = 365/5\ K$$

$$\rho_f = \frac{P}{RT} = \frac{1/01325\times10^5}{(287)(365/5)} = 0/966\ \frac{kg}{m^3} \qquad \left[0/0603\ \frac{lb_m}{ft^3}\right]$$

$$\mu_f = 2/14\times10^{-5}\ \frac{kg}{m.s} \qquad \left[0/0486\ \frac{lb_m}{h.ft}\right]$$

$$k_f = 0/0312\ \frac{W}{m.°C} \qquad \left[0/018\ \frac{Btu}{h.ft.°F}\right]$$

$$Pr_f = 0/695$$

$$Re_f = \frac{\rho u_\infty d}{\mu} = \frac{(0/966)(50)(0/05)}{2/14\times10^{-5}} = 1/129\times10^5$$

از جدول ۶-۲ داریم:

$$C = 0/0266 \qquad n = 0/805$$

بنابراین از معادلهٔ (۶-۱۷) داریم:

$$\frac{hd}{k_f} = (0/0266)(1/129\times10^5)^{0.805}(0/695)^{1/3} = 275/1$$

$$h = \frac{(275/1)(0/0312)}{0/05} = 171/7\ \frac{W}{m^2.°C} \qquad \left[30/2\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

بنابراین انتقال گرما به ازای واحد طول برابر است با:

$$\frac{q}{L} = h\,\pi d(T_w - T_\infty)$$
$$= (171/7)\,\pi(0/05)(150 - 35)$$
$$= 3100\ \frac{W}{m} \qquad \left[3226\ \frac{Btu}{ft}\right]$$

مثال ۶-۷ انتقال گرما از سیمی که با برق گرم شده است

سیم باریکی به قطر $3/94\times10^{-5}$ m در جریان هوایی به فشار ۱ atm و دمای ۲۵°C قرار دارد که با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ عمود بر سیم می‌وزد. جریان برق از سیم عبور می‌کند و دمای سطح آن‌را تا ۵۰°C بالا می‌برد. اتلاف گرما به ازای واحد طول را حساب کنید.

حل :

نخست خواص را در دمای فیلم به‌دست می‌آوریم:

$$T_f = \frac{(25 + 50)}{2} = 37/5°C = 310\ K$$

$$\nu_f = 16/7\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s} \qquad k = 0/02704\ \frac{W}{m.°C}$$

$$Pr_f = 0/706$$

عدد رینولدز برابر است با:

$$Re_d = \frac{u_\infty d}{\nu_f} = \frac{(50)(3/94\times10^{-5})}{16/7\times10^{-6}} = 118$$

عدد پکلت برابر $Pe = Re\ Pr = 83/3$ است و ملاحظه می‌شود که می‌توان معادلات (۶-۱۷) یا (۶-۲۱) یا (۶-۱۹) را به کار برد. محاسبه را با استفاده از ساده‌ترین عبارت (۶-۱۷) و پیچیده‌ترین عبارت (۶-۲۱) انجام داده، نتایج را مقایسه می‌کنیم:

با استفاده از معادلهٔ (۶-۱۷) به ازای $C = 0/683$ و $n = 0/466$ داریم:

$$Nu_d = (0/683)(118)^{0.466}(0/705)^{1/3} = 5/615$$

و مقدار ضریب انتقال گرما برابر است با :

$$h = Nu_d\left(\frac{k}{d}\right) = 5/615\ \frac{0/02704}{3/94\times10^{-5}} = 3854\ \frac{W}{m^2.°C}$$

بنابراین انتقال گرما به ازای واحد طول برابر است با:

$$\frac{q}{L} = \pi dh\,(T_w - T_\infty) = \pi\,(3/94\times10^{-5})(3854)(50 - 25)$$
$$= 11/93\ \frac{W}{m}$$

با استفاده از معادلهٔ (۶-۲۱) عدد نوسلت را چنین حساب می‌کنیم:

$$Nu_d = 0/3 + \frac{(0/62)(118)^{1/2}(0/705)^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0/4}{0/705}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}\left[1 + \left(\frac{118}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$
$$= 5/593$$

و :

$$h = \frac{(5/593)(0/02704)}{3/94\times10^{-5}} = 3838\ \frac{W}{m^2.°C}$$

و :

$$\frac{q}{L} = (3838)\,\pi\,(3/94\times10^{-5})(50 - 25) = 11/88\ \frac{W}{m}$$

در اینجا ملاحظه می‌شود که چنان‌چه مقدار حاصل از معادلهٔ (۶-۲۱) را صحیح بگیریم، جواب‌ها ۰/۴ درصد و با مقدار متوسط ۰/۲ درصد تفاوت دارد. با بررسی شکل (۶-۱۲) مشاهده می‌کنیم که بالا و پایین رفتن به اندازهٔ ۱۵± در صد غیر عادی نیست.

مثال ۶-۸ انتقال گرما از کره

هوا به فشار ۱ atm و دمای ۲۷°C در عرض کره‌ای به قطر ۱۲ mm با سرعت جریان آزاد $4\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. گرم‌کن کوچکی در داخل کره، دمای سطحی را در ۷۷°C نگه می‌دارد. اتلاف گرما از کره را بیابید.

حل :

با مراجعه به معادلهٔ (۶-۳۰) درمی‌یابیم که عدد رینولدز در دمای جریان آزاد ارزیابی شده است و از این‌رو به خواص زیر نیازمندیم:

در دمای $T_\infty = 27°C = 300\ K$،

$$\nu = 15/69\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s} \qquad k = 0/02624\ \frac{W}{m.°C}$$

$$Pr = 0/708 \qquad \mu_\infty = 1/8462\times10^{-5}\ \frac{kg}{m.s}$$

در دمای $T_w = 77°C = 350\ K$:

$$\mu_w = 2/075\times10^{-5}$$

بنابراین عدد رینولدز برابر است با:

$$Re_d = \frac{(4)(0/012)}{15/69\times10^{-6}} = 3059$$

از معادلهٔ (۶-۳۰) داریم:

$$\overline{Nu} = 2 + [(0/4)(3059)^{1/2}(0/06)(3059)^{2/3}]\,(0/708)^{0.4}\left(\frac{1/8462}{2/075}\right)^{1/4}$$
$$= 31/40$$

و:

$$\bar{h} = \overline{Nu}\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{(31/4)(0/02624)}{0/012} = 68/66\ \frac{W}{m^2.°C}$$

بنابراین، انتقال گرما برابر است با:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (68/66)(4\pi)(0/006)^2(77 - 27) = 1/553\,W$$

ضریب انتقال گرما را با استفادهٔ (۶-۲۵) برای مقایسه با عدد فوق حساب می‌کنیم. دمای فیلم برابر است با $T_f = \frac{(350 + 300)}{2} = 325\,K$ و در نتیجه:

$$\nu_f = 18/23\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s} \qquad k_f = 0/02814\ \frac{W}{m.°C}$$

و عدد رینولدز برابر است با:

$$Re_d = \frac{(4)(0/012)}{18/23\times10^{-6}} = 2633$$

از معادلهٔ (۶-۲۵) داریم:

$$Nu_f = (0/37)(2633)^{0.6} = 41/73$$

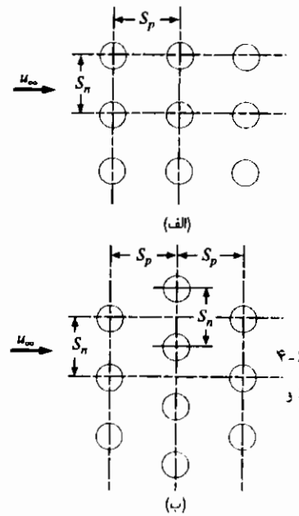
و $\bar{h}$ چنین حساب می‌شود:

$$\bar{h} = Nu\left(\frac{k_f}{d}\right) = \frac{(41/73)(0/02814)}{0/012} = 97/9\ \frac{W}{m^2.°C}$$

که حدود ۴۲ درصد بیش‌تر از مقدار محاسبه شدهٔ قبلی است.

❑ ۶-۴ جریان در عرض ردیف لوله‌ها

از آنجا که بسیاری از مبدل‌های گرمایی به‌صورت چند ردیف لوله آرایش یافته است، از نظر عملی مشخصات انتقال گرما برای ردیف‌های لوله اهمیت دارد. گریمسان Grimson [۱۲] مشخصات انتقال گرمای ردیف لوله‌های در یک خط و در غیر یک خط را مطالعه کرد و با هم‌بسته کردن نتایج حاصل توسط محققین مختلف توانست داده‌ها را به شکل معادلهٔ (۶-۱۷) ارائه کند. مقادیر اصلی برای گازها به ازای $Pr \sim 0/7$ بود و با همان ضریب $1/11Pr^{1/3}$ به کار رفته در جدول‌های ۶-۲ و ۶-۳ اصلاح شد تا کاربرد آن را به مایعات بسط دهد. مقادیر ثابت C و نمای n در جدول ۶-۴ برحسب سنجه‌های هندسی آرایش کلاف لوله، داده‌شده است. عدد رینولدز بر اساس سرعت بیشینه، یعنی سرعت در سطح جریان کمینه، در ردیف لوله‌ها به‌دست می‌آید. این مساحت به نوع آرایش هندسی لوله بستگی دارد. نام‌گذاری جدول ۶-۴ در شکل ۶-۱۴ نشان داده شده است. داده‌های جدول ۶-۴ مربوط به ردیف‌های لوله‌ای است که تعداد آن در جهت جریان برابر ده یا بیش‌تر باشد. چنان‌چه تعداد ردیف‌ها کم‌تر باشد نسبت h برای N ردیف در عمق به h مربوط به ده ردیف را از جدول ۶-۵ به‌دست می‌آوریم.



شکل ۶-۱۴
نام گذاری برای استفاده با جدول ۶-۴
(الف) ردیف‌های لوله در یک خط و
(ب) ردیف‌های در غیر یک خط.

تعیین بیشینهٔ سرعت جریان

بیشینه سرعت جریان در ردیف‌های لوله در یک خط در کمینهٔ سطح پیشانی ($S_n - d$) رخ می‌دهد که در معرض سرعت جریان آزاد ورودی u_∞ است. پس برای این شکل‌بندی،

$$u_{max} = u_\infty \left[\frac{S_n}{S_n - d}\right] \qquad \text{(آرایش در یک خط)}$$

جدول ۶-۴ همبستگی گریمسان برای انتقال گرما از کلاف لوله‌های ۱۰ ردیفه یا بیش‌تر، از مرجع ۱۲. برای استفاده از معادلهٔ (۶-۱۷)

$\frac{S_n}{d}$	۱/۲۵		۱/۵		۲/۰		۳/۰	
$\frac{S_p}{d}$	C	n	C	n	C	n	C	n
در یک خط								
۱/۲۵	۰/۳۸۶	۰/۵۹۲	۰/۳۰۵	۰/۶۰۸	۰/۱۱۱	۰/۷۰۴	۰/۰۷۰۳	۰/۷۵۲
۱/۵	۰/۴۰۷	۰/۵۸۶	۰/۲۷۸	۰/۶۲۰	۰/۱۱۲	۰/۷۰۲	۰/۰۷۵۳	۰/۷۴۴
۲/۰	۰/۴۶۴	۰/۵۷۰	۰/۳۳۲	۰/۶۰۲	۰/۲۵۴	۰/۶۳۲	۰/۲۲۰	۰/۶۴۸
۳/۰	۰/۳۲۲	۰/۶۰۱	۰/۳۹۶	۰/۵۸۴	۰/۴۱۵	۰/۵۸۱	۰/۳۱۷	۰/۶۰۸
درغیر یک خط								
۰/۶	–	–	–	–	–	–	۰/۲۳۶	۰/۶۳۶
۰/۹	–	–	–	–	۰/۴۹۵	۰/۵۷۱	۰/۴۴۵	۰/۵۸۱
۱/۰	–	–	–	۰/۵۵۸	۰/۵۵۲	–	–	–
۱/۱۲۵	–	–	–	–	–	۰/۵۳۱	۰/۵۶۵	۰/۵۷۵	۰/۵۶۰
۱/۲۵	۰/۵۷۵	۰/۵۵۶	۰/۵۶۱	۰/۵۵۴	۰/۵۷۶	۰/۵۵۶	۰/۵۷۹	۰/۵۶۲
۱/۵	۰/۵۰۱	۰/۵۶۸	۰/۵۱۱	۰/۵۶۲	۰/۵۰۲	۰/۵۶۸	۰/۵۴۲	۰/۵۶۸
۲/۰	۰/۴۴۸	۰/۵۷۲	۰/۴۶۲	۰/۵۶۸	۰/۵۳۵	۰/۵۵۶	۰/۴۹۸	۰/۵۷۰
۳/۰	۰/۳۴۴	۰/۵۹۲	۰/۳۹۵	۰/۵۸۰	۰/۴۸۸	۰/۵۶۲	۰/۴۶۷	۰/۵۷۴

جدول ۶-۵ نسبت h برای N ردیف عمق به h مربوط به ۱۰ ردیف عمق، از مرجع ۱۷

N	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
نسبت‌برای لوله‌های در غیر یک خط	۰/۶۸	۰/۷۵	۰/۸۳	۰/۸۹	۰/۹۲	۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۹	۱/۰
نسبت برای لوله‌های در یک خط	۰/۶۴	۰/۸۰	۰/۸۷	۰/۹۰	۰/۹۲	۰/۹۴	۰/۹۶	۰/۹۸	۰/۹۹	۱/۰

در آرایش در غیر یک خط، همین سرعت جریان بیشینه وجود دارد **به شرطی که مساحت عمودی در مدخل ردیف لوله مساحت جریان کمینه باشد.** این مطلب در مورد فاصله‌های کم در راستای موازی درست نیست، مثلاً وقتی وارد S_p کوچک است. در مورد لوله‌های در غیر یک خط، جریان از سطح $S_n - d$ ردیف لوله‌ها شده، سپس به دو سطح تقسیم می‌شود $d - \left[\left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + S_p^2\right]^{\frac{1}{2}}$ اگر جمع این دو سطح کم‌تر از $S_n - d$ باشد، آن گاه آنها نمایش‌گر کمینهٔ سطح جریان بوده و بیشینهٔ سرعت در ردیف لوله‌ها برابر است با

$$u_{max} = \frac{u_\infty \left(\frac{S_n}{2}\right)}{\left[\left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + S_p^2\right]^{\frac{1}{2}} - d}$$

که باز هم u_∞ سرعت جریان آزاد ورودی به ردیف لوله است.

افت فشار جریان گازها روی ردیف لوله‌ها را بر حسب پاسکال می‌توان از معادله (۶-۳۱) به‌دست آورد:

$$\Delta p = \frac{2f' G_{max}^2 N}{\rho} \left(\frac{\mu_w}{\mu_b}\right)^{-0.14} \qquad (۶-۳۱)$$

که G_{max} = سرعت جرم در سطح جریان کمینه بر حسب $\frac{kg}{m^2.s}$
ρ = چگالی ارزیابی‌شده در شرایط جریان آزاد برحسب $\frac{kg}{m^3}$
N = تعداد ردیف‌های عرضی
μ_b = متوسط لزجت جریان آزاد

جاکوب [۱۸] ضریب اصطکاک تجربی f' آرایش لوله غیر یک خط را چنین،

$$f' = \left\{0/25 + \frac{0/118}{\left[\frac{(S_n - d)}{d}\right]^{1/08}}\right\} Re_{max}^{-0.16} \qquad (۶-۳۲)$$

و برای آرایش لوله در یک خط چنین ارائه کرده است:

$$f' = \left\{0/044 + \frac{0/08 \frac{S_p}{d}}{\left[\frac{(S_n - d)}{d}\right]^{0.43} \frac{1/13d}{S_p}}\right\} Re_{max}^{-0.15} \qquad (۶-۳۳)$$

زوکاوسکاس Zukauskas [۳۹] اطلاعات بیش‌تری برای کلاف‌های لوله ارائه می‌کند که محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و تغییرات خواص را به حساب می‌آورد. معادلهٔ همبستگی چنین است:

$$Nu = \frac{\bar{h}\, d}{k} = C\, Re_{d,max}^n\, Pr^{0.36} \left(\frac{Pr}{Pr_w}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (۶-۳۴)$$

که تمام خواص به جز Pr_w در T_∞ ارزیابی شده‌اند و مقادیر ثابت برای تعداد ردیف لوله بیش از ۲۰، در جدول ۶-۶ داده شده‌اند. این معادله برای $0/7 < Pr < 500$ و $10 < Re_{d,max} < 10^6$ به کار می‌رود. نسبت عدد پراندل اثر اندکی روی گازها دارد و حذف می‌شود. بار دیگر توجه کنید که عدد رینولدز بر پایه سرعت بیشینه در کلاف لوله‌ها ارزیابی می‌شود. چنان‌چه تعداد ردیف‌ها در جهت

جدول ۶-۶ ثابت‌های رابطهٔ زوکاوسکاس [(۶-۳۴)] برای انتقال گرما در رشته‌های ۲۰ ردیف و بیش‌تر، از مرجع ۳۹

هندسه	$Re_{d,max}$	C	n
در یک خط	$10 - 10^3$	۰/۸	۰/۴
	$10^3 - 2 \times 10^5$	۰/۲۷	۰/۶۳
	$> 2 \times 10^5$	۰/۲۱	۰/۸۴
درغیریک‌خط	$10 - 10^3$	۰/۹	۰/۴
	$10^3 - 2 \times 10^5$	$\frac{S_n}{S_L} < 2$ برای $0/35\left(\frac{S_n}{S_L}\right)^{0.2}$	۰/۶
	$10^3 - 2 \times 10^5$	$\frac{S_n}{S_L} > 2$ برای ۰/۴۰	۰/۶۰
	$> 2 \times 10^5$	۰/۰۲۲	۰/۸۴

به صورت لوله‌های مجزا بررسی کنید

جریان کم‌تر از ۲۰ باشد باید از ضریب اصلاح جدول ۶-۷ استفاده کرد و این در مورد رابطهٔ گریمسان نیز صادق است. مورگان Morgan [۴۴] اطلاعات اضافی داده است. اطلاعات بیش‌تر در مورد افت فشار در مرجع ۳۹ داده شده است.

باید به‌خاطر داشت که این روابط داده‌های تجربی را با دقتی در حدود ۲۵ ± درصد هم‌بسته می‌کنند.

جدول ۶-۷ نسبت h برای N ردیف عمقی به h برای ۲۰ ردیف عمقی طبق مرجع ۳۹ و برای استفاده در معادلهٔ (۶-۳۴)

N	۱/۰	۱۰	۸	۶	۵	۴	۳	۲
درغیریک‌خط	۱/۰	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۴	۰/۹۲	۰/۸۹	۰/۸۴	۰/۷۷
دریک‌خط	۱/۰	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۴	۰/۹۲	۰/۹۰	۰/۸۰	۰/۷۰

مثال ۶-۹ گرمایش هوا با ردیف لوله در یک خط

هوا در ۱atm و ۱۰°C در عرض کلاف لولهٔ ۱۵ ردیف در ارتفاع و ۵ ردیف در عمق با سرعت $7 \frac{m}{s}$ (در نقطه‌ای از جریان قبل از آنکه هوا وارد رشته لوله‌ها گردد) جریان دارد. دمای سطح لوله‌ها برابر ۶۵°C است. قطر لوله‌ها $1\,in$ [۲/۵۴cm] است. این لوله‌ها در یک خط آرایش یافته‌اند به طوری که فاصله در جهت عمود و موازی جریان $1/5\,in$ [۳/۸۱ cm] است. کل انتقال گرمای واحد طول برای این رشته لوله و دمای هوای خروجی را حساب کنید.

حل :

ثابت‌های معادلهٔ (۶-۱۷) را می‌توان از جدول ۶-۴ و با استفاده از فرمول‌های زیر به‌دست آورد:

$$\frac{S_p}{d} = \frac{3/81}{2/54} = 1/5 \qquad \frac{S_n}{d} = \frac{3/81}{2/54} = 1/5$$

بنابراین:

$$C = 0/278 \qquad n = 0/620$$

خواص هوا در دمای فیلم ارزیابی می‌شود که مقدارآن در ورود به رشته لوله برابر است با:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{65 + 10}{2} = 37/5°C = 310/5\ K\ [558/9°R]$$

بنابراین:

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1/0132 \times 10^5}{(287)(310/5)} = 1/137 \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_f = 1/894 \times 10^{-5} \frac{kg}{m.s}$$

$$k_f = 0/027 \frac{W}{m.°C} \qquad \left[0/0156 \frac{Btu}{h.ft.°F}\right]$$

$$c_p = 1007 \frac{J}{kg.°C} \qquad \left[0/24 \frac{Btu}{lb_m.°F}\right]$$

$$Pr = 0/706$$

برای محاسبه سرعت بیشینه باید سطح جریان کمینه را معین کنیم. از شکل ۶-۱۴ در می‌یابیم که نسبت مساحت جریان کمینه به کل پیشانی برابر با $\frac{S_n - d}{S_n}$ است، بنابراین سرعت بیشینه برابر است با:

$$u_{max} = u_\infty \frac{S_n}{S_n - d} = \frac{(7)(3/81)}{3/81 - 2/54} = 21 \frac{m}{s}\ \left[68/9 \frac{ft}{s}\right] \qquad \text{(الف)}$$

که u_∞ سرعت قبل از ورود به رشته لوله است. عدد رینولدز را با استفاده از سرعت بیشینه حساب می‌کنیم:

$$Re = \frac{\rho u_{max}\, d}{\mu} = \frac{(1/137)(21)(0/0254)}{1/894 \times 10^{-5}} = 32020 \qquad \text{(ب)}$$

بنابراین ضریب انتقال گرما را از معادلهٔ (۶-۱۷) حساب می‌کنیم:

$$\frac{hd}{k_f} = (0/278)(32020)^{0.62}\,(0/706)^{\frac{1}{3}} = 153/8 \qquad \text{(پ)}$$

$$h = \frac{(153/8)(0/027)}{0/0254} = 164 \frac{W}{m.°C} \qquad \left[28/8 \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right] \qquad \text{(ت)}$$

اگر ده ردیف لوله در جهت جریان داشتیم مقدار h فوق مقدار ضریب انتقال گرما بود. چون تعداد ردیف‌ها پنج عدد است، این مقدار را باید در ضریب ۰/۹۲ جدول ۶-۵ ضرب کنیم.

مساحت کل انتقال گرمای واحد طول لوله برابر است با:

$$A = N\pi d\,(1) = (۱۵)(۵)\,\pi\,(۰/۰۲۵۴) = ۵/۹۸۵\ \frac{m^۲}{m}$$

که N تعداد کل لوله‌هاست.

باید دانست که قبل از محاسبه انتقال گرما، دمای هوا وقتی که در این رشته لوله جریان می‌یابد، بالا می‌رود. پس این نکته را باید در استفاده از فرمول زیر به حساب آورد:

$$q = hA(T_w - T_\infty) \qquad (ث)$$

به عنوان تقریب خوب می‌توانیم از مقدار متوسط عددی T_∞ استفاده کرده، توازن انرژی را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$q = hA\left(T_w - \frac{T_{\infty,۱} + T_{\infty,۲}}{۲}\right) = \dot{m}\,c_p\,(T_{\infty,۲} - T_{\infty,۱}) \qquad (ج)$$

که در اینجا زیرنویس‌های ۱ و ۲ ورود و خروج به رشته لوله را مشخص می‌کنند.

جریان جرمی در ورود به ۱۵ لوله برابر است با:

$$\dot{m} = \rho_\infty u_\infty\,(۱۵)\,S_n$$

$$\rho_\infty = \frac{p}{RT_\infty} = \frac{۱/۰۱۳۲\times۱۰^۵}{(۲۸۷)(۲۸۳)} = ۱/۲۴۶\ \frac{kg}{m^۳} \qquad (چ)$$

$$\dot{m} = (۱/۲۴۶)(۷)(۱۵)(۰/۰۳۸۱) = ۴/۹۹\ \frac{kg}{s} \qquad \left[۱۱/۰\ \frac{lb_m}{s}\right]$$

بنابراین معادلهٔ (ج) چنین می‌شود:

$$(۰/۹۲)(۱۶۴)(۵/۹۸۵)\left(۶۵ - \frac{۱۰ + T_{\infty ۲}}{۲}\right) = (۴/۹۹)(۱۰۰۶)(T_{\infty,۲} - ۱۰)$$

که پس از حل آن داریم:

$$T_{\infty,۲} = ۱۹/۰۸^\circ C$$

سپس انتقال گرما را از سمت راست معادلهٔ (ج) به‌دست می‌آوریم:

$$q = (۴/۹۹)(۱۰۰۵)(۱۹/۰۸ - ۱۰) = ۴۵/۶\ \frac{kW}{m}$$

این جواب را می‌توان با محاسبه مجدد خواص هوا، برپایه مقدار متوسط T_∞، اندکی به مقدار واقعی نزدیک‌تر کرد، ولی این نزدیک‌شدن اندک و در حد دقت معادلهٔ تجربی انتقال گرما (۶-۱۷) خواهد بود.

مثال ۶-۱۰ روش دیگر محاسبه

ضریب انتقال گرما از معادلهٔ (۶-۳۴) را با مقدار حاصل در مثال ۶-۹ مقایسه کنید.

حل :

خواص فیزیکی در معادلهٔ (۶-۳۴) در شرایط جریان آزاد $۱۰^\circ C$ ارزیابی شده‌اند و بنابراین داریم:

$$\nu = ۱۴/۲\times۱۰^{-۶}\ ,\ Pr = ۰/۷۱۲\ ,\ k = ۰/۰۲۴۹\ ,\ Pr_w = ۰/۷۰$$

عدد رینولدز برابرست با:

$$Re_{d,\max} = \frac{(۲۱)(۰/۰۲۵۴)}{۱۴/۲\times۱۰^{-۶}} = ۳۷۵۶۳$$

مقادیر ثابت معادلهٔ (۶-۳۴) با $C = ۰/۲۷$ و $n = ۰/۶۳$ برابر است.

با جای‌گذاری مقادیر فوق، داریم:

$$\frac{\bar{h}\,d}{k} = (۰/۲۷)(۳۷۵۶۳)^{۰/۶۳}\left(\frac{۰/۷۱۲}{۰/۷}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۲۰۶/۵$$

و :

$$h = \frac{(۲۰۶/۵)(۰/۰۲۴۹)}{۰/۰۲۵۴} = ۲۰۲/۴\ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$$

با ضرب آن در ضریب ۰/۹۲ از جدول ۶-۷ برای اصلاح مربوط به ۵ ردیف لوله داریم :

$$h = (۰/۹۲)(۲۰۲/۴) = ۱۸۶/۳\ \frac{W}{m^۲.^\circ C}$$

که ۱۳ درصد بیش‌تر از مقدار حاصل در مثال ۶-۹ است. هر دو مقدار درحد دقت‌های روابط قرار دارند.

❑ ۶-۵ انتقال گرمای فلز مایع

آهنگ انتقال گرمای فلزات مایع، بالاست و در سالهای اخیر توجه زیادی به علت این پدیده شده است. این آهنگ انتقال گرمای زیاد از ضریب هدایت گرمایی بالای فلزات مایع در مقایسه با سایر سیالات ناشی می‌شود؛ در نتیجه این فلزات مخصوصاً هنگامی که هدف، انتقال انرژی زیاد از فضایی نسبتاً کوچک است، مثلاً در راکتورهای هسته‌ای، قابل استفاده‌اند. به‌علاوه فلزات مایع در دماهای بالا مایع باقی می‌مانند در حالی‌که سیالات معمولی مثل آب و خنک کننده‌های آلی مختلف این‌طور نیستند. این امر طرح مبدل‌های گرمایی فشرده‌تر را نیز ممکن می‌سازد. حمل فلزات مایع به علت خاصیت خورندگی و کنش شدید آنها در تماس با آب یا هوا، مشکل است؛ با وجود این مزایای آنها در بعضی کاربردهای انتقال گرما نواقص‌شان را می‌پوشاند و برای حمل آنها روش‌های مناسبی به‌وجود آمده است.

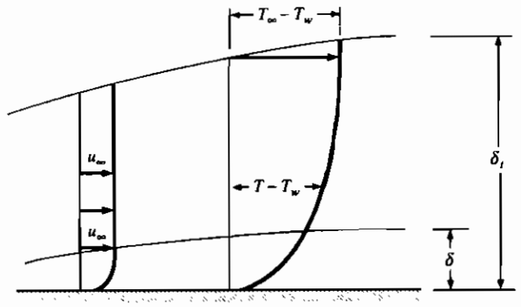
اکنون صفحه تخت ساده‌ای را در نظر بگیرید که فلزی سیال در عرض آن جاری است. عدد پراندل فلزات مایع خیلی کوچک و از مرتبه ۰/۰۱ است. بنابراین ضخامت لایه مرزی گرمایی باید به‌حد کافی بزرگ‌تر از ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی باشد. این وضع ناشی از بالابودن ضریب هدایت گرمایی فلزات مایع است و در شکل ۶-۱۵ نشان داده شده است. چون نسبت $\frac{\delta}{\delta_t}$ کوچک است، شکل نیم‌رخ سرعت در قسمت اعظم لایه مرزی گرمایی خیلی تخت است. بنابراین می‌توان برای محاسبهٔ انتقال گرما مدل جریان اسلاگ را به عنوان اولین تقریب فرض کرد؛ یعنی برای محاسبهٔ جمله انتقال انرژی در معادلهٔ انرژی انتگرالی (بخش ۵-۶) در سراسر لایه مرزی گرمایی عبارت زیر را در نظر گرفت:

$$u = u_\infty \qquad (۶-۳۵)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_۰^{\delta_t}(T_\infty - T)\,u\,dy\right] = \alpha\left.\frac{dT}{dy}\right]_w \qquad (۶-۳۶)$$

شرایط مربوط به نیم‌رخ دما همان شرایط بخش ۵-۶ است، بنابراین مثل قبل از سهمی درجه سه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{۳}{۲}\frac{y}{\delta_t} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^۳ \qquad (۶-۳۷)$$



شکل ۶-۱۵ رژیم‌های لایه مرزی برای تحلیل انتقال گرمای فلز مایع.

با جای‌گذاری معادلات (۶-۳۱) و (۶-۳۳) در (۶-۳۲) داریم:

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\int_۰^{\delta_t}\left[۱ - \frac{۳}{۲}\frac{y}{\delta_t} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{u}{\delta_t}\right)^۳\right]dy\right\} = \frac{۳\alpha\theta_\infty}{۲\delta_t} \qquad (۶-۳۸)$$

پس از انتگرال‌گیری داریم:

$$۲\delta_t\,d\delta_t = \frac{۸\alpha}{u_\infty}\,dx \qquad (۶-۳۹)$$

جواب این معادله دیفرانسیل برای صفحه‌ای که در سراسر طول‌اش گرما می‌بیند چنین است:

$$\delta_t = \sqrt{\frac{۸\alpha x}{u_\infty}} \qquad (۶-۴۰)$$

ضریب انتقال گرما را می‌توان چنین بیان کرد:

$$h_x = \frac{-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}{T_w - T_\infty} = \frac{۳k}{۲\delta_t} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\,k\,\sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha x}} \qquad (۶-۴۱)$$

این رابطه را می‌توان به صورت بی‌بعد زیر نوشت:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = ۰/۵۳۰(Re_x\,Pr)^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۵۳۰\ Pe^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۶-۴۲)$$

بسا استفاده از معادلهٔ (۵-۲۱) برای ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی داریم:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{۴/۶۴}{Re_x^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۶-۴۳)$$

می‌توان نسبت $\frac{\delta}{\delta_t}$ را محاسبه کرد:

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \frac{۴/۶۴}{\sqrt{۸}}\sqrt{Pr} = ۱/۶۴\sqrt{Pr} \qquad (۶-۴۴)$$

با استفاده از $Pr\sim ۰/۰۱$ داریم:

$$\frac{\delta}{\delta_t} \sim ۰/۱۶$$

که با مدل جریان اسلاگ در نظر گرفته شده تطابق خوبی دارد.

مدل جریان فوق سرشت عمومی انتقال گرمای فلز مایع را نشان داده و لازم است گفته شود که انتقال گرما به عدد پکلت بستگی دارد. روابط تجربی را معمولاً برحسب این سنجه بیان می‌کنند. چهار تا از این روابط را در زیر ارائه کرده‌ایم.

برای کسب اطلاعات جامع در زمینه فلزات مایع به مرجع ۱۳ مراجعه کنید. مشخصات انتقال گرما در مرجع ۲۳ خلاصه شده است. لوبارسکی Lubarsky و کافمان Kaufman [۱۴] رابطهٔ زیر را برای محاسبه ضرایب انتقال گرمای جریان کاملاً ناآرام توسعه یافتهٔ فلزات مایع در لوله‌های صاف با شار گرمایی یکنواخت در دیواره، توصیه می‌کنند:

$$Nu_d = \frac{hd}{k} = ۰/۶۲۵\ (Re_d\,Pr)^{۰/۴} \qquad (۶-۴۵)$$

کلیه خواص در معادلهٔ (۶-۴۵) در دمای کپه‌ای ارزیابی می‌شود. معادلهٔ (۶-۴۵) برای $۱۰^۲ < Pe < ۱۰^۴$ و برای $\frac{L}{d} > ۶۰$ معتبر است. سبان Seban و شیمازاکی Shimazaki [۱۶] رابطهٔ زیر را برای محاسبه انتقال گرمای فلزات مایع در لوله‌ها با دمای دیواره ثابت پیشنهاد می‌کنند:

$$Nu_d = ۵/۰ + ۰/۰۲۵\ (Re_d\,Pr)^{۰/۸} \qquad (۶-۴۶)$$

که در آن کلیه خواص در دمای کپه‌ای ارزیابی می‌شود. معادلهٔ (۶-۴۲) برای $Pe > ۱۰^۲$ و $\frac{L}{d} > ۶۰$ معتبر است.

داده‌های جدیدتری که توسط اسکوپینشی Skupinshi، تورتل Tortel و وتری Vautrey [۲۶] در مورد مخلوط‌هایی از سدیم - پتاسیم ارائه شده، نشان می‌دهد که معادلهٔ زیر برای شرایط شار گرمایی ثابت بر معادلهٔ (۶-۴۵) برتری دارد:

$$Nu = ۴/۸۲ + ۰/۰۱۸۵\ Pe^{۰/۸۲۷} \qquad (۶-۴۷)$$

این رابطه برای $۹/۰۵\times۱۰^۵ > Re > ۳/۶\times۱۰^۳$ و $۱۰^۲ < Pe < ۱۰^۴$ معتبر است.

وایت Witte [۳۲] انتقال گرما از کره به سدیم مایع را در جابه‌جایی اجباری با استفاده از فرمول زیر برای محدوده اعداد رینولدز $۱/۵۲۵\times۱۰^۵ > Re > ۳/۵۶\times۱۰^۲$ اندازه‌گیری کرده است.

$$Nu = ۲ + ۰/۳۸۶\ (Re\,Pr)^{۰/۵} \qquad (۶-۴۸)$$

کالیش Kalish و دایر Dwyer [۴۱] اطلاعاتی در زمینه انتقال گرمای فلز مایع در رشته‌های لوله ارائه کرده‌اند.

به‌طور کلی، در زمینه انتقال گرمای فلز مایع سئوالات بی‌جواب بسیاری وجود دارد و خواننده می‌تواند برای کسب اطلاع بیش‌تر مراجع ۱۳ و ۲۳ را ببیند.

مثال ۶-۱۱ گرمایش بیسموت مایع در لوله

بیسموت مایع با آهنگ $4/5\frac{kg}{s}$ در لوله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ به قطر 5/0 cm جریان دارد. بیسموت با دمای 415°C وارد و ضمن عبور از لوله تا 440°C گرم می‌شود. چنان‌چه در طول لوله شار گرمایی ثابتی وجود داشته باشد و دمای دیواره لوله 20°C بیش‌تر از دمای کپه‌ای بیسموت باشد، طول لوله‌ای را که موجب این انتقال گرما می‌شود، حساب کنید.

حل :

چون شار گرمایی ثابت است می‌توانیم برای محاسبه ضریب انتقال گرما از معادله (۶-۴۷) استفاده کنیم. خواص بیسموت در دمای کپه‌ای متوسط $\frac{(415+440)}{2}=427/5°C$ ارزیابی می‌شود.

$\mu = 1/34\times10^{-3}\ \frac{kg}{m.s}$ $\left[3/242\ \frac{lb_m}{h.ft}\right]$

$c_p = 0/149\ \frac{kJ}{kg.°C}$ $\left[0/0356\ \frac{Btu}{lb_m.°F}\right]$

$k = 15/6\ \frac{W}{m.°C}$ $\left[9/014\frac{Btu}{h.ft.°F}\right]$

$Pr = 0/013$

کل انتقال گرما چنین حساب می‌شود:

$$q = \dot{m}\, c_p\, \Delta T_b = (4/5)(149)(440-415)$$

$$= 16/76\ kW \quad \left[57,186\ \frac{Btu}{h}\right] \qquad \text{(الف)}$$

عدد رینولدز و پکلت را چنین حساب می‌کنیم:

$$Re_d = \frac{dG}{\mu} = \frac{(0/05)(4/5)}{\left[\frac{\pi(0/05)^2}{4}\right](1/34\times10^{-3})} = 85,520 \qquad \text{(ب)}$$

$$Pe = Re\ Pr = (85,520)(0/013) = 1111$$

سپس ضریب انتقال گرما از معادلهٔ (۶-۴۷) حساب می‌شود:

$$Nu_d = 4/82 + (0/0185)(1111)^{0/827} = 10/93 \qquad \text{(پ)}$$

$$h = \frac{(10/93)(15/6)}{0/05} = 3410\ \frac{W}{m^2.°C} \qquad \left[600\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

کل سطح مورد نیاز را می‌توان از معادلهٔ زیر به‌دست آورد:

$$q = h\, A(T_w - T_b) \qquad \text{(ت)}$$

اگر اختلاف دما را 20°C در نظر بگیریم:

$$A = \frac{16760}{(3410)(20)} = 0/246\ m^2 \qquad [2/65\ ft^2]$$

و در نتیجه طول لازم برابر است با:

$$A = \pi\, dL \quad , \quad L = \frac{0/246}{\pi\ (0/05)} = 1/57\ m\ [5/15\ ft]$$

❑ ۶-۶ خلاصه درس

در این فصل بر خلاف فصل ۵ که عمدتاً تحلیلی بود، روابطی تجربی را بررسی کردیم که می‌توان از آنها برای محاسبه انتقال گرمای جابه‌جایی استفاده کرد. روش کلی این محاسبه چنین است:

۱- هندسه حالت مورد نظر را مشخص کنید.

۲- ابتدا خواص سیال مناسب را تعیین کنید.

۳- رژیم جریان را با محاسبه عدد رینولدز یا پکلت مشخص کنید.

۴- معادله‌ای مناسب با هندسه و رژیم جریان انتخاب کنید و چنان‌چه لازم باشد خواص فیزیکی را مجدداً مطابق با قرارهای گذاشته‌شده و معادلهٔ یاد شده، ارزیابی کنید.

۵- مقدار h و یا آهنگ انتقال گرما را محاسبه کنید.

یادآور می‌شویم که داده‌هایی که معادلات تجربی براساس آنها نوشته می‌شود اغلب در شرایط آزمایشگاهی که امکان اعمال کنترل دقیق دما و متغیرهای جریان وجود دارد، به‌دست آمده‌اند. ممکن است در عمل چنین کنترل دقیقی وجود نداشته باشد و ممکن است مقادیر واقعی با آهنگ انتقال گرمای حاصل از معادلات عرضه شده در اینجا تفاوت‌هایی داشته باشد. با این تذکر هدف ناامید کردن خواننده نیست بلکه صرفاً می‌خواهیم نشان دهیم که گاهی استفاده از رابطه‌ای ساده می‌تواند کاملاً درست و بهتر از عبارتی مشکل‌تر باشد؛ حتی اگر جواب‌های حاصل از معادله ساده با مقدار واقعی تفاوت زیادی داشته باشد. هدف، ارائه انواع رابطه بوده است (تا حد ممکن) تا بتوان از بین آنها بعضی را انتخاب کرد.

مهم‌ترین روابط این فصل در جدول ۶-۸ برای مراجعه سریع فهرست شده‌اند.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ معادله دیتوس - بولتر چیست؟ چه موقع به کار می‌رود؟

۲ چگونه ضرایب انتقال گرمای جریان در لوله‌های ناصاف را می‌توان حساب کرد؟

۳ قطر هیدرولیکی چیست؟ چه موقع به کار می‌رود؟

۴ شکل معادله‌ای که در محاسبه انتقال گرمای جریان روی استوانه‌ها و اجسام شیب‌دار به کار می‌رود چیست؟

۵ چرا وقتی مدل جریان - اسلاگ را برای انتقال گرمای فلز - مایع به کار می‌بریم نتایج قابل قبولی به‌دست می‌آید؟

۶ عدد پکلت چیست؟

۷ عدد گراتز چیست؟

☑ **جدول ۶-۸** خلاصه‌ای از روابط جابه‌جایی اجباری (برای خواص ارزیابی شده به متن کتاب مراجعه کنید)

پانویس‌ها: b = دمای کپه‌ای، f = دمای فیلم، ∞ = دمای جریان آزاد، w = دمای دیواره

هندسه	معادله	محدودیت‌ها	شمارهٔ معادله
جریان لوله‌ای	$Nu_d = 0/023 Re_d^{0/8} Pr^n$	جریان ناآرام کاملاً توسعه یافته، برای گرمایش $n = 0/4$، برای سرمایش $n = 0/3$، $0/6 < Pr < 100$، $2500 < Re < 1/25\times10^5$	(۶-۴ الف)
جریان لوله‌ای	$Nu = 0/0214(Re^{0/8} - 100)Pr^{0/4}$	$0/5 < Pr < 1/5$، $10^4 < Re < 5\times10^6$	(۶-۴ ب)
جریان لوله‌ای	$Nu = 0/012(Re^{0/87} - 280)Pr^{0/4}$	$1/5 < Pr < 500$، $3000 < Re < 10^6$	(۶-۴ پ)
جریان لوله‌ای	$Nu_d = 0/027\ Re_d^{0/8}\ Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{(0/14)}$	جریان ناآرام کاملاً توسعه یافته	(۶-۵)
جریان لوله‌ای، ناحیه مدخل	$Nu_d = 0/036\ Re_d^{0/8}\ Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{0/055}$ شکل‌های ۶-۵ و ۶-۶ را نیز ملاحظه کنید	جریان نا آرام $10 < \frac{L}{d} < 400$	(۶-۶)
جریان لوله‌ای	رابطهٔ پتوکف	جریان ناآرام کاملاً توسعه یافته، $0/5 < Pr < 2000$، $10^4 < Re_d < 5\times10^6$، $0 < \frac{\mu_b}{\mu_w} < 40$	(۶-۷)
جریان لوله‌ای	$Nu_d = 3/66 + \frac{0/0668\left(\frac{d}{L}\right) Re_d\ Pr}{1 + 0/04\left[\left(\frac{d}{L}\right)Re_d\ Pr\right]^{\frac{2}{3}}}$	آرام	(۶-۹)
جریان لوله‌ای	$Nu_d = 1/86\ (Re_d Pr)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0/14}$	جریان آرام کاملاً توسعه یافته، $Re_d\ Pr\ \frac{d}{L} > 10$	(۶-۱۰)
لوله‌های ناصاف	معادلهٔ (۶-۷) یا $St_b\ Pr_f^{\frac{2}{3}} = \frac{f}{8}$	جریان ناآرام کاملاً توسعه یافته	(۶-۱۲)
کانال‌های غیرمستدیر	عدد رینولدز ارزیابی شده براساس قطرهیدرولیک $D_H = \frac{4A}{P}$ پیرامون مرطوب شده $= P$ و مساحت مقطع جریان $= A$	مثل معادلهٔ خاص برای جریان لوله‌ای	(۶-۱۴)
جریان در عرض استوانه‌ها	$Nu_f = C\ Re_{df}^n\ Pr^{\frac{1}{3}}$ C و n از جدول ۶-۲	$0/4 < Re_{df} < 400,000$	(۶-۱۷)
جریان در عرض استوانه‌ها	$Nu_{df} = 0/3 + \frac{0/62\ Re_f^{\frac{1}{2}}\ Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1+\left(\frac{0/4}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \left(\frac{Re_f}{282,000}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{2}{5}}$	$10^2 < Re_f < 10^7$، $Pe > 0/2$	(۶-۲۱)
جریان در عرض استوانه‌ها		متن درس را ببینید	(۶-۱۸) تا (۶-۲۰)
			(۶-۲۲) تا (۶-۲۴)
جریان درعرض استوانه‌های غیر مستدیر	$Nu = C Re_{df}^n\ Pr^{\frac{1}{3}}$ جدول ۶-۳ را برای مقادیر C و n ببینید		(۶-۱۷)
جریان در عرض کره‌ها	$Nu_{df} = 0/37\ Re_{df}^{0/8}$	(گازها) $Pr \sim 0/7$ ، $17 < Re < 70000$	(۶-۲۵)
	$Nu\ Pr^{-0/4}\left(\frac{\mu_w}{\mu}\right)^{0/25} = 1/2 + 0/53 Re_d^{0/52}$	آب و روغن، $1 < Re < 200000$، خواص در T_∞	(۶-۲۹)
	$Nu = 2 + (0/4\ Re_d^{\frac{1}{2}} + 0/06 Re_d^{\frac{2}{3}}) Pr^{0/4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{\frac{1}{4}}$	$0/7 < Pr < 380$، $3/5 < Re < 80000$، خواص در T_∞	(۶-۳۰)

☑ ادامه جدول ۶-۸

هندسه	معادله	محدودیت‌ها	شمارهٔ معادله
جریان در عرض ردیف لوله‌ها	$Nu_f = C_{f,max}Re^n \quad Pr_f^{\frac{1}{3}}$ C و n از جدول ۶-۴	متن درس را ببینید	(۶-۱۷)
جریان در عرض ردیف لوله‌ها	$Nu = C_{d,max}Re^n \quad Pr^{0.36}\left(\frac{Pr}{Pr_w}\right)^{\frac{1}{4}}$	$0.7 < Pr < 500$ $10 < Re_{d,max} < 10^6$	(۶-۳۴)
فلزات مایع		متن درس را ببینید	(۶-۳۷) تا (۶-۴۸)
ضریب اصطکاک	$\Delta p = f\left(\frac{L}{d}\right)\frac{\rho \bar{u}^2}{2g_c}$		(۶-۱۳)
	$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c}$		

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۶-۱ جریان ناآرام در لوله
۶-۲ گرمایش آب در جریان آرام در لوله
۶-۳ گرمایش هوا در جریان لوله آرام به ازای شار گرمایی ثابت
۶-۴ گرمایش هوا وقتی دیواره لوله هم‌دما است
۶-۵ انتقال گرما در لولهٔ زبر
۶-۶ جریان هوا در عرض استوانه هم‌دما
۶-۷ انتقال گرما از سیمی که با برق گرم شده‌است
۶-۸ انتقال گرما از کره
۶-۹ گرمایش هوا با ردیف لوله در یک خط
۶-۱۰ روش دیگر محاسبه
۶-۱۱ گرمایش مایع بیسموت در لوله

❑ مسائل

۶-۱ روغن موتور به دمای ۱۲۰°C وارد لوله‌ای به قطر ۵/۰ mm می‌شود. دمای دیوارهٔ لوله ۵۰°C و عدد رینولدز ورودی ۱۰۰۰ است. انتقال گرما، ضریب انتقال گرمای متوسط، دمای روغن خروجی برای لوله‌هایی به طول ۱۰ cm، ۲۰ cm و ۵۰ cm را حساب کنید.

۶-۲ آب به دمای کپه‌ای متوسط ۸۰°F داخل لوله صاف افقی به دمای ۱۸۰°F جریان دارد. طول لوله برابر ۶/۰ ft و قطر آن ۰/۱۲۵ *in* است. سرعت جریان $\frac{ft}{s}$ ۰/۱۲۵ می‌باشد. آهنگ انتقال گرما را بیابید.

۶-۳ آمونیاک مایع در کانالی به مقطع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱/۰ cm جریان دارد. دمای کپه‌ای متوسط ۲۰°C و دمای دیواره کانال ۵۰°C است. جریان آرام کاملاً توسعه یافته به ازای عدد رینولدز ۱۰۰۰ به وجود می‌آید. انتقال گرمای واحد طول کانال را حساب کنید.

۶-۴ آب در کانالی به سطح مقطع ۵×۱۰ mm به دمای کپه‌ای متوسط ۲۰°C جریان دارد. چنان‌چه دمای دیواره کانال در ۶۰°C ثابت و جریان آرام کاملاً توسعه‌یافته باشد، انتقال گرمای واحد طول را حساب کنید.

۶-۵ آب با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۳ ضمن عبور از لوله‌ای مسی به قطر داخلی ۵cm از ۵ تا ۱۵°C گرم می‌شود. دمای دیوارهٔ لوله ۹۰°C است. طول لوله چه‌قدر است؟

۶-۶ آب با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۰/۸ از ۳۵ تا ۴۰°C با عبور از لوله‌ای به قطر داخلی ۲/۵ cm گرم می‌شود. دمای سطح لوله ۹۰°C است. طول لوله چه‌قدر باشد تا این گرمایش صورت گیرد؟

۶-۷ در لوله‌ای به قطر داخلی ۲/۵ cm و طول ۱/۵ m آب با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۱/۰ جاریست. افت فشار در طول ۱/۵ m برابر ۷ kPa است. دمای دیوارهٔ لوله توسط بخار چگالشی در ۵۰°C ثابت نگه‌داشته شده، دمای ورودی آب ۲۰°C است. دمای خروجی آب را بیابید.

۶-۸ آب با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۱ در لوله‌ای به قطر داخلی ۲/۵ cm جاریست. دمای ورودی آب ۱۵°C و دمای خروجی ۵۰°C است. دمای دیواره لوله ۱۴°C بیش‌تر از دمای آب در سراسر طول لوله است. طول لوله چه‌قدر است؟

۶-۹ روغن موتور به دمای ۳۸°C وارد لوله‌ای به قطر ۱/۲۵ cm و طول ۳ *m* می‌شود. دمای دیوارهٔ لوله ۶۵°C و سرعت جریان $\frac{cm}{s}$ ۳۰ است. کل انتقال گرما به روغن و دمای خروجی آن را به‌دست آورید.

۶-۱۰ هوا با فشار ۱ atm و دمای ۱۵°C در کانال مستطیلی طویلی به ابعاد ۷/۵ در ۱۵ cm جریان دارد. دما در ۱/۸ m از کانال در ۱۲۰°C ثابت نگه‌داشته شده، دمای متوسط هوا در خروج از این مقطع ۶۵°C است. آهنگ جریان هوا و کل انتقال گرما را حساب کنید.

۶-۱۱ آب با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۰/۵ در لوله‌ای صاف به قطر داخلی ۲/۵ cm و طول ۱۵ m جریان دارد. دمای ورودی آب ۱۰°C و دمای دیواره لوله ۱۵°C بیش‌تر از دمای آب در کل طول لوله است. دمای خروجی آب چه‌قدر است؟

۶-۱۲ آب به دمای متوسط ۳۰۰ K با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۰/۷ در لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm و طول ۶ m جریان دارد. افت فشار ۲ kPa اندازه‌گیری می‌شود. شار گرمایی ثابت اعمال می‌شود و دمای متوسط دیواره ۵۵°C است. دمای خروجی آب را بیابید.

۶-۱۳ روغنی با $Pr = 1960$ و $\rho = 860 \frac{kg}{m^3}$ و $\nu = 1/6\times10^{-4}\frac{m^2}{s}$ و $k = 0/14\frac{W}{m.°C}$ وارد لوله‌ای به قطر ۲/۵ mm و طول ۶۰ cm می‌شود. دمای ورودی روغن ۲۰°C و سرعت جریان متوسط $\frac{cm}{s}$ ۳۰ و دمای دیوارهٔ لوله ۱۲۰°C است. آهنگ انتقال گرما را حساب کنید.

۶-۱۴ آمونیاک مایع در لوله‌ای صاف به قطر ۲/۵cm و طول ۲/۵ m با آهنگ $\frac{lb_m}{s}$ ۱ جریان دارد. آمونیاک در ۱۰°C وارد و در ۳۸°C خارج می‌شود و شار گرمایی ثابتی روی دیوارهٔ لوله اعمال می‌شود. دمای متوسط دیواره را که برای این انتقال گرما نیاز است، حساب کنید.

۶-۱۵ فریون ۱۲ مایع (CCl_2F_2) در داخل لوله‌ای به قطر ۱/۲۵ cm با سرعت $\frac{m}{s}$ ۳ جریان دارد. ضریب انتقال گرما برای دمای کپه‌ای ۱۰°C را بیابید. آن را با آب در همان شرایط مقایسه کنید.

۶-۱۶ آب به دمای متوسط ۱۰°C در لوله‌ای به قطر ۲/۵ cm و طول ۶m با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۰/۴ جریان می‌یابد. افت فشار اندازه‌گیری شده ۳kPa است. شار گرمایی ثابتی اعمال می‌شود و دمای متوسط دیواره ۵۰°C است. دمای خروجی آب را بیابید.

۶-۱۷ آب با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۰/۵ رابیاید از ۷۱ به ۳۲°C خنک کنند. افت فشار در کدام‌یک کم‌تر است – جاری کردن آن در لوله‌ای به قطر ۱۲/۵ mm با دمای ثابت ۴°C یا در لوله‌ای دما ثابت به قطر ۲۵ mm در دمای ۲۰°C؟

۶-۱۸ هوا با آهنگ $\frac{kg}{s}$ ۰/۵ و ۱۴۰۰ kPa وارد کانالی به قطر ۷/۵ cm و طول ۶ m می‌شود. دمای متوسط دیوارهٔ کانال ۵۰۰ K است. دمای متوسط هوا درکانال ۵۵۰ K است. کاهش دمای هواضمن عبورازکانال فوق چه‌قدر است؟

۶-۱۹ دو لولهٔ هم‌مرکز یکی در داخل دیگری به قطرهای ۴ cm و ۵cm موجودند. در فضای بین دو لوله گلیکول اتیلن با سرعت $\frac{m}{s}$ ۶/۹ در جریان است. دمای ورودی ۲۰°C و دمای خروجی ۴۰°C است. تنها سطح لولهٔ داخلی گرم بوده و دمای آن ۸۰°C است. طول دو لوله داخل هم چه‌قدر باشد تا این انتقال گرما عملی شود؟

۶-۲۰ مقطع کانال هوای سیستم تهویه مطبوعی به ابعاد ۴۵ در ۹۰ cm است. در این کانال هوا با سرعت $\frac{m}{s}$ ۷/۵ در شرایط ۱ atm و ۳۰۰ K جاریست. ضریب انتقال گرمای سیستم و افت فشار واحد طول را حساب کنید.

۶-۲۱ در لوله‌ای به قطر ۳/۰ cm و زبری نسبی ۰/۰۰۲ و دمای ثابت دیوارهٔ ۸۰°C آب جریان دارد. اگر آب در ۲۰°C وارد شود، ضریب جابه‌جایی را به ازای عدد رینولدز 10^5 ارزیابی کنید.

۶-۲۲ فریون مایع ۱۲ (CCl_2F_2) با دمای ۰°C و آهنگ جریانی وارد لوله‌ای به قطر ۳/۵ mm می‌شود و عدد رینولدز در شرایط ورودی ۷۰۰ است. طول لوله چه‌قدر باشد تا دمای سیال ۲۰°C بالا رود؟ دمای دیوارهٔ لوله ۴۰°C و ثابت است.

۶-۲۳ هوا وارد کانال کوچکی به مقطع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳/۰ mm می‌شود. دمای ورودی هوا ۲۷°C و دمای خروجی ۷۷°C است. اگر آهنگ جریان $\frac{kg}{s}$ $10^{-5}\times5$ و طول لوله ۳۰ cm باشد، دمای لازم لوله را برای اینکه انتقال گرماعملی شود، حساب کنید. افت فشار را نیز بیابید. فشار ۱ atm است.

۶-۲۴ هوا در ۹۰kPa و ۲۷°C با آهنگ جرمی $\frac{kg}{s}$ $10^{-5}\times7$ وارد لوله‌ای به قطر ۴/۰ mm می‌شود، شار گرمایی ثابتی بر سطح لوله اعمال می‌شود به طوری که دمای دیواره به ۷۰°C بالاتر از دمای کپه‌ای سیال می‌رسد. دمای هوای خروجی را برای طول لوله ۱۲ cm بیابید.

۶-۲۵ هوا در ۱۱۰ kPa و ۴۰°C با آهنگ جرمی $\frac{kg}{s}$ $10^{-5}\times8$ وارد لوله‌ای به قطر ۶/۰ mm می‌شود. دمای ثابت دیواره لوله ۱۴۰°C است. دمای هوای خروجی را برای لوله‌ای به طول ۱۴ cm حساب کنید.

۶-۲۶ روغن موتور در ۴۰°C وارد لوله‌ای به قطر ۱ cm می‌شود. آهنگ جریان طوری است که عدد رینولدز در مدخل لوله ۵۰ است. دمای روغن خروجی را برای لوله‌ای به طول ۸ cm وقتی که دمای دیوارهٔ آن ثابت و ۸۰°C است، حساب کنید.

۶-۲۷ آب با سرعت جریان متوسط $\frac{m}{s}$ ۸ در لوله‌ای به قطر ۲ cm جاریست. اگر آب در ۲۰°C وارد و در ۳۰°C خارج شود و طول لوله ۱۰ *m* باشد، دمای متوسط لوله را برای آنکه این انتقال گرما عملی شود، حساب کنید.

۶-۲۸ روغن موتور در ۲۰°C و سرعت $\frac{m}{s}$ ۱/۲ وارد لوله‌ای به قطر ۲/۰ mm می‌شود. دمای دیوارهٔ لوله ثابت و ۶۰°C و طول لوله ۱/۰ *m* است. دمای روغن خروجی را بیابید.

۶-۲۹ در داخل لولهٔ صافی آب با سرعت متوسط $\frac{ft}{s}$ ۱۰ جاریست. قطر لوله ۱/۰ *in* و در دیواره لوله شار گرمایی ثابتی اعمال می‌شود به طوری که دمای لوله همواره ۲۰°C بالاتر از دمای آب است. آب در ۳۰°C وارد لوله و در ۵۰°C خارج می‌شود. طول لوله چه‌قدر باشد تا این مقدار گرمایش عملی شود؟

۶-۳۰ آب در ۲۱°C وارد لوله‌ای به قطر ۳ mm شده، در ۳۲°C خارج می‌شود. آهنگ جریان طوری است که عدد رینولدز ۶۰۰ است. طول لوله ۱۰ cm و دمای ثابت آن ۶۰°C است. آهنگ جریان را حساب کنید.

۶-۳۱ آب در ۶۰°F وارد لوله‌ای به قطر ۳ cm شده، در ۱۰۰°F خارج می‌شود. آهنگ جریان $\frac{kg}{s}$ ۱/۰ و دمای لوله ۱۴۰°F می‌باشد. طول لوله را بیابید.

۶-۳۲ گلیسیرین در لوله‌ای به قطر ۵ mm با آهنگی جاریست که عدد رینولدز ۱۰ می‌باشد. گلیسیرین در ۱۰°C وارد و در ۳۰°C خارج می‌شود. دمای ثابت دیوارهٔ لوله ۴۰°C است. طول لوله را بیابید.

۶-۳۳ دمای استوانه‌ای به قطر ۵ cm برابر ۱۰۰°C است و در جریان ازت به فشار ۲ atm و دمای ۱۰°C قرار می‌گیرد. ازت با سرعت $\frac{m}{s}$ ۵ در عرض استوانه جاریست. گرمای تلف‌شده از متر طول لوله را بیابید.

۶-۳۴ هوا در ۱ atm و ۰°C در عرض استوانه‌ای به قطر ۴ cm و دمای سطح ۵۴°C می‌وزد. سرعت هوا $\frac{m}{s}$ ۲۵ است. گرمای تلف‌شده از استوانه را به ازای واحد طول آن حساب کنید.

۶-۳۵ هوا به فشار kPa ۲۰۰ در عرض استوانه‌ای به قطر ۲۰cm با سرعت $25\ \frac{m}{s}$ و دمای $10^{\circ}C$ می‌وزد. دمای ثابت استوانه $80^{\circ}C$ است. انتقال گرما و نیروی کشش به ازای واحد طول را بیابید.

۶-۳۶ آب به دمای $43^{\circ}C$ به لوله‌ای به قطر داخلی 5 cm و زبری نسبی ۰/۰۰۲ با آهنگ $6\ \frac{kg}{s}$ وارد می‌شود. چنان‌چه طول لوله 9 m و دمای آن $71^{\circ}C$ باشد دمای آب خروجی و کل انتقال گرما را بیابید.

۶-۳۷ قطر لولهٔ کوتاهی 6/4 mm و طول آن 15 cm می‌باشد. آب با سرعت $1/5\ \frac{m}{s}$ و دمای $38^{\circ}C$ وارد این لوله می‌شود و شرایط شارگرمایی ثابت وجود دارد به طوری که دمای دیوارهٔ لوله در $28^{\circ}C$ بالای دمای کپه‌ای آب باقی می‌ماند. آهنگ انتقال گرما و دمای آب خروجی را بیابید.

۶-۳۸ می‌خواهیم گلیکول اتیلن را از $60^{\circ}C$ به $40^{\circ}C$ در لوله‌ای به قطر 3/0 cm خنک کنیم. دمای دیوارهٔ لوله ثابت و $20^{\circ}C$ است. گلیکول با سرعت $10\ \frac{m}{s}$ وارد لوله می‌شود. طول لازم لوله را برای انجام این خنک کاری بیابید.

۶-۳۹ هوا در 70 kPa و $20^{\circ}C$ در عرض استوانه‌ای به قطر 5 cm با سرعت $20\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. نیروی کششی اعمال شده روی استوانه را حساب کنید.

۶-۴۰ استوانه گرمی به دمای 450 K و قطر 2/5 cm را در جریان هوای جو به فشار 1 atm و دمای 325 K قرار می‌دهند. سرعت هوا $30\ \frac{m}{s}$ است. اتلاف گرما به ازای متر طول استوانه را حساب کنید.

۶-۴۱ به فرض بتوان انسانی را با استوانه‌ای به قطر 1 ft و ارتفاع 6 ft و دمای سطح $75^{\circ}F$ معادل گرفت، اتلاف گرما از وی را در حالی که در جریان بادی به سرعت $30\ \frac{mi}{h}$ و دمای $30^{\circ}F$ ایستاده باشد، حساب کنید.

۶-۴۲ فرض کنید که نیمی از انتقال گرما از استوانه‌ای در جریان عرضی، روی نیمهٔ جلویی آن صورت می‌گیرد. انتقال گرما از استوانه‌ای را در جریان عرضی با انتقال گرما از صفحه‌ای تخت که طولش مساوی فاصله از نقطه رکود روی استوانه است مقایسه کنید. این مقایسه را مورد بحث قرار دهید.

۶-۴۳ سیمی به قطر 0/13 mm را در معرض جریان هوایی به دمای $-30^{\circ}C$ و فشار 54 kPa قرار داده‌ایم. سرعت جریان $230\ \frac{m}{s}$ است. سیم را که طولش 12/5 mm است به طریق الکتریکی گرم می‌کنیم، توان الکتریکی لازم برای آنکه دمای سطح سیم به $175^{\circ}C$ برسد، حساب کنید.

۶-۴۴ هوا به دمای $90^{\circ}C$ و 1 atm روی سیمی به قطر $\frac{1}{16}\ in$ با سرعت $6\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. سیم تا دمای $150^{\circ}C$ گرم می‌شود. انتقال گرمای واحد طول سیم را بیابید.

۶-۴۵ سیمی ظریف به قطر 0/025 mm و طول 15 cm را برای بررسی سرعت جریان گاز به کار می‌برند. این عمل با اندازه‌گیری گرمای الکتریکی پخش شده توسط سیم در ضمن قرار گرفتن در جریان هوا انجام می‌گیرد. مقاومت مخصوص سیم $70\mu\ \Omega\ cm$ است. دمای سیم را با اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی آن نسبت به دمای مبنای $T_\circ$ معین می‌کنند به طوری که:

$$R = R_\circ\ [1 + a(T - T_\circ)]$$

برای این سیم خاص مقدار ضریب دمای a برابر $0/0006^{\circ}C^{-1}$ است. مقاومت را می‌توان با اندازه‌گیری شدت جریان و ولتاژ اعمال شده بر سیم تعیین کرد و:

$$R = \frac{E}{I}$$

فرض کنید آزمایش فوق برای هوای $20^{\circ}C$ که با سرعت $10\ \frac{m}{s}$ جریان دارد و دمای سیم $40^{\circ}C$ انجام شود. مقدار ولتاژ و شدت جریان اندازه‌گیری شده در این شرایط با فرض آنکه $R_\circ$ در $T_\circ = 20^{\circ}C$ ارزیابی شده باشد، چه‌قدر است؟ برای همین دمای سیم و سرعت‌های جریان 15 و $20\ \frac{m}{s}$، مقدار ولتاژ و شدت جریان چه‌قدر است؟

۶-۴۶ هلیم در 1 atm و 325 K در عرض استوانه‌ای به قطر 3 mm که تا 425 K گرم شده جریان دارد. سرعت جریان $9\ \frac{m}{s}$ است. انتقال گرمای واحد طول سیم را بیابید. این انتقال گرما را با انتقال گرمای هوا در همین شرایط مقایسه کنید.

۶-۴۷ آهنگ انتقال گرمای واحد طول را برای جریان بر روی استوانه‌ای به قطر 0/025 mm به دمای $65^{\circ}C$ بیابید. محاسبه را برای (الف) هوا در $20^{\circ}C$ و 1 atm و (ب) آب در $20^{\circ}C$ انجام دهید؛ $u_\infty = 6\ \frac{m}{s}$.

۶-۴۸ نتایج انتقال گرمای حاصل از معادلات (۶-۱۷) و (۶-۱۸) را برای آب به‌ازای اعداد رینولدز 10^3، 10^4، 10^5 و دمای فیلم $90^{\circ}C$ مقایسه کنید.

۶-۴۹ خط لوله‌ای روغن گرمی به دمای $50^{\circ}C$ را در شمالگان انتقال می‌دهد. در این منطقه بادی شدید در عرض لوله‌ای به قطر 50 cm با سرعت $13\ \frac{m}{s}$ و دمای $-35^{\circ}C$ می‌وزد. اتلاف گرمای متر طول لوله را حساب کنید.

۶-۵۰ دو لوله موجود است یکی به قطر 4/0 cm و دیگری با مقطع چهارگوش به ضلع 4/0 cm. هوا در 1 atm و $27^{\circ}C$ در عرض لوله‌ها با سرعت $20\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. انتقال گرما را در هر حالت به فرض دمای دیوارهٔ لوله $50^{\circ}C$ باشد، محاسبه کنید.

۶-۵۱ استوانه‌ای به قطر 3 cm در معرض جریان عرضی دی‌اکسید کربن به دمای $200^{\circ}C$ و فشار 1 atm قرار می‌گیرد. دمای ثابت استوانه $50^{\circ}C$ و سرعت دی‌اکسید کربن $40\ \frac{m}{s}$ است. انتقال گرما به استوانه را به ازای متر طول آن بیابید.

۶-۵۲ هلیم در 150kPa و $20^{\circ}C$ با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ در عرض استوانه‌ای افقی به قطر 30 cm و طول 6 m رانده می‌شود. اتلاف گرما از استوانه را اگر دمای ثابت سطح $100^{\circ}C$ باشد، بیابید.

۶-۵۳ دمای ثابت استوانه‌ای به قطر $in\ 0/25$ برابر $300^{\circ}C$ بوده، در جریان عرضی CO_2 به $P = 100\ kPa$ و $T = 30^{\circ}C$ قرار دارد. اتلاف گرمای 4/5 m از استوانه را اگر سرعت CO_2 برابر $35\ \frac{m}{s}$ باشد، بیابید.

۶-۵۴ استوانه‌ای به قطر 20 cm در یک جریان عرضی CO_2 به فشار 1 atm و 300 K قرار دارد. دمای ثابت استوانه 400 K و سرعت CO_2 برابر $50\ \frac{m}{s}$ است. اتلاف گرمای متر طول استوانه را حساب کنید.

۶-۵۵ هوا در عرض مکعب مستطیلی به مقطع مربع به ضلع 4 cm با سرعت $10\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای سطحی $85^{\circ}C$ است. شرایط هوای جریان آزاد $20^{\circ}C$ و 1 atm و 0/6 است. اتلاف گرمای متر طول این مکعب مستطیل را حساب کنید.

۶-۵۶ روی کره‌ای به قطر 3 mm آب با سرعت $6\ \frac{m}{s}$ جاریست. دمای جریان آزاد $38^{\circ}C$ و دمای کره $93^{\circ}C$ می‌باشد. آهنگ انتقال گرما را بیابید.

۶-۵۷ قطره آبی به شکل کره و به قطر 1/3 mm از حالت سکون در هوای جو به فشار 1 atm و دمای $20^{\circ}C$ رها می‌شود. سرعت قطره را پس از 30، 60 و 300 متر حساب کنید.

۶-۵۸ دمای سطح مخزنی کروی به قطر 4/0 m برابر $40^{\circ}C$ است. هوا در 1 atm و $20^{\circ}C$ روی مخزن مزبور با سرعت $6\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. اتلاف گرما را حساب کنید.

۶-۵۹ قطرکره گرمی 3 cm و دمای ثابت آن $90^{\circ}C$ است و در جریان آب $20^{\circ}C$ قرار دارد. سرعت جریان آب $3/5\ \frac{m}{s}$ است. اتلاف گرما از کره را بیابید.

۶-۶۰ یک گرم‌کن برقی داخل کره کوچکی به قطر 6 mm قرار دارد که دمای سطح بیرونی آن‌را در $220^{\circ}C$ نگه‌می‌دارد. کره در معرض جریان هوایی به فشار 1 atm و $20^{\circ}C$ و سرعت $20\ \frac{m}{s}$ است. آهنگ گرمایی را حساب کنید که باید به کره مزبور داد.

۶-۶۱ هوا به فشار 3 atm روی صفحه‌ای تخت با سرعت $100\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای صفحه $200^{\circ}C$ و دمای جریان آزاد $30^{\circ}C$ است. اتلاف گرمای صفحه‌ای مربعی به ضلع 1 m را بیابید.

۶-۶۲ هوا در 3/5MPa و $38^{\circ}C$ در عرض ردیفی لوله با 400 لوله به قطر خارجی 1/25 cm و در غیر یک خط و به ارتفاع 20 ردیف جریان دارد؛ $S_p = 3/75$ cm و $S_n = 2/5$ cm است. سرعت جریان ورودی $9\ \frac{m}{s}$ و دمای دیوارهٔ لوله در $20^{\circ}C$ با بخار چگالنده در داخل لوله‌ها، ثابت نگه‌داشته می‌شود. طول لوله‌ها 1/5 m است. دمای هوا را هنگام بیرون آمدن از رشته لوله‌ها بیابید.

۶-۶۳ رشته لوله‌ای در یک خط آرایش یافته و در آن $S_n = S_p = 1/9$ cm و قطر لوله‌ها 6/33 mm است. عمق رشته 6 لوله و ارتفاع آن 50 لوله است. دمای سطح لوله‌ها در $90^{\circ}C$ ثابت است و قبل از آنکه جریان وارد رشته لوله شود، هوای جو به دمای $20^{\circ}C$ با سرعت ورودی $4/5\ \frac{m}{s}$، در عرض لوله‌ها جریان دارد. کل انتقال گرمای واحد طول رشته را بیابید. افت فشار برای این آرایش را به‌دست آورید.

۶-۶۴ مسألهٔ ۶-۶۳ را برای آرایش در غیر یک خط با همان مقادیر S_p و S_n تکرار کنید.

۶-۶۵ بخار چگالنده به دمای $150^{\circ}C$ را در داخل رشته لوله‌ای برای گرم‌کردن جریان متقاطع CO_2 که در 3 atm و $35^{\circ}C$ و $5\ \frac{m}{s}$ وارد می‌شود، به کار می‌برند. رشته لولهٔ مزبور شامل 100 لوله به قطر خارجی 1/25 cm در مربعی با آرایش در یک خط و با $S_n = S_p = 18/75$ mm می‌باشد. طول لوله‌ها 60 cm است. به فرض دمای دیوارهٔ خارجی لوله در $150^{\circ}C$ ثابت باشد. کل انتقال گرما به CO_2 و دمای خروجی آن را حساب کنید.

۶-۶۶ رشته لوله‌ای در یک خط ازلوله‌هایی به قطر 2/5 cm با 15 ردیف ارتفاع و 7 ردیف عمق ساخته شده است. دمای لوله‌ها $90^{\circ}C$ است و هوای جو در عرض آنها با $20^{\circ}C$ و $u_\infty = 12\ \frac{m}{s}$ می‌وزد. در این آزمایش $S_p = 3/75$ و $S_n = 5/0$ cm است. انتقال گرما از این رشته لوله را به‌ازای متر طول حساب کنید. افت فشار را نیز بیابید.

۶-۶۷ هوا به دمای 300 K و فشار 1 atm وارد رشته لوله‌ای در یک خط می‌شود که 5 ردیف و هر ردیف شامل 10 لوله است. قطر لوله 2/5 cm و $S_n = S_p = 5/0$ cm است. سرعت ورود $10\ \frac{m}{s}$ و دمای ثابت دیوارهٔ لوله 350 K است. دمای هوای خروجی را بیابید.

۶-۶۸ هوای جو به دمای $20^{\circ}C$ در عرض میله‌ای چهارگوش به ضلع مقطع 5 cm با سرعت $15\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. سرعت عمود بر یکی از وجوه میله است. انتقال گرمای واحد طول را برای وقتی که دمای سطح $90^{\circ}C$ است بیابید.

۶-۶۹ در نوعی گرم‌کن برقی خانگی برای پخش گرما از نوارهای فلزی نازک استفاده می‌شود. عرض نوارها 6 mm است و عمود بر جریان هوایی قرار گرفته‌اند که توسط فن کوچکی تولید می‌شود. سرعت هوا $2\ \frac{m}{s}$ است و از هفت نوار 35 cm استفاده شده است. چنان‌چه نوارها تا $870^{\circ}C$ گرم شوند کل انتقال گرمای جابه‌جایی به هوای اتاق در $20^{\circ}C$ را حساب کنید. (توجه کنید که در چنین گرم‌کنی قسمت اعظم انتقال **کل** به طریق تابش گرمایی انجام می‌شود.)

۶-۷۰ کانالی مربعی به ابعاد 30 cm × 30 cm دارای دمای ثابت $30^{\circ}C$ است و جریان هوای $50^{\circ}C$ و 1 atm در عرض آن با سرعت $6\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. گرمای کسب شده در این کانال را بیابید. اگر سرعت جریان به نصف مقدار خودش برسد جریان گرمایی چه‌قدر کم می‌شود؟

۶-۷۱ با استفاده از مدل جریان اسلاگ، نشان دهید که معادلهٔ انرژی لایه مرزی به همان شکل معادلهٔ هدایت گذرای جسم نیمه بی‌نهایت بخش ۴-۳ تبدیل می‌شود. این معادله را حل و جواب را با نتیجه حاصل از تحلیل انتگرالی بخش ۶-۵ مقایسه کنید.

۶-۷۲ بیسموت مایع در دمای $400^{\circ}C$ با آهنگ $1\ \frac{kg}{s}$ وارد لوله‌ای از جنس فولاد ضدزنگ به قطر 2/5 cm می‌شود. دمای دیوارهٔ لوله ثابت و در $450^{\circ}C$ نگه‌داشته می‌شود. دمای خروجی بیسموت را برای وقتی حساب کنید که طول لوله 60 cm باشد.

۶-۷۳ سدیم مایع را باید از $120^{\circ}C$ تا $149^{\circ}C$ با آهنگ $2/3\ \frac{kg}{s}$ گرم کنیم. لوله‌ای به قطر 2/5 cm که به طریق الکتریکی گرم می‌شود موجود است (شارگرمایی ثابت). چنان‌چه دمای دیوارهٔ لوله از $200^{\circ}C$ تجاوز نکند، کمینهٔ طول لولهٔ لازم را حساب کنید.

۶-۷۴ عبارتی برای عدد نوسلت متوسط فلزات مایعی که روی صفحه‌ای تخت جریان می‌یابند، بیابید. از معادلهٔ (۶-۴۲) به عنوان نقطه شروع استفاده کنید.

۶-۷۵ آب با آهنگ $0/8\ \frac{kg}{s}$ در دمای $93^{\circ}C$ در لوله‌ای مسی به قطر داخلی 5 Cm با سرعتی مناسب جریان دارد. ضخامت دیواره 0/8 mm است. هوا به دمای $15^{\circ}C$ و فشار جو بر قسمت بیرونی لوله با سرعت $15\ \frac{m}{s}$ در جهتی عمود بر محور لوله وزانده می‌شود. اتلاف گرمای واحد طول لوله چه‌قدر است؟

۶-۷۶ هوا در 1 atm و 350 K با آهنگ جرمی $35\ \frac{g}{s}$ وارد لوله‌ای به قطر 1/25 cm می‌شود. دمای سطحی لوله 300 K و طول آن 12 m است. گرمای تلف‌شده توسط هوا و دمای هوای خروجی را بیابید.

۶-۷۷ هوا در عرض لولهٔ صافی به قطر ۵/۰ cm با شرایط جریان آزاد ۲۰°C و ۱ atm و $u_\infty = 25\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. اگر دمای سطحی لوله ۷۷°C باشد، اتلاف گرمای واحد طول را حساب کنید.

۶-۷۸ روغن موتور در ۲۰°C وارد لوله‌ای به طول ۸ m می‌شود. قطر لوله $1/0\ in$ و آهنگ جریان $0/4\ \frac{kg}{s}$ است. دمای خروجی روغن را به شرطی حساب کنید که دمای سطحی لوله ۸۰°C باشد.

۶-۷۹ هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K با آهنگ $0/2\ \frac{kg}{s}$ وارد کانال مستطیلی به ابعاد ۲۰ cm × ۱۰ به طول ۲۵۰ cm می‌شود. اگر دمای سطحی کانال در ۴۰۰ K ثابت نگه‌داشته شود، انتقال گرما به هوا و دمای هوای خروجی را بیابید.

۶-۸۰ هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K داخل لوله صافی به قطر ۱/۵ mm طوری جاری است که عدد رینولدز ۱۲۰۰ است. ضرایب انتقال گرما را برای طول‌های ۱، ۱۰، ۲۰، ۱۰۰ cm حساب کنید.

۶-۸۱ آب در دمای کپه‌ای متوسط ۱۰°C داخل کانالی با مقطع مثلث متساوی الساقین به ضلع ۲/۵ cm جاری است. آهنگ جریان طوری است که عدد رینولدز ۵۰۰۰۰ حاصل می‌شود. اگر دمای دیواره لوله در ۱۵°C بالاتر از دمای کپه‌ای آب نگه‌داشته شود، طول مورد نیاز لوله را برای آنکه افزایش ۱۰°C در دمای کپه‌ای ایجاد شود محاسبه کنید. در این شرایط کل انتقال گرما چه‌قدر است؟

۶-۸۲ هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K عمود بر منشوری جاری است به طوری که عدد رینولدز 10^4 است. انتقال گرما در این سیستم را با آنی که مربوط به استوانه‌ای به قطر برابر با ضلع مقطع منشور است مقایسه کنید. محاسبه را برای وضعیت اول، سوم و چهارم جدول ۶-۳ تکرار کنید.

۶-۸۳ هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K در عرض کره‌ای طوری جاری است که عدد رینولدز ۵۰۰۰۰ است. معادلات (۶-۲۵) و (۶-۲۶) را برای این شرایط مقایسه کنید با معادلهٔ (۶-۳۰) نیز مقایسه کنید.

۶-۸۴ آب در ۱۰°C در عرض کره‌ای به قطر ۲/۵ cm با سرعت جریان آزاد $4\ \frac{m}{s}$ جاری است. اگر دمای سطحی کره ۶۰°C باشد، اتلاف گرما را حساب کنید.

۶-۸۵ رشته لوله‌ای شامل آرایه‌ای مربعی با ۱۴۴ لوله است که در یک خط آرایش یافته‌اند. قطر لوله‌ها ۱/۵ cm و طول آنها ۱/۰ m و فاصله مرکز به مرکز لوله‌ها ۲/۰ cm است. اگر دمای سطحی لوله‌ها در ۳۵۰ K نگه داشته شود و هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K و $u_\infty = 6\ \frac{m}{s}$ وارد رشته لوله شود، اتلاف گرمای کل از لوله‌ها را حساب کنید.

۶-۸۶ علت خطای فاحشی که در محاسبات جابه‌جایی مرتکب می‌شوند، عدم موفقیت در انتخاب هندسه درست برای مسأله است و این اشتباه نسبتاً ساده‌ای است. سه وضعیت هندسی زیر را برای جریان هوا در ۱ atm، ۳۰۰ K و عدد رینولدز ۵۰۰۰۰ را در نظر بگیرید: (الف) جریان در عرض استوانه‌ای به قطر ۱۰ cm، (ب) جریان داخل لوله‌ای به قطر ۱۰ cm، (پ) جریان در طول صفحهٔ تختی به طول ۱۰ cm. ضریب انتقال گرمای متوسط را برای هر وضعیت محاسبه کنید و در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

۶-۸۷ توجه داریم که انتقال گرمای جابه‌جایی به خواص سیال بستگی دارد که خود به دما وابسته‌اند. جریان هوای جو با آهنگ $0/012\ \frac{kg}{s}$ را در لوله صافی به قطر ۲/۵ cm در نظر بگیرید. فرض کنید از رابطهٔ دیتوس‌بولتر [معادله (۶-۴ الف)] استفاده شود. ضریب انتقال گرمای متوسط را برای خواص ارزیابی شده در ۳۰۰ K، ۴۰۰ K، ۵۰۰ K و ۸۰۰ K حساب کنید. در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

۶-۸۸ مسأله ۶-۸۷ را برای همان جریان جرمی از هلیم به فشار جو با خواص ارزیابی شده در ۲۵۵ K، ۴۷۷ K و ۷۰۰ K تکرار و در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

۶-۸۹ هوا در ۳۰۰ K در لوله‌ای به قطر ۵ mm با آهنگی جاری است که عدد رینولدز آن ۵۰۰۰۰ است. طول لوله ۵۰ mm است. ضریب انتقال گرمای متوسط را برای شار گرمای ثابت در دیوار بیابید.

۶-۹۰ آب در ۱۵/۶°C در لوله‌ای به قطر ۵ mm و طول ۵۰ mm جاری است. آهنگ جریان طوری است که عدد پکلت ۱۰۰۰ است. اگر دمای دیواره لوله در ۴۹°C ثابت باشد، آب چه افزایش دمایی دارد؟

۶-۹۱ هوا در کانالی مستطیلی به ابعاد ۶۰ cm × ۳۰ cm جاری است. سرعت متوسط جریان $7/5\ \frac{m}{s}$ در دمای کپه‌ای متوسط ۳۰۰ K است. اگر دمای دیواره کانال در ۳۲۵ K ثابت باشد، افزایش دمای هوا در طول ۳۰ m کانال را ارزیابی کنید.

۶-۹۲ گلیسیرین در ۱۰°C در کانالی مستطیلی به ابعاد ۸ cm × ۱ cm و طول ۱ m جاری است. آهنگ جریان طوری است که عدد رینولدز ۲۵۰ است. ضریب اتلاف گرمای متوسط را برای حالت دیوار هم‌دما ارزیابی کنید.

۶-۹۳ هوا در ۳۰۰ K عمود بر نوار گرمی به عرض ۶ mm و دمای ۶۰۰ K می‌وزد. سرعت هوا طوری است که عدد رینولدز ۱۵۰۰۰ است. اتلاف گرمای ۵۰ cm طول نوار را بیابید.

۶-۹۴ مسأله ۶-۹۳ را برای جریان عمود بر میله‌ای مربعی به ضلع ۶ mm تکرار کنید.

۶-۹۵ مسألهٔ ۶-۹۳ را برای جریان موازی با نوار ۶ mm تکرار کنید. (انتقال گرما در دو طرف نوار را حساب کنید.)

۶-۹۶ هوا در ۱ atm عمود بر رشته‌ای مربعی و در یک خط شامل ۴۰۰ لوله به قطر ۶ mm و طول ۵۰ cm و $S_n = S_d = 9$ mm جاری است. هوا در ۳۰۰ K با سرعتی وارد رشته لوله می‌شود که رینولدز بر پایه خواص ورودی و بیشینه سرعت در ورودی ۵۰۰۰۰ است. اگر دمای بیرونی دیواره لوله‌ها ۴۰۰ K باشد، افزایش دمای هوا را وقتی در رشته لوله‌ها جاری می‌شود، حساب کنید.

۶-۹۷ مسأله ۶-۹۶ را برای رشته لوله‌ها با آرایش در غیر یک خط و همان ابعاد و همان سرعت ورودی جریان آزاد به رشته لوله‌ها تکرار کنید.

۶-۹۸ اعداد نوسلت محاسبه شده برای گرمایش هوا در لولهٔ صاف در ۳۰۰ K و اعداد رینولدز ۵۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ از معادلهٔ (۶-۴ الف)، (۶-۴ب) و (۶-۴پ) را با هم مقایسه کنید. از این اعداد چه نتیجه می‌گیرید؟

۶-۹۹ مسأله ۶-۹۸ را برای گرمایش آب در ۲۱°C تکرار کنید.

۶-۱۰۰ اعداد حاصل از معادلات (۶-۱۷) و (۶-۲۱) و (۶-۲۲) و (۶-۲۳) برای هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K جاری در عرض استوانه‌ای به دمای ۴۰۰ K با اعداد رینولدز ۵۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ را با هم مقایسه کنید. از این اعداد چه نتیجه می‌گیرید؟

۶-۱۰۱ مسأله ۶-۱۰۰ را برای جریان آب در ۲۱°C در عرض استوانه‌ای به دمای ۳۲/۲°C تکرار کنید. از این اعداد چه نتیجه می‌گیرید؟

مسائل طراحی

۶-۱۰۲ با استفاده از مقادیر عدد نوسلت موضعی شکل ۶-۱۱، مقادیر عدد نوسلت متوسط را به صورت تابعی از عدد رینولدز بیابید. نتایج را به صورت $\log Nu$ نسبت به $\log Re$ رسم و معادله‌ای را که نمایش‌گر تمام داده‌ها است به‌دست آورید. این رابطه را با معادلهٔ (۶-۱۷) و جدول ۶-۲ مقایسه کنید.

۶-۱۰۳ یک مبدل گرمایی طوری ساخته شده است که گازهای حاصل از سوخت در ۷۰۰ K داخل لوله‌ای مسی به قطر داخلی ۲/۵ cm و ضخامت دیواره ۱/۶ mm جاری است. لوله‌ای به قطر ۵/۰ cm دور لوله به قطر ۲/۵ cm قرار داده می‌شود و آب پرفشار در ۱۵۰°C در فضای حلقوی بین لوله‌ها جاری می‌شود. اگر آهنگ جریان آب $1/5\ \frac{kg}{s}$ و کل انتقال گرما ۱۷/۵ kW باشد، طول مبدل گرمایی برای جریان جرمی گاز $0/8\ \frac{kg}{s}$ را ارزیابی کنید. فرض کنید خواص گاز حاصل از سوخت مثل خواص هوا در فشار جو و دمای ۷۰۰ K است.

۶-۱۰۴ معادلات (۶-۱۹)، (۶-۲۰) و (۶-۲۱) را با معادله (۶-۱۷) برای گاز با $Pr = 0/7$ در اعداد رینولدز زیر مقایسه کنید: (الف) ۵۰۰؛ (ب) ۱۰۰۰؛ (پ) ۲۰۰۰؛ (ت) ۱۰۰۰۰؛ (ث) ۱۰۰۰۰۰.

۶-۱۰۵ نوع فشرده‌تر رشته لوله مسأله ۶-۶۳ را می‌توان با کاهش ابعاد S_p و S_n ضمن حفظ همان تعداد لوله ایجاد کرد. اثر نصف‌کردن S_p و S_n یعنی $S_p = S_n = 0/95$ cm را بررسی کنید. انتقال گرما و افت فشار این آرایش جدید را بیابید.

۶-۱۰۶ ضریب کشش برای کره‌ای در اعداد رینولدز کم‌تر از ۱۰۰ را می‌توان تقریباً به صورت $C_D = b\mathrm{Re}^{-1}$ نوشت، که b یک ثابت است. به فرض آنکه بین انتقال گرما و ضریب اصطکاک، تشابه کولبورن وجود داشته باشد، رابطه‌ای برای اتلاف گرما از کره‌ای به قطر d و دمای T_s به‌دست آورید که از حالت سکون رها شده، در سیالی به دمای T_∞ می‌افتد. (رابطه‌ای برای اتلاف گرما بین زمانی که کره رها می‌شود و زمانی که سرعت آن به v می‌رسد به‌دست آورید. فرض کنید که عدد رینولدز در این مدت کم‌تر از ۱۰۰ است و کره در دمای ثابت باقی می‌ماند.)

۶-۱۰۷ کاربرد رابطهٔ دیتوس - بولتر [معادله (۶-۴ الف)] را برای جریان هوای ناآرام در لوله‌ای صاف در شرایط جریان ناآرام توسعه‌یافته در نظر بگیرید. برای آهنگ جریان جرم ثابت و قطر لوله (انتخاب آن به اختیار شما) اثر دمای کپه‌ای بر ضریب انتقال گرما را با محاسبه مقادیر h برای دماهای کپه‌ای متوسط ۲۰، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ درجه سلسیوس بررسی کنید. از این محاسبه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ با توجه به این نتایج، وابستگی ضریب انتقال گرمای هوا را به دمای مطلق ارزیابی کنید.

۶-۱۰۸ اجاق برقی ***جابه‌جایی*** اجاقی است که در آن یک فن، هوا را علاوه بر تابش گرما از قطعات گرم‌کن برقی، در عرض غذا می‌وزاند. دو درجه تنظیم ۱۷۵°C و ۲۳۰°C را در نظر بگیرید. برای سرعت‌های جریان هوا تخمین‌هایی در نظر بگیرید و عملکرد گرمایش اجاق را با جابجائی و بدون آن در این دو دما ارزیابی کنید. انتخاب غذا با شماست. ادعا می‌شود که اجاق جابه‌جایی غذا را در نصف مدت مدل تمام تابشی می‌پزد. نظرتان در مورد این ادعا چیست؟ به سازنده این اجاق برای ادعایی عاقلانه چه توصیه‌ای دارید؟ برای نمونه، پختن ۲۵ پوند بوقلمون را به عنوان اظهار تشکر در نظر بگیرید. به هر منبعی (کتاب‌های آشپزی) که فکر می‌کنید مناسب است برای بررسی محاسبات خود مراجعه کنید. به یک سرپرست نمونه خانه که نگران این موارد است چه توصیه‌های قابل قبولی می‌کنید؟

۶-۱۰۹ بشقاب شیشه‌ای صافی را با لایه هادی الکتریکی خاصی پوشش داده‌اند که می‌توان از آن برای ایجاد شارگرمایی ثابت روی بشقاب استفاده کرد. سرعت جریان هوایی را تخمین بزنید که باید برای گرفتن ۸۵۰ W از بشقابی مربعی به ضلع ۰/۵ m کار برد، در حالی که دمای متوسط آن ۶۵°C است و گرما را به هوای ۱ atm و ۲۰°C می‌دهد. فرض کنید که این بشقاب مثل سطحی سیاه به اطراف دمای ۲۰°C تابش نیز می‌کند. برای انتشار ۸۵۰ W تحت این شرایط چه سرعت جریانی لازم است؟

❑ مراجع

1 Dittus, F. W., and L. M. K. Boelter: *Univ. Calif. (Berkeley) Pub. Eng.*, vol. 2, P. 443, 1930.

2 Sieder, E. N., and C. E. Tate: Heat Transfer and Pressure Drop of Liquids in Tubes, *Ind. Eng. Chem.*, vol. 28, p. 1429, 1936.

3 Nusselt, W.: Der Wärmeaustausch zwischen Wand und Wasser im Rohr, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol. 2, P. 309, 1931.

4 Hausen, H.: Darstellung des Wärmeuberganges in Rohren durch verallgemeinerte Potenzbeziehungen, *VDI Z.*, no. 4, p. 91, 1943.

5 Moody, F. F.: Friction Factors for Pipe Flow, *Trans. ASME*, vol. 66, p. 671, 1944.

6 Schlichting, H.: "Boundary Layer Theory," 7th ed., MeGraw-Hill Book Company, New York, 1979.

7 Giedt, W. H.: Investigation of Variation of Point Unit-Heat-Transfer Coefficient around a Cylinder Normal to an Air Stream, *Trans. ASME*, vol. 71, pp. 375-381, 1949.

8 Hilpert, R.; Wärmeabgabe von geheizen Drahten und Rohren, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol. 4, p. 220, 1933.

9 Knudsen, J. D., and D. L. Katz: "Fluid Dynamics and Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

10 McAdams, W. H.: "Heat Transmission," 3ded., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

11 Kramers, H.: Heat Transfer from Spheres to Flowing Media, *Physica*, vol. 12, p. 61, 1946.

12 Grimson, E. D.: Correlation and Utilization of New Data on Flow Resistance and Heat Transfer for Cross Flow of Gases over Tube Banks, *Trans. ASME*, vol. 59, pp. 583-594,1937.

13 Lyon, R. D. (ed.): "Liquid Metals Handbook," 3d ed., Atomic Energy Commission and U.S. Navy Department, Washington, D.C., 1952.

14 Lubarsky, B., and S. J. Kaufman: Review of Experimental Investigations of Liquid-Metal Heat Transfer, *NACA Tech. Note* 3336, 1955.

15 Colburn, A. P.: A Method of Correlating Forced Convestion Heat Transfer Data and a Comparison With Fluid Friction, *Trans. AIChE*, vol. 29, p. 174, 1933.

16 Seban, R. A., and T. T. Shimazaki; Heat Transfer to a Fluid Flowing Turbulently in a Smooth Pipe With Walls at Constant Temperature, *Trans. ASME*, vol. 73, p. 803, 1951.

17 Kays, W. M., and R. K. Lo: Basic Heat Transfer and Flow Friction Data for Gas Flow Normal to Banks of Staggered Tubes: Use of a Transient Technique, *Stanford Univ. Tech. Rep.* 15, Navy Contract N6-ONR251 T.O. 6, 1952.

18 Jakob, M.: Heat Transfer and Flow Resistance in Cross Flow of Gases over Tube Banks, *Trans. ASME*, vol. 60, p. 384, 1938.

19 Vliet, G. C., and G. Leppert: Forced Convection Heat Transfer from an Isothermal Sphere to Water, *J. Heat Transfer*, Serv. C, vol. 83, p. 163, 1961.

20 Irvine, T. R.: Noncircular Duct Convective Heat Transfer, in W. Ibele (ed.), "Modern Developments in Heat Transfer," Academic Press, Inc., New York, 1963.

21 Fand, R. M.: Heat Transfer by Forced Convection from a Cylinder to Water in Crossflow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 8, p, 995, 1965.

22 Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

23 Stein, R.: Liquid Metal Heat Transfer, *Adv. Heat Transfer*, vol. 3, 1966.

24 Hartnett, J. p.: Experimental Determination of the Thermal Entrance Length for the Flow of Water and of Oil in Circular Pipes, *Trans. ASME*, vol. 77, p. 1211, 1955.

25 Allen, R. W., and E. R. G. Eckert: Frietion and Heat Transfer Measurements to Turbulent Pipe Flow of Water (Pr = 7 and 8) at Uniform Wall Heat Flux, *J. Heat Transfer*, ser. C, vol. 86, p. 301, 1964.

26 Skupinshi, E., J. Tortel, and L. Vautrey: Détermination des coéfficients de conveetion a'un alliage sodium-potassium dans un tube circulaire, *Int. J. Heat mass Transfer*, vol. 8, p. 937, 1965.

27 Dipprey, D. F., and R. H. Sabersky: Heat and Momentum Transfer in Smooth and Rough Tubes at Various Prandtl Numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 6, p. 329, 1963.

28 Kline, S. J.: "Similitude and Approximation Theory, "McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

29 Townes, H. W., and R. H. Sabersky: Experiments on the Flow over a Rough Surface, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 9, p. 729, 1966.

30 Gowen, R. A., and J. W. Smith: Turbulent Heat Transfer from Smooth and Rough Surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 11, p. 1657, 1968.

31 Sheriff, N., and P. Gumley: Heat Transfer and Friction Properties of Surfaces With Discrete Roughness, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 9, p. 1297, 1966.

32 Witte, L. C.: An Experimental Study of Forced-Convection Heat Transfer From a Sphere to Liquid Sodium, *J. Heat Transfer*, vol. 90, p. 9, 1968.

33 Zukauskas, A. A., V. Makarevicius, and A. Schlanciauskas: "Heat Transfer in Banks of Tubes in Crossflow of Fluid, "Mintis, Vilnius, Lithuania, 1968.

34 Eckert, E. R. G.,and R. M. Drake: "Analysis of Heat and Mass Transfer, "McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

35 Whitaker, S.: "Forced Convection Heat-Transfer Correlations for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and Flow in Packed Bids and Tube Bundles," *AIChE J.*, vol. 18, p. 361, 1972.

36 Kays, W. M.: "Convective Heat and Mass Transfer," PP. 187-190, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

37 Churchill, S. W., and M. Bernstein: A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow, *J. Heat Transfer*, vol. 99, pp. 300-306, 1977.

38 Nakai, S., and T. Okazaki: Heat Transfer from a Horizontal Circuler Wire at Small Reynolds and Grashof Numbers-1 Pure Convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 18, p. 387, 1975.

39 Zukauskas, A.: Heat Transfer from Tubes in Cross Flow, *Adv. Heat Transfer*, vol. 8, pp. 93-160, 1972.

40 Shah, R. K., and A. L. London: "Laminar Flow: Forced Convection in Ducts, "Academic Press, New York, 1978.

41 Kalish, S., and O. E. Dwyer: Heat Transfer to Nak Flowing through Unbaffled Rod Bundles, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 10, p. 1533, 1967.

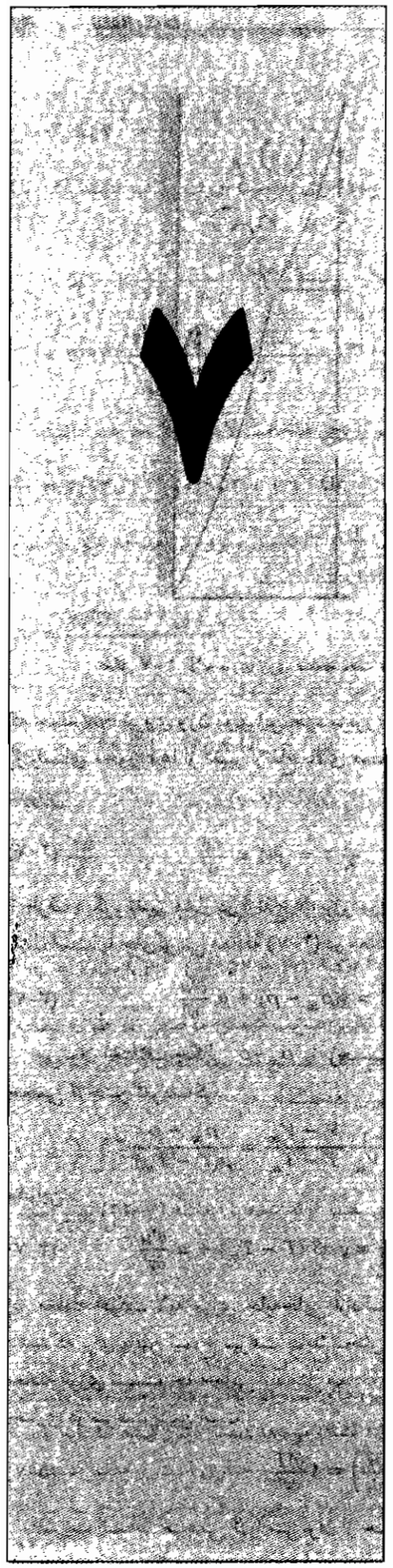
42 Petukhov, B. S.: Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow With Variable Physical Properties, in J. P. Hartnett and T. F. Irvine, (eds.), "Advances in Heat Transfer," Academic Press, Inc., New York, pp. 504-564, 1970.

43 Achenbach, E.: Heat Transfer from Spheres up to $Re = 6 \times 10^6$, *Proc. Sixth Int. Heat Trans. Conf.*, vol. 5, Hemisphere Pub. Co., Washington, D.C., pp. 341-346, 1978.

44 Morgan, V. T.: The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders, in T. F. Irvine and J. P. Hartnett, (eds.), "Advances in Heat Transfer," vol. 11, Academic Press, Inc., 1975.

45 Gnielinski, V.: "New Equations for Heat and Mass Transfer in Turbulent Pipe and Channel Flow," *Int. Chem. Engng.*, vol. 16, pp. 359-368, 1976.

46 Kakac, S., R. K. Shah, and W. Aung: "Handbook of Single-Phase Convection Heat Transfer," John Wiley, New York, 1987.



۷ سیستم‌های جابه‌جایی طبیعی

❑ ۷-۱ مقدمه

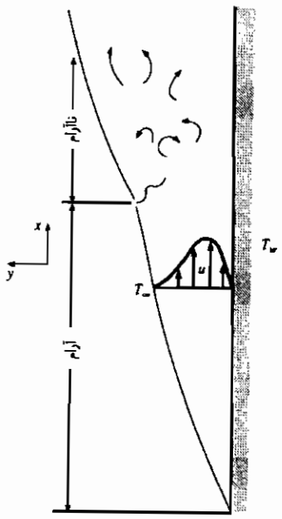
در بحث‌های قبلی انتقال گرمای جابه‌جایی، فقط آن سیستم‌های جابه‌جایی اجباری را محاسبه کردیم که در آنها سیال در مجاورت و یا داخل سطح انتقال گرما به‌زور به جریان درمی‌آید. جابه‌جایی طبیعی یا آزاد در نتیجه حرکت سیال به‌علت تغییرات چگالی ناشی از فرآیند گرمایش مشاهده می‌شود. رادیاتوری که برای گرم‌کردن اتاق به کار می‌رود نمونه وسیله‌ای عملی برای انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد است. حرکت سیال، چه گاز چه مایع، در جابه‌جایی آزاد به خاطر اعمال نیروهای شناوری روی سیال به دلیل کاهش چگالی آن در مجاورت سطح انتقال گرما در فرآیند گرمایش است. وقتی میدان نیروی خارجی، مثل ثقل، اثری روی سیال نداشته باشد نیروهای شناوری وجود نخواهد داشت. اما ثقل تنها میدان نیروی ایجاد کننده جریان‌های آزاد نیست؛ وقتی سیالی در ماشین دوار محبوس باشد میدان نیروی گریز از مرکز بر آن وارد می‌شود و چنان‌چه یک یا چند سطح در تماس با سیال گرم شوند، جریان‌های جابه‌جایی آزاد را تجربه خواهدکرد. نیروهای شناور ایجاد کنندهٔ جریان‌های جابه‌جایی آزاد به ***نیروهای جسمی*** موسومند.

❑ ۷-۲ انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد روی صفحهٔ تخت عمودی

صفحه تخت عمودی شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. وقتی صفحه را گرم کنیم مطابق شکل، یک لایه مرزی جابه‌جایی آزاد تشکیل می‌شود. نیم‌رخ سرعت در این لایه مرزی کاملاً با نیم‌رخ سرعت در لایه مرزی جابه‌جایی اجباری متفاوت است. سرعت در دیواره به علت حالت غیر لغزشی صفر است؛ سرعت نخست به مقدار بیشینه افزایش یافته، سپس در لبهٔ لایه مرزی به‌دلیل سکون وضعیت "جریان آزاد" در سیستم جابه‌جایی آزاد به صفر می‌رسد. توسعهٔ اولیه لایه مرزی آرام است اما در فاصله‌ای از لبه بالاروند، بسته به خواص سیال و اختلاف دمای دیواره و محیط، گرداب‌های ناآرام تشکیل می‌شود و گذار به لایه مرزی ناآرام شروع می‌شود. ممکن است در قسمت بالاتر این صفحه، لایه مرزی کاملاً ناآرام شود.

برای تحلیل مسأله انتقال گرما نخست باید معادله دیفرانسیلی حرکت این لایه مرزی را به‌دست آورد. بدین منظور محور x را در طول صفحه و محور y را عمود بر آن مطابق تحلیل‌های فصل ۵ انتخاب می‌کنیم. تنها نیروی جدید مورد بررسی در به‌دست آوردن این معادله، وزن جزء سیال است. مثل قبل مجموع نیروهای خارجی در راستای محور x را مساوی تغییر شار اندازه حرکت در حجم کنترلی $dx\,dy$ قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۱-۷)$$



شکل ۷-۱ لایه مرزی روی صفحه تخت عمودی.

که جمله $-\rho g$ نیروی وزن روی این جزء مزبور است. گرادیان فشار در راستای محور xها از تغییر ارتفاع بالای صفحه ناشی می‌شود. بنابراین:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g \qquad (۲-۷)$$

از طرف دیگر، تغییر فشار در ارتفاع dx برابر وزن واحدسطح جزء سیال است. با جای‌گزینی معادلهٔ (۷-۲) در معادلهٔ (۷-۱) داریم:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = g(\rho_\infty - \rho) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۳-۷)$$

می‌توان اختلاف چگالی $\rho_\infty - \rho$ را برحسب ضریب انبساط حجمی β چنین تعریف کرد:

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V_\infty}\frac{V - V_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

بنابراین:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = g\rho\beta\,(T - T_\infty) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۴-۷)$$

این معادله حرکت لایه مرزی جابه‌جایی آزاد است. توجه داشته باشید که برای یافتن نیم‌رخ سرعت باید پخش دما را بشناسیم. معادلهٔ انرژی سیستم جابه‌جایی آزاد مثل معادلهٔ سیستم جابه‌جایی اجباری در سرعت پایین است:

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (۵-۷)$$

ضریب انبساط حجمی β را می‌توان از جدول‌های خواص سیال خاص تعیین کرد. ضریب انبساط حجمی گازهای کامل را می‌توان از فرمول زیر (مسأله ۷-۳) حساب کرد:

$$\beta = \frac{1}{T}$$

که T دمای مطلق گاز است.

حرکت سیال در نتیجه تغییرات چگالی ایجاد می‌شود، اما این تغییرات خیلی کوچکندو جواب قابل قبول این مسأله را می‌توان با فرض جریان غیرقابل تراکم، ثابت $= \rho$ به‌دست آورد. برای حل معادله حرکت از روش تحلیل انتگرالی، مشابه روش به‌کار رفته در مسأله جابه‌جایی اجباری فصل ۵ عمل می‌کنیم. تحلیل‌های مشروح لایه مرزی در مراجع ۱۳، ۲۷ و ۳۲ ارائه شده‌اند.

معادله اندازه حرکت انتگرالی سیستم جابه‌جایی آزاد چنین می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2\,dy\right) = -\tau_w + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\,dy$$

$$= -\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\,dy \qquad (۶-۷)$$

و مشاهده می‌شود که برای رسیدن به جواب باید تابع پخش سرعت و دما را بدانیم. برای به‌دست آوردن این توابع همان راه فصل ۵ را دنبال می‌کنیم. شرایط زیر بر پخش دما اعمال می‌شود:

$$T = T_w \quad \text{در } y = 0$$
$$T = T_\infty \quad \text{در } y = \delta$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{در } y = \delta$$

بنابراین پخش دما چنین است:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad (۷-۷)$$

سه شرط نیم‌رخ سرعت چنینند:

$$u = 0 \quad \text{در } y = 0$$
$$u = 0 \quad \text{در } y = \delta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{در } y = \delta$$

با توجه به رابطه زیر می‌توان از معادله (۷-۴) یک شرط دیگر به‌دست آورد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\beta\frac{T_w - T_\infty}{\nu} \quad \text{در } y = 0$$

مثل تحلیل انتگرالی مسائل جابه‌جایی اجباری، فرض می‌کنیم که شکل نیم‌رخ‌های سرعت در فواصل مختلف xدر طول صفحه از نظر هندسی مشابهند. اکنون برای مسائل جابه‌جایی آزاد فرض می‌کنیم که بتوان سرعت را به‌صورت تابعی چندجمله‌ای از y ضرب‌در تابع دلخواهی از x نشان داد. بنابراین:

$$\frac{u}{u_x} = a + by + cy^2 + dy^3$$

که u_x سرعتی تصوری و تابعی از xاست . علت انتخاب چند

جمله‌ای درجه سوم آن است که چهار شرط برای برآورده شدن وجود دارد و این ساده‌ترین نوع تابعی است که می‌توان به‌کار برد. با اعمال این چهار شرط در نیم‌رخ سرعت فوق داریم:

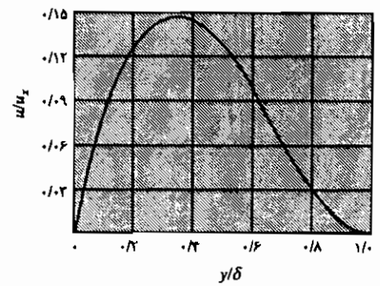
$$\frac{u}{u_x} = \frac{\beta\delta^2 g(T_w - T_\infty)}{4u_x\nu}\frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

می‌توان جمله ضریب اختلاف دما، δ^2، و u_xرا طوری در تابع u_x در نظر گرفت که رابطه نهایی نیم‌رخ سرعت چنین می‌شود:

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad (۸-۷)$$

معادله (۷-۸) در شکل ۷-۲ رسم شده است. با جای‌گزینی معادلات (۷-۷) و (۷-۸) در معادله (۷-۶) و انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{1}{105}\frac{d}{dx}(u_x^2\,\delta) = \frac{1}{3}g\beta(T_w - T_\infty)\delta - \nu\frac{u_x}{\delta} \qquad (۹-۷)$$



شکل ۷-۲ نیم‌رخ سرعت جابه‌جایی آزاد که از معادلهٔ (۷-۸) به‌دست می‌آید.

شکل انتگرالی معادله انرژی سیستم جابه‌جایی آزاد چنین است:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta u(T - T_\infty)dy\right] = -\alpha\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} \qquad (۱۰-۷)$$

و وقتی پخش سرعت و دمای مفروض را در معادله جای‌گزین و ساده کنیم، داریم:

$$\frac{1}{30}(T_w - T_\infty)\frac{d}{dx}(u_x\,\delta) = 2\alpha\frac{T_w - T_\infty}{\delta} \qquad (۱۱-۷)$$

از استدلالی که منجر به معادلهٔ (۷-۸) شده روشن است که:

$$u_x \sim \delta^2 \qquad (۱۲-۷)$$

با جای‌گزینی این رابطه در معادلهٔ (۷-۹) نتیجه می‌شود که:

$$\delta \sim x^{\frac{1}{4}} \qquad (۱۳-۷)$$

بنابراین توابع نمایی زیر را برای u_x و δ فرض می‌کنیم:

$$u_x = C_1 x^{\frac{1}{4}} \qquad (۱۴-۷)$$

$$\delta = C_2 x^{\frac{1}{4}} \qquad (۱۵-۷)$$

با وارد کردن این روابط در معادلات (۷-۹) و (۷-۱۱) داریم:

$$\frac{5}{420}C_1^2 C_2 x^{\frac{1}{4}} = g\beta(T_w - T_\infty)\frac{C_2}{3}x^{\frac{1}{4}} - \frac{C_1}{C_2}\nu x^{\frac{1}{4}} \qquad (۱۶-۷)$$

و:

$$\frac{1}{40}C_1 C_2 x^{-\frac{1}{4}} = \frac{2\alpha}{C_2}x^{-\frac{1}{4}} \qquad (۱۷-۷)$$

می‌توان این دو معادله را برای به‌دست آوردن مقادیر ثابت C_1 و C_2 حل کرد:

$$C_1 = 5/17\,\nu\left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (۱۸-۷)$$

$$C_2 = 3/93\left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (۱۹-۷)$$

در نتیجه عبارت زیر را برای ضخامت لایه مرزی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = 3/93\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}}\,(0/952 + \mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Gr}_x^{-\frac{1}{4}} \qquad (۲۰-۷)$$

که در آن عدد پراندل $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$ به همراه گروه بی‌بعد جدیدی موسوم به **عدد گراشف** Gr_x ارائه شده است:

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2} \qquad (۲۱-۷)$$

ضریب انتقال گرما را می‌توان از فرمول زیر به‌دست آورد:

$$q_w = -kA\left.\frac{dt}{dy}\right|_w = hA\,(T_w - T_\infty)$$

با استفاده از پخش دمای معادلهٔ (۷-۷) داریم:

$$h = \frac{2k}{\delta} \qquad \text{یا} \qquad \frac{hx}{k} = \mathrm{Nu}_x = 2\frac{x}{\delta}$$

بنابراین معادله بی‌بعد ضریب انتقال گرما چنین می‌شود:

$$\mathrm{Nu}_x = 0/508\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{2}}\,(0/952 + \mathrm{Pr})^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{Gr}_x^{\frac{1}{4}} \qquad (۲۲-۷)$$

معادله (۷-۲۲) تغییر ضریب گرمای موضعی در طول صفحه عمودی را به‌دست می‌دهد. سپس ضریب انتقال گرمای متوسط را می‌توان با انتگرال‌گیری به‌دست آورد:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx \qquad (۲۳-۷)$$

ضریب متوسط برای تغییر ارائه شده با معادله (۷-۲۲) برابر است با:

$$\bar{h} = \frac{4}{3}h_{x=L} \qquad (۲۴-۷)$$

عدد گراشف را از نظر فیزیکی می‌توان به عنوان گروه بی‌بعدی تفسیرکرد که‌نسبت نیروهای شناوری به‌نیروهای‌لزجت را در سیستم جریان جابه‌جایی آزاد نشان می‌دهد. نقش این عدد مشابه عدد رینولدز در سیستم‌های جابه‌جایی اجباری است و متغیر عمده‌ای است‌که به‌عنوان محک‌گذار از جریان لایه مرزی آرام به ناآرام استفاده می‌شود. اکرت و زونگن Soehngen و Eckert [۱] عدد گراشف بحرانی هوا در جابه‌جایی آزاد روی صفحه تخت عمودی را

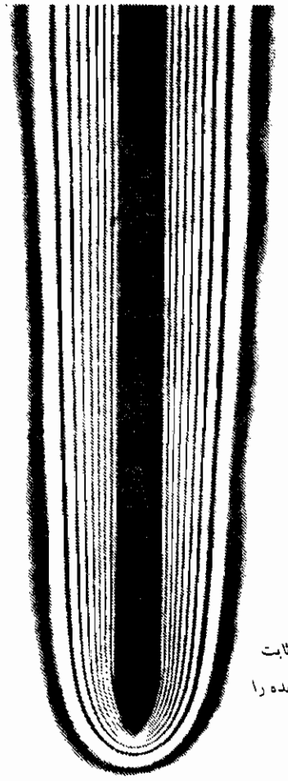
مشاهده‌کرده، تقریباً برابر ۴×۱۰۸ است. این عدد برای سیالات و ناآرامی‌های مختلف محیط بین۱۰۸ و۱۰۹ دیده می‌شود.

گبهارت Gebhart و سایرین [۱۵-۱۳] بررسی خیلی کامل پایداری و گذار لایه‌های مرزی جابه‌جایی آزاد را انجام داده‌اند.

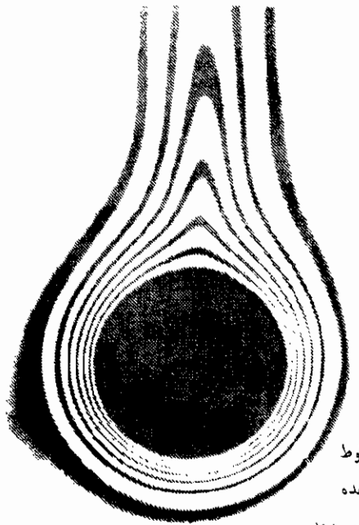
تحلیل ارائه شده برای انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد روی صفحه تخت عمودی، ساده‌ترین موردی است که می‌توان به طور ریاضی بررسی کرد و برای معرفی متغیر بی‌بعد جدید یعنی عدد گراشف[۱] استفاده شده است که در تمام مسائل جابه‌جایی آزاد مهم است. ولی مثل بعضی مسائل جابه‌جایی اجباری برای به‌دست آوردن روابط انتقال گرمای سایر حالات باید به اندازه‌گیری تجربی تکیه کرد. معمولاً در این حالات پیش‌بینی تحلیلی نیم‌رخ‌های دما و سرعت مشکل است. جابه‌جایی آزاد ناآرام درست مثل جابه‌جایی اجباری ناآرام نمونه مهمی از سری مسائلی است که در آنها داده‌های تجربی ضروری‌اند؛ گر چه در سیستم‌های جریان آزاد، مسأله دقیق‌تر از سیستم‌های جابه‌جایی اجباری است زیرا معمولاً سرعت‌ها آن‌قدر کوچندکه اندازه‌گیری‌شان خیلی مشکل است و علی‌رغم مشکلات تجربی، سرعت با استفاده از روش‌های حباب - هیدروژن [۲۶]، بادسنجی سیم گرم [۲۸] و بادسنج‌های فیبر - کوارتز اندازه‌گیری شده است. میدان دما با استفاده از تداخل‌سنج زندر - ماخ اندازه‌گیری شده است. به‌ویژه، بادسنج لیزری [۲۹] برای اندازه‌گیری‌های جابه‌جایی آزاد مفید است زیرا میدان جریان را آشفته نمی‌کند.

تداخل سنج، خطوط چگالی ثابت میدان جریان سیال را نشان می‌دهد. این خطوط در جابه‌جایی آزاد گاز فشارپایین هم‌ارز خطوط دما ثابتند. با به‌دست آوردن میدان دما می‌توان انتقال گرما از سطح در جابه‌جایی آزاد را با استفاده از گرادیان دما در سطح و ضریب هدایت گرمایی گاز حساب کرد. مطالعات تداخل سنجی متعددی در مورد جابه‌جایی آزاد انجام شده [۱-۳] و بعضی تصاویر نمونه از میدان‌های جریان در شکل ۷-۳ تا ۷-۶ نشان داده شده‌اند.

شکل ۷-۳ خطوط دما ثابت اطراف صفحه تخت عمودی گرمادیده را نشان می‌دهد. توجه کنید که خطوط در نزدیکی سطح صفحه از همه جا به‌هم نزدیکترند، که نشان می‌دهند گرادیان دما در آن منطقه بیش‌تر است. شکل ۷-۴ خطوط دما ثابت در اطراف استوانه افقی گرمادیده را در جابه‌جایی آزاد و شکل ۷-۵ بر هم‌کنش لایه مرزی بین یک گروه چهارتایی استوانه افقی را نشان می‌دهند. پدیده‌ای مشابه را می‌توان برای جریان جابه‌جایی اجباری در عرض کلاف لوله گرمادیده مشاهده کرد. مطالعات تداخل سنجی برای تعیین نقطهٔ تشکیل گرداب در لایه مرزی جابه‌جایی، انجام شده است [۱] و این مطالعات برای پیش‌بینی شروع گذار به جریان ناآرام در سیستم‌های جابه‌جایی آزاد استفاده می‌شود.

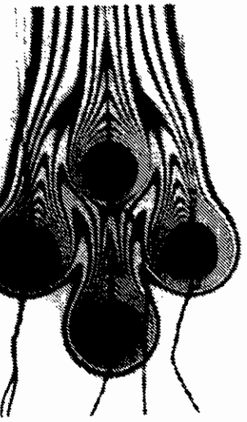


شکل ۷-۳
عکس تداخل سنجی که خطوط دمائابت اطراف صفحه تخت عمودی گرمادیده را در جابه‌جایی آزاد نشان می‌دهد.



شکل ۷-۴
عکس تداخل سنجی که خطوط دمائابت اطراف افقی گرمادیده را در جابه‌جایی آزاد نشان می‌دهد.

۱ تاریخ موضوع روشن نیست، ولی به نظر می‌رسد که عدد گراشف به نام فرانتز گراشف استاد مکانیک کاربردی در کارلزروهه در حدود ۱۸۶۳ و یکی از مدیران بنیان‌گذار Verein deutscher Ingenieure در ۱۸۵۵ موسوم شده است. وی بعضی از فرمول‌های اولیه جریان بخار را به‌دست آورد ولی در زمینه جابه‌جایی آزاد کار مهمی انجام نداده است.[۳۶]:(م)



شکل ۷-۵ عکس تداخل سنجی که بر هم‌کنش لایه مرزی بین چهار استوانه افقی گرمادیده را در جابه‌جایی آزاد نشان می‌دهد.

قبلاً گفتیم که سرعت‌ها در جابه‌جایی آزاد آن‌قدر کوچکند که اندازه‌گیری آنها در بسیاری از سیستم‌ها بدون اثر گذاری بر میدان جریان به خاطر فروبردن وسیله اندازه‌گیری، مشکل است. نمایش تقریبی سرعت جریان آزاد در شکل ۷-۶ داده شده که در آن موج لایه مرزی جابه‌جایی آزاد ناشی از تب گرمایی در نزدیکی لبه بالاروند صفحه دیده می‌شود توجه کنید که نقاط بیشینه در منحنی‌های هم‌دما دارای تأخیر فاز بوده، خطی که این نقاط بیشینه را به‌هم وصل می‌کند تقریباً شکل نیم‌رخ سرعت جابه‌جایی آزاد است.

جلوه‌های متعدد نظری و عملی مسائل جابه‌جایی آزاد در تعدادی از مراجع مورد بررسی قرار می‌گیرد. گبهارت [۱۳] یکی از جامع‌ترین بحث‌ها را ارائه‌کرده، خواننده مشتاق می‌تواند برای کسب اطلاع بیش‌تر این مراجع را ببیند.

❑ ۷-۳ روابط تجربی جابه‌جایی آزاد

پس از سال‌ها تجربه دریافته‌اند که ضرایب انتقال گرمای متوسط جابه‌جایی آزاد را می‌توان برای انواعی از حالات به شکل تابع زیر نشان داد:

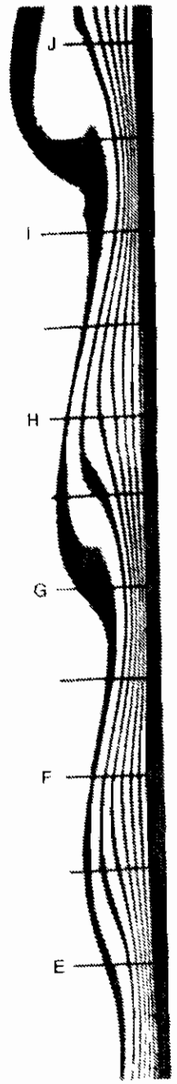
$$\overline{\mathrm{Nu}}_f = C\,(\mathrm{Gr}_f\,\mathrm{Pr}_f)^m \qquad (۲۵\text{-}۷)$$

که زیر نویس f نشان می‌دهد خواص گروه‌های بی‌بعد در دمای فیلم ارزیابی شده‌اند:

$$T_f = \frac{T_\infty + T_w}{۲}$$

حاصل‌ضرب عدد گراشف و پراندل را عدد ریلای Rayleigh می‌نامند:

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} \qquad (۲۶\text{-}۷)$$



شکل ۷-۶ عکس تداخل سنجی که هم‌دماهای روی صفحه عمودی تخت گرما دیده را نشان می‌دهد که از اغتشاش دوره‌ای لایه مرزی ناشی شده‌اند. به جابه‌جا شدن‌های فاز در نقاط بیشینه هم‌دماها توجه کنید.

ابعاد مشخصه

بعد مشخصه‌ای که باید در اعداد نوسلت و گراشف به کار رود به شکل هندسی مسأله بستگی دارد. این بعد برای صفحه عمودی، ارتفاع صفحه L؛ برای استوانه افقی قطر d؛ و الی آخر است. داده‌های تجربی مسائل جابه‌جایی آزاد در تعدادی از مراجع، با بعضی نتایج متناقض، ارائه شده‌اند. هدف بخش‌های بعدی ارائه خلاصه این نتایج است که می‌توان از آنها به‌راحتی در کارهای

محاسباتی استفاده کرد. در بسیاری از این مسائل از شکل تابعی معادلهٔ (۷-۲۵) استفاده می‌شود و مقادیر ثابت C و m برای هرمورد مشخص شده‌اند. در جدول ۷-۱ خلاصه‌ای از مقادیر این ثابت‌ها برای هندسه‌های مختلف آمده، در بخش‌های بعدی، این روابط به طور مشروح‌تر بحث می‌شود.

جدول ۷-۱ مقادیر ثابت برای استفاده در معادلهٔ (۷-۲۵) برای سطوح هم‌دما

شکل هندسی	$Gr_f Pr_f$	C	m	مرجع
صفحات و استوانه‌های عمودی	$10^{-1} - 10^{4}$	شکل ۷-۷	شکل ۷-۷	۴
	$10^{4} - 10^{9}$	۰/۵۹	$\frac{1}{4}$	۴
	$10^{9} - 10^{13}$	۰/۰۲۱	$\frac{2}{5}$	۳۰
	$10^{9} - 10^{13}$	۰/۱۰	$\frac{1}{3}$	۱۶* و ۲۲
	$0 - 10^{-5}$	۰/۴	۰	۴
استوانه‌های افقی	$10^{-5} - 10^{2}$	شکل ۷-۸	شکل ۷-۸	۴
	$10^{2} - 10^{9}$	۰/۵۳	$\frac{1}{4}$	۴
	$10^{9} - 10^{12}$	۰/۱۳	$\frac{1}{3}$	۴
	$10^{-10} - 10^{-2}$	۰/۶۷۵	۰/۰۵۸	۷۶*
	$10^{-2} - 10^{2}$	۱/۰۲	۰/۱۴۸	۷۶*
	$10^{2} - 10^{2}$	۰/۸۵۰	۰/۱۸۸	۷۶
	$10^{2} - 10^{7}$	۰/۴۸۰	$\frac{1}{4}$	۷۶
	$10^{7} - 10^{12}$	۰/۱۲۵	$\frac{1}{3}$	۷۶
سطح بالایی صفحات گرمایافته $2\times10^{2}-8\times10^{6}$		۰/۵۴	$\frac{1}{4}$	۵۲ و ۴۴
یا سطح پایینی صفحات سرمایافته				
سطح بالایی صفحات گرمایافته $8\times10^{6}-10^{11}$		۰/۱۵	$\frac{1}{3}$	۵۲ و ۴۴
یاسطح پایینی صفحات سرمایافته				
سطح پایینی صفحات گرمایافته $10^{5}-10^{11}$		۰/۲۷	$\frac{1}{4}$	و ۳۷ و ۴۴
یا سطح بالایی صفحات سرما یافته				۷۵
استوانه قائم، ارتفاع = قطر	$10^{2} - 10^{6}$	۰/۷۷۵	۰/۲۱	۷۷
طول مشخصه = قطر				
اجسام نامنظم، طول مشخصه = مسافتی که ذره سیال در لایه مرزی می‌پیماید	$10^{2} - 10^{9}$	۰/۵۲	$\frac{1}{4}$	۷۸

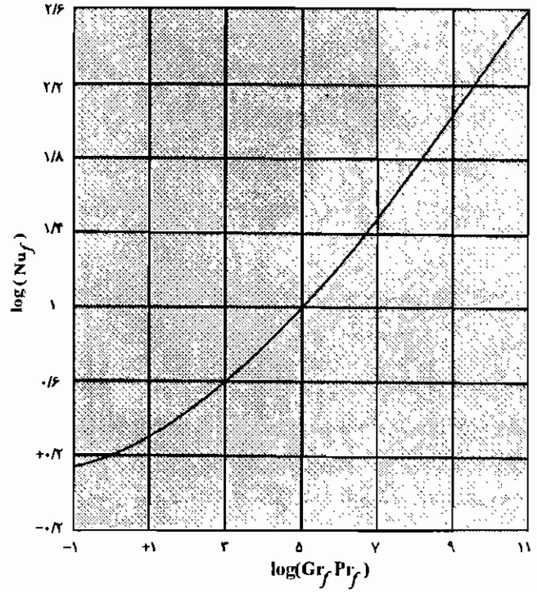
* برتری دارد.

۷-۴ جابه‌جایی آزاد از صفحات عمودی و استوانه‌ها

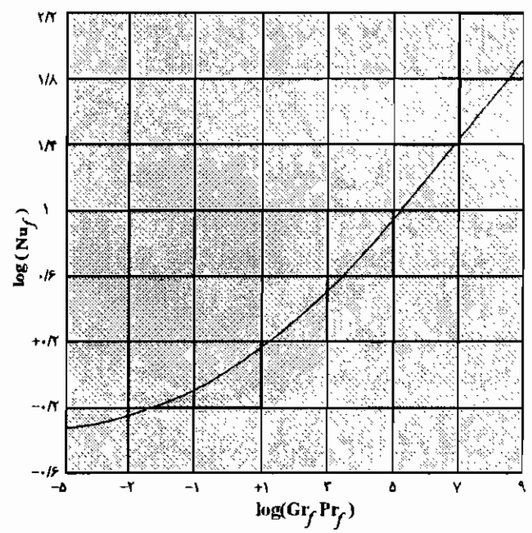
سطوح هم‌دما

اعداد نوسلت و گراشف سطوح عمودی برحسب L یعنی ارتفاع سطح به‌عنوان بعد مشخصه، نوشته می‌شود. اگر ضخامت لایه مرزی در مقایسه با قطر استوانه بزرگ نباشد می‌توان انتقال گرما را با همان روابط صفحات عمودی حساب کرد. معمولاً وقتی:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}} \qquad (۷-۲۷)$$



شکل ۷-۷ هم‌بستگی انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از صفحات عمودی گرم شده، طبق مرجع ۴.



شکل ۷-۸ هم‌بستگی انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از استوانه‌های افقی گرم شده، طبق مرجع ۴.

آنگاه استوانه عمودی را به صورت صفحه تخت عمودی [۱۳] در نظر می‌گیرند، که D قطر استوانه است. مقدار ثابت‌ها برای سطوح هم‌دما، در جدول ۷-۱ ارائه شده، همراه آن مراجع مناسب برای مشاوره بیش‌تر داده شده‌اند. توجه خواننده را به دو سری ثابت برای حالت ناآرام ($Gr_f Pr_f > 10^9$) جلب می‌کنیم. گرچه ممکن است بین این ثابت‌ها تفاوت محرزی به‌نظر آید ولی مقایسه این دو رابطه توسط وارنر Warner و آرپاچی [۲۲] با داده‌های تجربی نشان می‌دهد که هر دو سری ثابت با داده‌های موجود مطابقند. کار تحلیلی بیلی [۱۶] و اندازه‌گیری‌های شارگرمایی مرجع ۲۲ نشان می‌دهد که رابطهٔ زیر بهتر است.

$$Nu_f = 0/10 (Gr_f Pr_f)^{1/3}$$

چرچیل و چو chu [۷۱] روابط پیچیده‌تری تهیه کرده‌اند که برای محدوده وسیع‌تری از عدد ریلای کاربرد دارد:

$$\overline{Nu} = 0/68 + \frac{0/670\ Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0/492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} \quad \text{برای } Ra_L < 10^9 \qquad (۷-۲۸)$$

$$\overline{Nu}^{1/2} = 0/825 + \frac{0/387\ Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0/492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}$$

$$\text{برای } 10^{-1} < Ra_L < 10^{2} \qquad (۷-۲۹)$$

معادلهٔ (۷-۲۸) نیز رابطه مطلوبی برای شارگرمایی ثابت است. خواص در این دو معادله در دمای فیلم ارزیابی شده‌اند.

سطوح با شارگرمایی ثابت

در مراجع ۲۵، ۲۶ و ۳۹ برای جابه‌جایی آزاد از سطوح عمودی و شیب‌دار به آب در شرایط شارگرمایی ثابت، تجربیات جامعی گزارش شده‌اند. در این تجربیات نتایج برحسب عدد گراشف پیراسته؛ Gr^*، ارائه شده‌اند:

$$Gr_x^* = Gr_x\, Nu_x = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2} \qquad (۷-۳۰)$$

که q_w شارگرمایی دیواره به وات بر متر مربع است. ضرایب انتقال گرمای **موضعی** برای محدوده آرام با رابطه زیرهم‌بسته شده‌اند:

$$Nu_{xf} = \frac{hx}{k_f} = 0/60 (G_x^* Pr_f)^{1/5}$$

$$10^{5} < G_x^* < 10^{11}\ ;\ q_w = \text{ثابت} \qquad (۷-۳۱)$$

توجه کنید که معیار آرام بودن جریان برحسب Gr_x^* با معیار آن بر حسب Gr_x یکی نیست. ملاحظه شد که گذار لایه مرزی بین $Gr_x^* Pr = 3\times10^{12}$ و 4×10^{13} شروع شده، بین 2×10^{13} و 10^{12} پایان می‌یابد. جریان ناآرام کاملاً توسعه‌یافته با $Gr_x^* Pr = 10^{12}$ به وجود آمد و آزمایش‌ها تا $Gr_x^* Pr = 10^{16}$ ادامه داشت. ضرایب انتقال گرمای موضعی ناحیه ناآرام با رابطهٔ زیر هم‌بسته شدند:

$$Nu_x = 0/17 (G_x^* Pr)^{1/4}$$

$$2\times10^{13} < G_x^* Pr < 10^{16}\ ;\ q_w = \text{ثابت} \qquad (۷-۳۲)$$

کلیه خواص در معادلات (۷-۳۱) و (۷-۳۲) در دمای فیلم موضعی ارزیابی می‌شود. این آزمایشات برای آب صورت گرفته‌اند، روابط حاصله برای هوا نیزقابل استفاده‌اند. ضریب انتقال گرمای متوسط برای مورد شارگرمایی ثابت را نمی‌توان از معادلهٔ (۷-۲۴) بلکه باید با استفاده از معادلهٔ (۷-۲۳) ارزیابی کرد. بنابراین برای ناحیه آرام با استفاده از معادله (۷-۳۱) برای ارزیابی h_x داریم:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx$$

$$\bar{h} = \frac{5}{4} h_{x=L} \qquad q_w = \text{ثابت}$$

در اینجا می‌توان رابطه بین معادله‌ای به شکل (۷-۲۵) و آنهایی را که بر حسب $Gr_x^* = Gr_x\, Nu_x$ ارائه شده‌اند، پیدا کرد. معادله (۷-۲۵) برای انتقال گرمای **موضعی** چنین می‌شود:

$$Nu_x = C\,(Gr_x\, Pr)^m \qquad (۷-۳۳)$$

با قرار دادن $Gr_x = \frac{Gr_x^*}{Nu_x}$ در معادله فوق داریم:

$$Nu^{1+m} = C\,(G_x^* Pr)^m$$

یا

$$Nu_x = C^{\frac{1}{(1+m)}}\,(G_x^* Pr)^{\frac{m}{(1+m)}} \qquad (۷-۳۴)$$

بنابراین وقتی مقادیر "مشخصه" m جریان آرام و ناآرام را با نماهای روی G_x^* مقایسه کنیم داریم:

آرام $m = \frac{1}{4}$:

$$\frac{m}{1+m} = \frac{1}{5}$$

ناآرام $m = \frac{1}{3}$:

$$\frac{m}{1+m} = \frac{1}{4}$$

استفاده از فرمول‌بندی Gr^* برای مورد شارگرمایی ثابت ساده‌تر است اما نماهای **مشخصه** با شمایی که برای همبستگی‌های سطح هم‌دما ارائه شد خیلی خوب منطبق است.

تغییر h_x نسبت به x در دو رژیم مشخصه نیز جالب توجه است. برای محدوده آرام $m = \frac{1}{4}$ و از معادلهٔ (۷-۲۵):

$$h_x \sim \frac{1}{x}\,(x^3)^{1/4} = x^{-1/2}$$

در رژیم ناآرام $m = \frac{1}{3}$ و داریم:

ثابت، نسبت به $h_x \sim \frac{1}{x}\,(x^3)^{1/3} = x$

بنابراین ضریب انتقال گرمای موضعی در جابه‌جایی آزاد ناآرام اساساً نسبت به x ثابت است.

چرچیل و چو [۷۱] نشان می‌دهند که می‌توان معادلهٔ (۷-۲۸) را پیراسته و برای مورد شار گرمای ثابت به‌کار برد به شرطی که عدد نوسلت متوسط بر پایه شار گرمایی دیواره و اختلاف دما در مرکز صفحه ($x = \frac{L}{2}$) به‌دست آید. نتیجه چنین است:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L^{\frac{1}{2}} \left(\overline{\mathrm{Nu}}_L - ۰/۶۸\right) = \frac{۰/۶۷ \left(\mathrm{G}_L^* \mathrm{Pr}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۴۹۲}{\mathrm{Pr}}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{4}{9}}} \qquad (۳۵-۷)$$

که در $\frac{L}{2}$ ـ T_∞ داریم:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = q_w \frac{L}{(k\ \overline{\Delta T})} \qquad \text{و} \qquad \overline{\Delta T} = T_w - T_\infty$$

مثال ۷-۱ شار گرمایی ثابت از صفحه عمودی

شار انرژی تابشی خالص در محل تأسیساتی در نزدیک کوره‌ای به‌میزان $۸۰۰ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ روی سطح فلزی عمودی به ارتفاع ۳/۵ m و عرض ۲m می‌تابد. پشت این فلز عایق و سیاه رنگ شده است به طوری که تمام تابش وارده با جابه‌جایی آزاد به هوای محیط ۳۰°C پراکنده می‌شود. دمای متوسط این صفحه چه‌قدر خواهد شد؟

حل :

شار گرمایی روی سطح در این مسأله را ثابت در نظر می‌گیریم. از آنجا که دمای سطح را نمی‌دانیم برای تعیین T_f و خواص هوا تخمین می‌زنیم. مقدار تقریبی h در مسائل جابه‌جایی آزاد $۱۰ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.^\circ\mathrm{C}}$ است و بنابراین به طور تقریب داریم:

$$\Delta T = \frac{q_w}{h} \approx \frac{۸۰۰}{۱۰} = ۸۰^\circ\mathrm{C}$$

پس :

$$T_f \approx \frac{۸۰}{۲} + ۳۰ = ۷۰^\circ\mathrm{C} = ۳۴۳\ \mathrm{K}$$

خواص هوا در ۷۰°C عبارتند از:

$$\nu = ۲/۰۴۳ \times ۱۰^{-۵} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \qquad \beta = \frac{۱}{T_f} = ۲/۷۹ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{K}^{-۱}$$

$$k = ۰/۰۲۹۵ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}.^\circ\mathrm{C}} \qquad \mathrm{Pr} = ۰/۷$$

از معادله (۷-۳۰) به ازای $x = ۳/۵$ m داریم:

$$\mathrm{G}_L^* = \frac{g \beta\, q_w\, x^4}{k \nu^2} = \frac{(۹/۸)(۲/۹۲ \times ۱۰^{-۳})(۸۰۰)(۳/۵)^4}{(۰/۰۲۹۵)(۲/۰۰۵ \times ۱۰^{-۵})^2} = ۲/۹۰ \times ۱۰^{۱۲}$$

بنابراین برای ارزیابی h_x می‌توان از معادلهٔ (۷-۳۲) استفاده کرد:

$$h_x = \frac{k}{x}(۰/۱۷)\ \left(\mathrm{G}_x^* \mathrm{Pr}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{۰/۰۲۹۵}{۳/۵}\ (۰/۱۷)(۲/۷۹ \times ۱۰^{۱۲} \times ۰/۷)^{\frac{1}{4}}$$

$$= ۵/۳۶ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.^\circ\mathrm{C}} \qquad \left[۰/۹۴۴ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^2.^\circ\mathrm{F}}\right]$$

در انتقال گرمای ناآرام با معادلهٔ حاکمهٔ (۷-۳۲) متوجه می‌شویم که:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h x}{k} \sim \left(\mathrm{G}_x^*\right)^{\frac{1}{4}} \sim \left(x^3\right)^{\frac{1}{4}}$$

یعنی h_x با x تغییر نمی‌کند و می‌توان این عدد را به صورت مقدار متوسط در نظر گرفت. مقدار $h = ۵/۴۱ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.^\circ\mathrm{C}}$ کوچک‌تر از مقدار تقریبی‌ای است که در تخمین T_f استفاده کردیم. با محاسبه مجدد ΔT داریم:

$$\Delta T = \frac{q_w}{h} = \frac{۸۰۰}{۵/۳۶} = ۱۴۹^\circ\mathrm{C}$$

و دمای فیلم جدید برابر است با:

$$T_f = ۳۰ + \frac{۱۴۹}{۲} = ۱۰۴/۵^\circ\mathrm{C}$$

خواص هوا در ۱۰۴/۵°C برابر است با:

$$\nu = ۲/۳۵۴ \times ۱۰^{-۵} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \qquad \beta = \frac{۱}{T_f} = ۲/۶۵ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{K}$$

$$k = ۰/۰۳۲۰ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}.^\circ\mathrm{C}} \qquad \mathrm{Pr} = ۰/۶۹۵$$

بنابراین:

$$\mathrm{G}_L^* = \frac{(۹/۸)(۲/۶۵ \times ۱۰^{-۳})(۸۰۰)(۳/۵)^4}{(۰/۰۳۲۰)(۲/۳۵۴ \times ۱۰^{-۵})^2} = ۱/۷۵ \times ۱۰^{۱۲}$$

و h_x چنین حساب می‌شود:

$$h_x = \frac{k}{x}\ (۰/۱۷)(\mathrm{G}_x^* \mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{(۰/۰۳۲۰)(۰/۱۷)}{۳/۵}\ \left[(۱/۷۵۸ \times ۱۰^{۱۲})(۰/۶۹۵)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= ۵/۱۷ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.^\circ\mathrm{C}} \qquad \left[۰/۹۱ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^2.^\circ\mathrm{F}}\right]$$

اختلاف دمای جدید به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\Delta T = (T_w - T_\infty)_{av} = \frac{q_w}{h} = \frac{۸۰۰}{۵/۱۷} = ۱۵۵^\circ\mathrm{C}$$

بنابراین دمای دیواره متوسط برابر است با:

$$T_{w,av} = ۱۵۵ + ۳۰ = ۱۸۵^\circ\mathrm{C}$$

تکرار دیگری روی مقدار T_f لازم نیست زیرا دقت چندان تغییری نمی‌کند.

مثال ۷-۲ انتقال گرما از صفحه عمودی هم‌دما

صفحه عمودی بزرگی به ارتفاع ۴/۰ m را به دمای ۶۰°C رسانده، در معرض هوای جو به دمای ۱۰°C قرار می‌دهیم. چنان‌چه عرض صفحه ۱۰ m باشد انتقال گرما را حساب کنید.

حل :

نخست دمای فیلم را تعیین می‌کنیم:

$$T_f = \frac{۶۰ + ۱۰}{۲} = ۳۵^\circ\mathrm{C} = ۳۰۸\ \mathrm{K}$$

بنابراین خواص مورد نظر چنین است:

$$\beta = \frac{۱}{۳۰۸} = ۳/۲۵ \times ۱۰^{-۳} \qquad k = ۰/۰۲۶۸۵$$

$$\nu = ۱۶/۵ \times ۱۰^{-۶} \qquad \mathrm{Pr} = ۰/۷$$

و :

$$\mathrm{Gr\ Pr} = \frac{(۹/۸)(۳/۲۵ \times ۱۰^{-۳})(۶۰ - ۱۰)(۴)^3}{(۱۶/۵ \times ۱۰^{-۶})^2}\ ۰/۷$$

$$= ۲/۶۲ \times ۱۰^{۱۱}$$

سپس از معادلهٔ (۷-۲۹) استفاده کرده، داریم:

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{\frac{1}{2}} = ۰/۸۲۵ + \frac{(۰/۳۸۷)(۲/۶۲ \times ۱۰^{۱۱})^{\frac{1}{6}}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۴۹۲}{۰/۷}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{8}{27}}}$$

$$= ۲۶/۷۵$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = ۷۱۶$$

بنابراین ضریب انتقال گرما برابر است با:

$$\bar{h} = \frac{(۷۱۶)(۰/۰۲۶۸۵)}{۴/۰} = ۴/۸۰ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.^\circ\mathrm{C}}$$

انتقال گرما برابر است با:

$$q = \bar{h} A\ (T_w - T_\infty)$$

$$= (۴/۸۰)(۴)(۱۰)(۶۰ - ۱۰) = ۹۶۰۶\ \mathrm{W}$$

از رابطهٔ ساده‌تر زیر می‌توان به‌عنوان راه‌حلی دیگر استفاده کرد:

$$\mathrm{Nu} = ۰/۱۰\ (\mathrm{Gr\ Pr})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (۰/۱۰)(۲/۶۲ \times ۱۰^{۱۱})^{\frac{1}{3}} = ۶۳۹/۹$$

که مقدار حاصله حدود ۱۰ درصد کم‌تر از جواب معادلهٔ (۷-۲۹) است.

❑ ۷-۵ جابه‌جایی آزاد از استوانه‌های افقی

مقدار ثابت‌های C و m استوانه‌ها در جدول ۷-۱ طبق مراجع ۴ و ۷۶ داده شده است. پیش‌بینی‌های مورگان (مرجع ۷۶ جدول ۷-۱) مقدار قابل اطمینان Gr Pr را با تقریب $۱۰^{-۵}$ به‌دست می‌دهد. چرچیل و چو [۷۰] عبارت پیچیده‌تری با محدودهٔ وسیع‌تر از Gr Pr ارائه داده‌اند:

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{\frac{1}{2}} = ۰/۶۰ + ۰/۳۸۷ \left\{\frac{\mathrm{Gr\ Pr}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۵۵۹}{\mathrm{Pr}}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{16}{9}}}\right\}^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{برای } ۱۰^{-۵} < \mathrm{Gr\ Pr} < ۱۰^{۱۲} \qquad (۳۶-۷)$$

مرجع ۷۰ معادلهٔ ساده‌تری را ارائه می‌کند، ولی مقید به محدودهٔ آرام $۱۰^{-۶} < \mathrm{Gr\ Pr} < ۱۰^{۹}$ می‌باشد:

$$\mathrm{Nu}_d = ۰/۳۶ + \frac{۰/۵۱۸(\mathrm{Gr}_d\ \mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۵۵۹}{\mathrm{Pr}}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{4}{9}}} \qquad (۳۷-۷)$$

خواص در معادلات (۷-۳۶) و (۷-۳۷) در دمای فیلم ارزیابی می‌شود.

انتقال گرما از استوانه‌های افقی به فلزات مایع را می‌توان با توجه به مرجع ۴۶ حساب کرد:

$$\mathrm{Nu}_d = ۰/۵۳(\mathrm{Gr}_d\ \mathrm{Pr}^2)^{\frac{1}{4}} \qquad (۳۸-۷)$$

مثال ۷-۳ انتقال گرما از لوله افقی در آب

دمای سطحی گرم‌کنی افقی به قطر ۲/۰ cm برابر ۳۸°C است و در آب به دمای ۲۷°C فرو برده می‌شود. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد واحدطول این گرم‌کن را حساب کنید.

حل :

دمای فیلم برابر است با:

$$T_f = \frac{۳۸ + ۲۷}{۲} = ۳۲/۵^\circ\mathrm{C}$$

خواص آب از پیوست A عبارتست از:

$$k = ۰/۶۳۰ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}.^\circ\mathrm{C}}$$

و عبارت زیر برای به‌دست آوردن حاصل‌ضرب Gr Pr، وقتی آن‌را در $d^3 \Delta T$ ضرب کنیم، مفید است:

$$\frac{g \beta \rho^2 c_p}{\mu k} = ۲/۴۸ \times ۱۰^{۱۰} \quad \left[\frac{۱}{\mathrm{m}^3.^\circ\mathrm{C}}\right]$$

$$\mathrm{Gr\ Pr} = (۲/۴۸ \times ۱۰^{۱۰})(۳۸ - ۲۷)(۰/۰۲)^3 = ۲/۱۸ \times ۱۰^{۶}$$

با استفاده از جدول ۷-۱ داریم $C = ۰/۵۳$ و $m = \frac{۱}{۴}$ و در نتیجه:

$$\mathrm{Nu} = (۰/۵۳)(۲/۱۸ \times ۱۰^{۶})^{\frac{1}{4}} = ۲۰/۳۶$$

$$h = \frac{(۲۰/۳۶)(۰/۶۳)}{۰/۰۲} = ۶۴۲ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2.^\circ\mathrm{C}}$$

پس، انتقال گرما برابر است با:

$$\frac{q}{L} = h \pi d (T_w - T_\infty)$$

$$= (۶۴۲) \pi (۰/۰۲)(۳۸ - ۲۷) = ۴۴۳ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

مثال ۷-۴ انتقال گرما از سیم ظریف در هوا

از سیم ظریفی به قطر ۰/۰۲ mm جریان برق عبور کرده، دمای ثابت آن ۵۴°C می‌شود. سیم را در معرض هوایی به فشار ۱ atm و دمای ۰°C قرار می‌دهیم. توان لازم را برای آنکه دمای سیم ثابت بماند، به شرطی که طول آن ۵۰ cm باشد، حساب کنید.

حل :

دمای فیلم $T_f = \frac{(۵۴ + ۰)}{۲} = ۲۷^\circ\mathrm{C} = ۳۰۰\ \mathrm{K}$ است و در نتیجه، خواص عبارتند از:

$$\beta = \frac{۱}{۳۰۰} = ۰/۰۰۳۳۳ \qquad \nu = ۱۵/۶۹ \times ۱۰^{-۶} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

$$k = ۰/۰۲۶۲۴ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}.^\circ\mathrm{C}} \qquad \mathrm{Pr} = ۰/۷۰۸$$

سپس، حاصل‌ضرب Gr Pr این‌طور حساب می‌شود:

$$\mathrm{Gr\ Pr} = \frac{(۹/۸)(۰/۰۰۳۳۳)(۵۴ - ۰)(۰/۰۲ \times ۱۰^{-۳})^3}{(۱۵/۶۹ \times ۱۰^{-۶})^2}\ (۰/۷۰۸)$$

$$= ۴/۰۵ \times ۱۰^{-۵}$$

از جدول ۷-۱ داریم $C = ۰/۶۷۵$ و $m = ۰/۰۵۸$، بنابراین:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = (۰/۶۷۵)(۴/۰۵ \times ۱۰^{-۵})^{۰/۰۵۸} = ۰/۳۷۵$$

و:

$$\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}}\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{(۰/۳۷۵)(۰/۰۲۶۲۴)}{۰/۰۲\times۱۰^{-۳}} = ۴۹۲/۶\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{۲}.^{\circ}\mathrm{C}}$$

لذا، انتقال گرما و یا توان لازم برابر است با:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (۴۹۲/۶)\pi(۰/۰۲\times۱۰^{-۳})(۰/۵)(۵۴ - ۰)$$
$$= ۰/۸۳۶\ \mathrm{W}$$

مثال ۷-۵ لوله افقی گرمادیده در هوا

دمای لولهٔ افقی به قطر ۱ ft(۰/۳۰۴۸ m) در اتاقی با هوای ۱۵°C برابر ۲۵۰°C می‌باشد. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد متر طول لوله را حساب کنید.

حل :

نخست حاصل‌ضرب عدد گراشف- پراندل را تعیین و آن‌گاه ثابت‌های مناسب را از جدول ۷-۱ برای استفاده در معادلهٔ (۷-۲۵) انتخاب می‌کنیم. خواص فیزیکی هوا در دمای فیلم ارزیابی می‌شود:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{۲} = \frac{۲۵۰ + ۱۵}{۲} = ۱۳۲/۵^{\circ}\mathrm{C} = ۴۰۵/۵\ \mathrm{K}$$

$$k = ۰/۰۳۴۰۶\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}.^{\circ}\mathrm{C}} \qquad \beta = \frac{۱}{T_f} = \frac{۱}{۴۰۵/۵} = ۲/۴۷\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{K}^{-۱}$$

$$\nu = ۲۶/۵۴\times۱۰^{-۶}\ \frac{\mathrm{m}^{۲}}{\mathrm{s}} \qquad \mathrm{Pr} = ۰/۶۸۷$$

$$\mathrm{Gr}_d\,\mathrm{Pr} = \frac{g\,\beta(T_w - T_\infty)\,d^{۳}}{\nu^{۲}}\,\mathrm{Pr}$$
$$= \frac{(۹/۸)(۲/۴۷\times۱۰^{-۳})(۲۵۰ - ۱۵)(۰/۳۰۴۸)^{۳}(۰/۶۸۷)}{(۲۶/۵۴\times۱۰^{-۶})^{۲}}$$
$$= ۱/۵۷۱\times۱۰^{۸}$$

از جدول ۷-۱ داریم، $C = ۰/۵۳$ و $m = \frac{۱}{۴}$. پس:

$$\mathrm{Nu}_d = ۰/۵۳(\mathrm{Gr}_d\,\mathrm{Pr})^{\frac{۱}{۴}} = (۰/۵۳)(۱/۵۷۱\times۱۰^{۸})^{\frac{۱}{۴}} = ۵۹/۴$$

$$h = \frac{k\,\mathrm{Nu}_d}{d} = \frac{(۰/۰۳۴۰۶)(۵۹/۴)}{۰/۳۰۴۸} = ۶/۶۳\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{۲}.^{\circ}\mathrm{C}}$$
$$\left[۱/۱۷۵\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^{۲}.^{\circ}\mathrm{F}}\right]$$

سپس انتقال گرمای واحد طول از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_w - T_\infty) = ۶/۶۳\pi\,(۰/۳۰۴۸)(۲۵۰ - ۱۵)$$
$$= ۱/۴۹\ \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}}\left[۱۵۶۰\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}}\right]$$

راه دیگر آن بود که از عبارت پیچیده‌تر، معادلهٔ (۷-۳۶)، برای حل مسأله استفاده کنیم و نتیجتاً عدد نوسلت برابر می‌شد با:

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۶۰ + ۰/۳۸۷\left\{\frac{۱/۵۷۱\times۱۰^{۸}}{\left[۱ + \left(\frac{۰/۵۵۹}{۰/۶۸۷}\right)^{\frac{۹}{۱۶}}\right]^{\frac{۱۶}{۹}}}\right\}^{\frac{۱}{۶}}$$
$$\mathrm{Nu} = ۶۴/۷$$

که حدود ۸ درصد بیش‌تر از مقدار قبلی است.

❑ ۷-۶ جابه‌جایی آزاد از صفحات افقی

سطوح هم‌دما

ضریب انتقال گرمای متوسط سطوح تخت افقی از معادله (۷-۲۵) و ثابت‌های جدول ۷-۱ حساب می‌شود. بعد مشخصه L در این روابط، معمولاً [۴]، طول یک ضلع برای مربع، متوسط دوبعد برای سطح مستطیلی و d ۰/۹ برای صفحه گرد است. از مراجع ۵۲ و ۵۳ مشخص می‌شود که اگر بعد مشخصه به صورت زیر محاسبه شود، سازگاری با داده‌های تجربی بهتر خواهد بود:

$$L = \frac{A}{P} \qquad (۳۹-۷)$$

که A مساحت و P محیط سطح است. این بعد مشخصه را در سطوح تخت افقی نامتقارن می‌توان به کار برد.

شارگرمایی ثابت

روابط زیر از آزمایشات مرجع ۴۴ برای شارگرمایی ثابت روی سطح افقی به‌دست آمده است. برای سطح گرم شده روبه بالا:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = ۰/۱۳\,(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{\frac{۱}{۳}} \quad \text{برای} \quad \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < ۲\times۱۰^{۸} \qquad (۴۰-۷)$$

و

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = ۰/۱۶\,(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{\frac{۱}{۳}} \quad \text{برای} \quad ۲\times۱۰^{۸} < \mathrm{Gr}_L\mathrm{Pr} < ۱۰^{۱۱} \qquad (۴۱-۷)$$

برای سطح گرم شده روبه پایین:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = ۰/۵۸\,(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{\frac{۱}{۵}} \quad \text{برای} \quad ۱۰^{۶} < \mathrm{Gr}_L\mathrm{Pr} < ۱۰^{۱۱} \qquad (۴۲-۷)$$

تمام خواص فیزیکی در این معاملات به‌جز β در دمای T_e ارزیابی می‌شود که چنین تعریف شده است:

$$T_e = T_w - ۰/۲۵(T_w - T_\infty)$$

و T_w دمای **متوسط** دیواره است که مثل قبل با رابطه زیر با شار گرمایی هم‌بستگی دارد:

$$\bar{h} = \frac{q_w}{T_w - T_\infty}$$

عدد نوسلت مثل قبل برابر است با:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{q_w\,L}{(T_w - T_\infty)\,k}$$

بخش ۷-۷ در مورد بسط این معادلات به سطوح شیب‌دار بحث می‌کند.

اجسام نامنظم

رابطه‌ای کلی وجود ندارد که بتوان از آن برای اجسام نامنظم استفاده کرد. نتایج مرجع ۷۷ نشان می‌دهد که می‌توان از معادلهٔ (۷-۲۵) با $C = ۰/۷۷۵$ و $m = ۰/۲۰۸$ برای استوانه عمودی به ارتفاع برابر با قطر استفاده کرد. اعداد نوسلت و گراشف با استفاده از قطر، به عنوان

طول مشخصه، حساب می‌شوند. لینهارد Lienhard [۷۸] رابطه‌ای را ارائه می‌دهد که طول مشخصه آن برابر مسافتی است که ذرهٔ سیالی در لایه مرزی می‌پیماید و از $C = ۰/۵۲$ و $m = \frac{۱}{۴}$ در معادلهٔ (۷-۲۵)، در محدودهٔ آزاد، استفاده می‌کند. چنان‌چه اطلاعات خاصی در زمینه شکل هندسی وجود نداشته باشد می‌توان از این رابطه برای تخمین ضریب انتقال گرما استفاده کرد. در مرجع ۸۱ اجسام با نسبت سیمای واحد به طور گسترده مطالعه شده است.

مثال ۷-۶ خنک شدن مکعب در هوا

دمای مکعبی به ضلع ۲۰ cm برابر ۶۰°C است و در معرض هوای جو به دمای ۲۰°C قرار می‌گیرد. انتقال گرما را حساب کنید.

حل :

این جسمی نامنظم است و در نتیجه، از اطلاعات انتهای جدول ۷-۱ بدون رابطه‌ای خاص برای این شکل استفاده می‌کنیم. خواص فیزیکی در تمرین ۷-۲ چنین ارزیابی شده‌اند:

$$\beta = ۳/۲۵\times۱۰^{-۳} \qquad k = ۰/۰۲۶۸۵$$

$$\nu = ۱۷/۴۷\times۱۰^{-۶} \qquad \mathrm{Pr} = ۰/۷$$

طول مشخصه مسافتی است که ذره‌ای در لایه مرزی می‌پیماید و برابر $\frac{L}{۲}$ در طول کف به اضافه L در طول وجه جانبی به اضافه $\frac{L}{۲}$ روی سطح بالایی و یا $۲L = ۴۰\ \mathrm{cm}$، است. لذا حاصل‌ضرب Gr Pr برابر است با:

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} = \frac{(۹/۸)(۳/۲۵\times۱۰^{-۳})(۶۰ - ۱۰)(۰/۴)^{۳}}{(۱۷/۴۷\times۱۰^{-۶})^{۲}}\,(۰/۷) = ۳/۳۴\times۱۰^{۸}$$

از انتهای جدول ۷-۱ مقادیر $C = ۰/۵۲$ و $n = \frac{۱}{۴}$ را برداشت و عدد نوسلت را چنین حساب می‌کنیم:

$$\mathrm{Nu} = (۰/۵۲)(۳/۳۴\times۱۰^{۸})^{\frac{۱}{۴}} = ۱۳۵/۲$$

و

$$\bar{h} = \mathrm{Nu}\,\frac{k}{L} = \frac{(۱۳۵/۲)(۰/۰۲۶۸۵)}{(۰/۴)} = ۹/۰۷\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{۲}.^{\circ}\mathrm{C}}$$

مکعب شش وجه دارد پس مساحت کل $۶(۰/۲)^{۲} = ۰/۲۴ m^{۲}$ است و انتقال گرما برابر است با:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (۹/۰۷)(۰/۲۴)(۶۰ - ۱۰) = ۱۰۸/۸\ W$$

❑ ۷-۷ جابه‌جایی آزاد از سطوح شیب‌دار

فوجی Fujii و ایمورا Imura [۴۴] آزمایش‌های بسیاری روی صفحات گرم شده در آب در زوایای شیب مختلف انجام داده‌اند. زاویه صفحه عمود را با θ نشان می‌دهند، زوایای مثبت نشان دهنده این است که سطح گرم‌کن طبق شکل ۷-۹ رو به پایین است در صفحه شیب‌دار رو به پایین که شار گرمایی آن تقریباً ثابت است

رابطهٔ زیر برای محاسبه عدد نوسلت متوسط به‌دست آمده است:

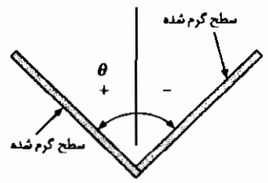
$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = ۰/۵۶\,(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta)^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\theta < ۸۸^{\circ}; \quad ۱۰^{۵} < \mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta < ۱۰^{۱۱} \qquad (۴۳-۷)$$

کلیه خواص منهای β در معادله (۷-۴۳) در دمای مرجع T_e ارزیابی شده‌اند که چنین تعریف می‌شود:

$$T_e = T_w - ۰/۲۵\,(T_w - T_\infty) \qquad (۴۴-۷)$$

که T_w دمای دیوارهٔ **متوسط** و T_∞ دمای جریان آزاد است؛ β در دمای $T_\infty + ۰/۵۰(T_w - T_\infty)$ ارزیابی می‌شود. برای اکثر صفحات افقی رو به پایین یعنی $۸۸^{\circ} < \theta < ۹۰^{\circ}$ رابطهٔ دیگری به‌دست آمده است:



شکل ۷-۹ دستگاه مختصات برای صفحات شیب‌دار.

$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = ۰/۵۸\,(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e)^{\frac{۱}{۵}} \qquad ۱۰^{۶} < \mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e < ۱۰^{۱۱} \qquad (۴۵-۷)$$

روابط تجربی برای صفحه شیب‌دار با سطح گرم شده رو به بالا پیچیده‌تر می‌شود. برای زوایای بین ۱۵- و ۷۵°- رابطهٔ مناسب به ازای $۱۰^{۵} < \mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta < ۱۰^{۱۱}$ عبارت است از:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = ۰/۱۴[(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e)^{\frac{۱}{۴}} - (\mathrm{Gr}_c\,\mathrm{Pr}_e)^{\frac{۱}{۴}}]$$
$$+ ۰/۵۶(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e\cos\theta)^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۴۶-۷)$$

کمیت Gr_c یک بستگی گراشف بحرانی است و زمانی را نشان می‌دهد که عدد نوسلت شروع به جداشدن از معادلهٔ آرام (۷-۴۳) می‌کند و در جدول زیر ارائه می‌شود:

Gr_e	θ، درجه
۵×۱۰^{۹}	-۱۵
۲×۱۰^{۹}	-۳۰
$۱۰^{۸}$	-۶۰
$۱۰^{۶}$	-۷۵

نخستین جملهٔ معادله (۷-۴۶) به ازای $\mathrm{Gr}_e < \mathrm{Gr}_c$ حذف می‌شود. اطلاعات بیش‌تری توسط ولیت Vliet [۳۹] و پرا Pera و گبهارت [۴۵] ارائه شده‌اند. واضح است که روابط فوق را می‌توان برای سطوح دماثابت نیز به‌کار برد.

اندازه‌گیری‌های تجربی در مورد هوا روی سطوح شار گرمایی ثابت [۵۱] نشان داده‌اند که می‌توان معادلهٔ (۷-۳۱) را برای نواحی آرام به‌کار برد به‌شرطی که هم برای سطوح گرمادیده رو به بالا، هم برای سطوح روبه پایین به جای $Gr_x^* \cos\theta$ مقدار Gr_x^* را قرار دهیم. رابطه تجربی زیر در ناحیه ناآرام، برای هوا، به‌دست آمده است:

$$Nu_x = 0/17(Gr_x^* Pr)^{1/4} \quad 10^{10} < Gr_x^* Pr < 10^{15} \qquad (۴۷-۷)$$

که وقتی صفحه گرمادیده روبه بالا باشد Gr_x^* آن با Gr_x^* صفحه عمودی یکی است. وقتی سطح گرمادیده روبه پایین است به جای Gr_x^* مقدار $Gr^* \cos^2\theta$ قرار داده‌می‌شود. معادلهٔ (۷-۴۷) برای صفحه عمودی هم‌دما تقریباً به رابطه‌ای که در جدول ۷-۱ توصیه شده تبدیل می‌شود.

اطلاعات مرجع ۷۳ درمورد استوانه‌های شیب‌دار نشان می‌دهد که انتقال گرمای آرام در شرایط شار گرمایی ثابت را می‌توان از رابطهٔ زیر حساب کرد:

$$Nu_L = [0/60 - 0/488(\sin\theta)^{1/2}](Gr_L Pr)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{17}(\sin\theta)^{1/75}} \qquad (۴۸-۷)$$

برای $Gr_L Pr < 2 \times 10^8$

که θ زاویه استوانه با عمود است؛ یعنی درجهٔ صفر به استوانه قائم مربوط می‌شود. خواص در دمای فیلم ارزیابی می‌شود. به غیر از βکه در شرایط محیط ارزیابی می‌شود.

هنوز عدم اطمینان‌هایی در پیش‌بینی جابه‌جایی آزاد از سطوح شیب‌دار وجود دارد و اگر نتایج حاصل از روابط تجربی فوق با داده‌های آزمایشی به اندازه ۲۰± درصد تفاوت داشته باشد، غیر عادی نیست.

❑ ۷-۸ سیالات غیر نیوتنی

وقتی رابطهٔ لزجت برشی - تنش سیالات از معادلهٔ نیوتنی سادهٔ (۵-۱) پیروی نکند، معادلات فوق برای انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد به‌کار نمی‌رود. پلیمرهای بسیار لزج و مواد روغن‌کاری نمونه‌هایی از سیالات با رفتار غیر نیوتنی‌اند. در مورد این سیالات مطالعات تحلیلی و تجربی موفقیت آمیزی انجام شده اما نتایج حاصل خیلی پیچیده است. خواننده علاقه‌مند برای کسب اطلاع کامل در این زمینه باید مراجع ۴۸ تا ۵۰ را ببیند.

❑ ۷-۹ معادلات ساده شده برای هوا

معادلات ساده شده برای به‌دست آوردن ضریب انتقال گرما از سطوح مختلف به هوا به فشار جو و دماهای متعادل، در جدول ۷-۲ داده شده‌اند. این روابط را می‌توان با ضرب در ضرایب زیر برای فشارهای بالاتر یا پایین‌تر گسترش داد:

برای حالات آرام $\left(\frac{p}{101/32}\right)^{\frac{1}{2}}$

برای حالات نا آرام $\left(\frac{p}{101/32}\right)^{2}$

☑**جدول ۷-۲** معادلات ساده برای جابه‌جایی آزاد از سطوح مختلف به هوا در فشار جو، انتخاب شده از جدول ۷-۱

سطح	آرام $10^4 < Gr_f Pr_f < 10^9$	ناآرام $Gr_f Pr_f > 10^9$
صفحه یا استوانه عمودی	$h = 1/42\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$	$h = 1/31(\Delta T)^{\frac{1}{3}}$
استوانه افقی	$h = 1/32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$	$h = 1/24(\Delta T)^{\frac{1}{3}}$
صفحه افقی: صفحه گرم شده روبه بالا یا صفحه سرد شده رو به پایین	$h = 1/32\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$	$h = 1/52(\Delta T)^{\frac{1}{3}}$
صفحه گرم شده روبه پایین یا صفحه سرد شده رو به بالا	$h = 0/59\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$	

که h = ضریب انتقال گرما، $\frac{W}{m^2 \cdot °C}$

$\Delta T = T_w - T_\infty$، °C

L = بعد عمودی یا افقی، m

d = قطر، m

که pفشار به کیلو پاسکال است. در استفاده از این روابط ساده شده باید احتیاط کرد زیرا صرفاً تقریبی از معادلات دقیق‌تر قبلی هستند.

خواننده متوجه هست که برای استفاده از جدول ۷-۲ لازم است حاصل ضرب عدد گراشف - پراندل را داشته باشیم و این ممکن است بی‌اثر کننده خودش باشد زیرا به محاسبهٔ دیگری نیاز است. اما با کمی تجربه محدودهٔ Gr Pr مورد انتظار در وضعیت‌های فیزیکی - هندسی مختلف را پیدا می‌کنیم و از این‌رو، روابط ساده شده می‌توانند به حل سریع مسأله منجر شوند. همان‌گونه که گفتیم این روابط جانشینی برای روابط جامع‌تر نیستند.

مثال ۷-۷ محاسبه با روابط ساده شده

انتقال گرما را برای شرایط مثال ۷-۵ با استفاده از روابط ساده شده جدول ۷-۲ حساب کنید.

حل :

در مثال ۷-۵ دریافتیم که لوله‌ای نسبتاً بلند با اختلاف دمای زیاد بین سطح و هوا باز هم دارای حاصل‌ضرب Gr Pr برابر $1/57 \times 10^8$ است و از این‌رو

معادله آرامی از جدول ۷-۲ انتخاب شد. ضریب انتقال گرما چنین حساب می‌شود:

$$h = 1/32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{\frac{1}{4}} = 1/32\left(\frac{250 - 15}{0/3048}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 6/96 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$$

بنابراین انتقال گرما برابر است با:

$$\frac{q}{L} = (6/96)\pi(0/3048)(250 - 15) = 1/57 \frac{kW}{m}$$

توجه داشته باشید که مقدار حاصل از رابطه ساده شده تقریباً ۴ درصد بیش‌تر از مقدار معادلهٔ (۷-۲۵) است.

❑ ۷-۱۰ جابه‌جایی آزاد از کره‌ها

یوج Yuge [۵] رابطه تجربی زیر را برای انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از کره‌ها به هوا پیشنهاد می‌کند:

$$Nu_f = \frac{\bar{h} d}{k_f} = 2 + 0/392\, Gr_f^{\frac{1}{4}} \quad \text{برای } 1 < Gr_f < 10^5 \qquad (۴۹-۷)$$

این معادله را می‌توان با داخل کردن عدد پراندل چنین پیراست:

$$Nu_f = 2 + 0/43(Gr_f Pr_f)^{\frac{1}{4}} \qquad (۵۰-۷)$$

خواص در دمای فیلم ارزیابی شده، گمان می‌رود که این رابطه عمدتاً در محاسبات جابه‌جایی آزاد در گازها کاربرد دارد. اما در صورت عدم وجود اطلاعات خاص بیش‌تر، می‌توان از آن برای مایعات نیز استفاده کرد.توجه کنید که عدد نوسلت به ازای مقادیر خیلی کوچک حاصل‌ضرب اعداد گراشف - پراندل به مقدار ۲/۰ نزدیک می‌شود واین مقداری است که برای هدایت خالص در سیال خیلی ساکن در اطراف کره به‌دست می‌آید و آن را از جدول ۳-۱ به‌دست آوردیم.

آزمایش‌های آماتو Amato و تین Tien [۷۹] با آب به ازای اعداد ریلی بالاتر، رابطه زیر را به‌دست می‌دهد:

$$Nu_f = 2 + 0/50(Gr_f Pr_f)^{\frac{1}{4}} \qquad (۵۱-۷)$$

برای $3 \times 10^5 < Gr\, Pr < 8 \times 10^8$

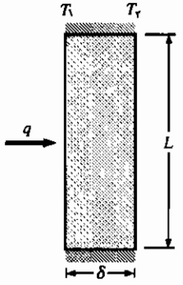
چرچیل [۸۳] رابطهٔ عمومی‌تری برای کره‌ها پیشنهاد می‌کند که برای محدوده وسیع‌تری از اعداد ریلای کاربرد دارد:

$$Nu = 2 + \frac{0/589\, Ra_d^{\frac{1}{4}}}{\left[1 + \left(\frac{0/469}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{4}{9}}} \qquad (۵۲-۷)$$

به ازای $Ra_d < 10^{11}$ و $Pr > 0/5$

❑ ۷-۱۱ جابه‌جایی آزاد در فضاهای بسته

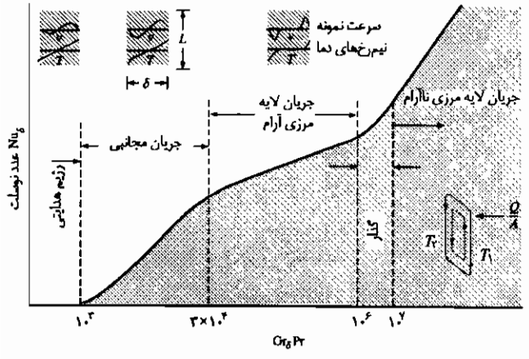
پدیده‌های جریان جابه‌جایی آزاد در فضای بسته مثال‌های جالبی از سیستم‌های سیال خیلی پیچیده‌اند که ممکن است راه حل‌های تحلیلی، تجربی و عددی داشته باشند.سیستم شکل ۷-۱۰ را در نظر بگیرید که سیال بین دو صفحه عمودی به فاصلهٔ δ محصور شده است.



شکل ۷-۱۰ نام‌گذاری برای جابه‌جایی آزاد در فضاهای عمودی محصور.

وقتی اختلاف دمای $\Delta T_w = T_1 - T_2$ روی سیال اعمال شود، طبق نظر مک گریگور و اِمِری [۱۸] در نواحی جریان تقریبی شکل ۷-۱۱، انتقال گرمایی به‌وجود می‌آید. در این شکل، عدد گراشف چنین حساب می‌شود:

$$Gr_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2} \qquad (۵۳-۷)$$



شکل ۷-۱۱ نمودار طرح‌واره و رژیم‌های جریان لایه جابه‌جایی عمودی، طبق مرجع ۱۸ .

به ازای اعداد گراشف خیلی پایین، جریان‌های خیلی ظریف جابه‌جایی آزاد وجود داشته، انتقال گرما عمدتاً به‌صورت هدایت در عرض لایه سیال صورت می‌گیرد. وقتی عدد گراشف بیش‌تر می‌شود طبق شکل بارژیم‌های جریان متفاوتی روبه‌رو می‌شویم و انتقال گرما همان‌طور که عدد نوسلت نشان می‌دهد پیوسته افزایش می‌یابد:

$$Nu_\delta = \frac{h\delta}{k}$$

گرچه هنوز بعضی سئوالات، بی‌جواب می‌ماند ولی می‌توان از تجربیات مرجع ۱۸ برای پیش‌بینی انتقال گرما در تعدادی از مایعات تحت شرایط شار گرمایی ثابت استفاده کرد. روابط تجربی حاصله عبارتند از:

(۵۴-۷) ثابت = q_w

$$\mathrm{Nu}_\delta = ۰/۴۲(\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr})^{\frac{۱}{۴}}\ \mathrm{Pr}^{۰/۰۱۲}\left(\frac{L}{\delta}\right)^{-۰/۳۰}$$

$$۱۰^۴ < \mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr} < ۱۰^۷$$
$$۱ < \mathrm{Pr} < ۲۰,۰۰۰$$
$$۱۰ < \frac{L}{\delta} < ۴۰$$

(۵۵-۷) ثابت = q_w

$$\mathrm{Nu}_\delta = ۰/۰۴۶\ (\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr})^{\frac{۱}{۴}}$$

$$۱۰^۶ < \mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr} < ۱۰^۹$$
$$۱ < \mathrm{Pr} < ۲۰$$
$$۱ < \frac{L}{\delta} < ۴۰$$

شار گرمایی چنین حساب می‌شود:

$$\frac{q}{A} = q_w = h(T_۱ - T_۲) = \mathrm{Nu}_\delta \frac{k}{\delta}(T_۱ - T_۲) \qquad (۵۶-۷)$$

گاه نتایج برحسب ضریب هدایت گرمایی ظاهری یا مؤثر k_e بیان می‌شود که چنین تعریف می‌شود.

$$\frac{q}{A} = k_e \frac{T_۱ - T_۲}{\delta} \qquad (۵۷-۷)$$

با مقایسه معادله (۵۶-۷) و (۵۷-۷) ملاحظه می‌کنیم که:

$$\mathrm{Nu}_\delta \equiv \frac{k_e}{k} \qquad (۵۸-۷)$$

گاهی انتقال گرما در عرض شکاف هوا را در صنعت برحسب مقدار R (ر.ک. به بخش ۲-۳) بیان می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta T}{R}$$

مقدار R با توجه به روابط فوق برابر است با:

$$R = \frac{\delta}{k_e} \qquad (۵۹-۷)$$

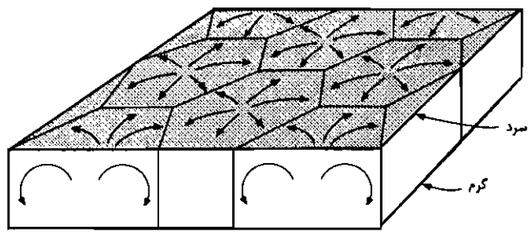
انتقال گرما در فضاهای بسته افقی دو حالت دارد. اگر دمای صفحهٔ بالایی بیش‌تر از دمای صفحه پایینی باشد سیال باچگالی بیش‌تر قرار می‌گیرد و جریان‌های جابه‌جایی به‌وجود نمی‌آید. در این حالت انتقال گرما در عرض فضای مزبور صرفاً هدایتی است و $\mathrm{Nu}_\delta = ۱/۰$ که δ باز هم فاصلهٔ بین دو صفحه است. حالت دوم و جالب‌تر وقتی است که دمای صفحه پایینی بیش‌تر از صفحه بالایی باشد. به ازای مقادیر Gr_δ کم‌تر از حدود ۱۷۰۰، باز هم هدایت خالص مشاهده شده و $\mathrm{Nu}_\delta = ۱/۰$ است. وقتی جابه‌جایی شروع شود زمینه‌ای از سلول‌های شش‌ضلعی مطابق شکل ۷-۱۲ تشکیل می‌شود. این زمینه‌ها به سلول‌های برنارد Bernard [۳۳] مشهورند.

ناآرامی در حدود $\mathrm{Gr}_\delta = ۵۰۰۰۰$ شروع شده، زمینه سلولی را از بین می‌برد.

دروپکین Dropkin و سامرسکیلز somerscales جابه‌جایی آزاد در فضاهای بستهٔ شیب‌دار را بحث کرده‌اند [۱۲]. اوانز Evans و استفانی Stefany [۹] نشان داده‌اند که گرمایش یا سرمایش جابه‌جایی طبیعی گذرا در فضاهای استوانه‌ای افقی یاعمودی بسته را می‌توان با فرمول زیر، برای محدوده $۰/۷۵ < \frac{L}{d} < ۲/۰$ حساب کرد:

$$\mathrm{Nu}_f = ۰/۵۵(\mathrm{Gr}_f\ \mathrm{Pr}_f)^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۶۰-۷)$$

عدد گراشف بر اساس ارتفاع استوانه L تشکیل می‌شود.



شکل ۷-۱۲ زمینه سلول - برنارد در لایه سیال محصور که از زیر گرم می‌شود، از مرجع ۳۳.

تحلیل و تجربیات مرجع ۴۳ نشان می‌دهد که می‌توان ضریب هدایت گرمایی مؤثر برای سیالات بین کره‌های هم‌مرکز را از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\frac{k_e}{k} = ۰/۲۲۸(\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr})^{۰/۲۲۶} \qquad (۶۱-۷)$$

که در اینجا فاصلهٔ شکاف $\delta = r_۰ - r_i$ است. ضریب هدایت گرمایی مؤثر حاصل از معادله (۶۱-۷) را باید با رابطهٔ قراردادی هدایت حالت پایدار پوسته کروی به‌کار برد:

$$q = \frac{۴\pi\, ke\, r_i\, r_۰\, \Delta T}{r_۰ - r_i} \qquad (۶۲-۷)$$

معادلهٔ (۶۱-۷) برای $۰/۲۵ \le \frac{\delta}{r_i} \le ۱/۵$ معتبر بوده و:

$$۱/۲\times۱۰^۲ < \mathrm{Gr}\ \mathrm{Pr} < ۱/۱\times۱۰^۹ \qquad ۰/۷ < \mathrm{Pr} < ۴۱۵۰$$

خواص در دمای متوسط حجمی T_m ارزیابی می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_m = \frac{(\xi_۰^۳ - r_i^۳)\,T_i + (\xi^۳ - \xi_۰^۳)\,T_۰}{\xi^۳ - r_i^۳} \qquad (۶۳-۷)$$

که $r_m = \frac{r_i + r_۰}{۲}$ است. می‌توان معادله (۶۱-۷) را با تبدیل مختصاتی که در مرجع ۴۳ توضیح داده شده‌اند در مورد کره‌های غیر هم‌مرکز، نیز به‌کار برد.

نتایج تجربی برای جابه‌جایی آزاد در فضاهای بسته همیشه با هم تطابق ندارد ولی می‌توان آنها را به شکل عمومی زیر بیان کرد:

$$\frac{k_e}{k} = C\,(\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr})^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^m \qquad (۶۴-۷)$$

جدول ۷-۳ مقادیر ثابت C، n و m را برای تعدادی از حالات فیزیکی ارائه می‌کند. این مقادیر را می‌توان در غیاب داده‌های خاص در مورد شکل یا سیال مورد مطالعه، در طراحی به‌کار برد. یادآور می‌شویم که بعضی از رابطه‌های جدول ۷-۳ توسط هولمن [۷۴] به طور مصنوعی تنظیم شده‌اند تا نماهای مشخصه $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ را برای رژیم‌های ناآرام جابه‌جایی آزاد ایجاد کنند. گرچه به‌نظر می‌رسد که خطای حاصل از این تنظیم خیلی بیش‌تر از عدم تطابق بین نتایج حاصل از بررسی‌های تجربی مختلف نباشد. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای شرح بیش‌تر مراجع خاص را ببیند.

انتقال گرما در فضای حلقوی از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$q = \frac{۲\pi\, k_e\, L\, \Delta T}{In\left(\frac{r_۰}{r_i}\right)} \qquad (۶۵-۷)$$

که L طول حلقه و $\delta = r_o - r_i$ فاصله است.

وارینگتون Warrington و پوو [۸۰] روابط بسیاری برای جابه‌جایی آزاد بین اجسام استوانه‌ای، مکعبی و کروی با فضاهای بستهٔ مختلف ارائه کرده‌اند. این روابط محدودهٔ وسیعی از سیالات را در برمی‌گیرد.

جابه‌جایی آزاد سیالات غیرنیوتنی در لایه‌های تخت عمودی در مرجع ۳۸ مورد بحث قرار گرفته است ولی نتایج حاصله خیلی پیچیده‌اند و از ذکر آنها در اینجا خودداری می‌کنیم. بدون اطلاعات طرح خاص بیش‌تر می‌توان انتقال گرمای فضاهای بسته شیب‌دار را با جای‌گزینی g' با g در عدد گراشف حساب کرد که:

$$g' = g\cos\theta \qquad (۶۶-۷)$$

و θ زاویه سطح گرم‌کن با افق است. می‌توان انتظار داشت که این تبدیل تا زاویهٔ ۶۰° خوب باشد و **فقط** برای مواردی به‌کار می‌رود که سطح گرم‌تر رو به بالاست. هلندز Hollands و سایرین [۸۲ و ۶۹ و ۶۷ و ۶۶] اطلاعات بیش‌تری در این‌زمینه ارائه کرده‌اند.

مقدار R تابش برای شکاف

همان‌طور که در انتقال گرمای هدایتی دیدیم، شرایط مرزی تابشی می‌توانند نقش مهمی در کل مسأله انتقال گرما داشته باشند. مخصوصاً در وضعیت‌های جابه‌جایی آزاد، زیرا آهنگ انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد پایین است. در بخش ۸-۷، معادله ۸-۴۲، نشان می‌دهیم که انتقال گرما در عرض شکاف بین دو صفحهٔ موازی بزرگ را می‌توان با رابطهٔ زیر حساب کرد:

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_۱^۴ - T_۲^۴)}{\frac{۱}{\varepsilon_۱} + \frac{۱}{\varepsilon_۲} - ۱} \qquad (۶۷-۷)$$

که دماها به درجه کلوین و εها ضرایب گسیل سطوح‌اند. با استفاده از مفهوم مقدار R که در بخش ۲-۳ بحث شد، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{rad} = \frac{\Delta T}{R_{rad}}$$

پس می‌توان مقدار R را برای انتقال گرمای تابشی همراه با معادلهٔ (۶۷-۷) تعیین کرد. آن مقدار خیلی وابسته به دماست و به موازات مقدار R مربوط به جابه‌جایی در عرض فضا که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید، عمل می‌کند:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{conv} = \frac{k_e\,\Delta T}{\delta} = \frac{\Delta T}{R_{conv}}$$

پس :

$$R_{conv} = \frac{\delta}{k_e}$$

مقدار R کل برای تابش و جابه‌جایی ترکیبی در عرض فضا را می‌توان چنین نوشت:

$$R_{tot} = \frac{۱}{\frac{۱}{R_{rad}} + \frac{۱}{R_{conv}}}$$

مفهوم تابش و جابه‌جایی ترکیبی در فضاهای محصور، در ساختمان‌سازی اهمیت دارد.

مثال ۷-۸ انتقال گرما در عرض شکاف هوای عمودی

هوا با فشار جو بین دو صفحهٔ عمودی مربع شکل به ضلع ۰/۵ m جاگرفته است که به فاصله ۱۵ mm از هم قرار دارند. دمای صفحات به ترتیب ۱۰۰ و $۴۰^\circ C$ است. انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد را در عرض قسمت هوا حساب کنید. انتقال گرمای تابشی در عرض فضای هوا را نیز در صورتی حساب کنید که ضریب گسیل دو سطح $\varepsilon = ۰/۲$ باشد.

حل :

خواص این هوا را در دمای متوسط بین دو صفحه ارزیابی می‌کنیم:

$$T_f = \frac{۱۰۰ + ۴۰}{۲} = ۷۰^\circ C = ۳۴۳\ K$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{۱/۰۱۳۲\times۱۰^۵}{(۲۸۷)(۳۴۳)} = ۱/۰۲۹\ \frac{kg}{m^۳}$$

$$\beta = \frac{۱}{T_f} = \frac{۱}{۳۴۳} = ۲/۹۱۵\times۱۰^{-۳}\ K^{-۱}$$

$$\mu = ۲/۰۴۳\times۱۰^{-۵}\ \frac{Kg}{m.s} \qquad k = ۰/۰۲۹۵\ \frac{W}{m.^\circ C} \qquad Pr = ۰/۷$$

اکنون حاصل‌ضرب عدد گراشف - براندل را چنین حساب می‌کنیم:

$$\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr} = \frac{(۹/۸)(۱/۰۲۹)^۲(۲/۹۱۵\times۱۰^{-۳})(۱۰۰-۴۰)(۱۵\times۱۰^{-۳})^۳}{(۲/۰۴۳\times۱۰^{-۵})^۲}\ ۰/۷$$

$$= ۱/۰۲۷\times۱۰^۴$$

اکنون می‌توان از معادلهٔ (۶۷-۷) برای محاسبه ضریب هدایت گرمایی مؤثر به‌ازای $L = ۰/۵$ m و $\delta = ۰/۰۱۵$ m و ثابت‌های برداشته شده از جدول ۷-۳ استفاده کرد:

$$\frac{k_e}{k} = (۰/۱۹۷)(۱/۰۲۷\times۱۰^۴)^{\frac{۱}{۴}}\left(\frac{۰/۵}{۰/۰۱۵}\right)^{\frac{۱}{۹}} = ۱/۳۴۳$$

☑**جدول ۷-۳** خلاصه‌ای از روابط تجربی برای جابه‌جایی آزاد در محفظه‌ها، به شکل معادله (۷-۶۱). ثابت‌های همبستگی را هولمن [۷۴] تنظیم کرده است

شماره مرجع	m	n	C	$\frac{L}{\delta}$	Pr	Gr_δ Pr	شکل هندسی	سیال
۶, ۷, ۵۵, ۵۹					$\frac{k_e}{k}$=۱/۰	< ۲۰۰۰	صفحه عمودی،هم‌دما	گاز
	$-\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۴}$	۰/۱۹۷	۱۱–۴۲	۰/۵–۲	۶۰۰۰–۲۰۰, ۰۰۰		
	$-\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۰/۰۷۳	۱۱–۴۲	۰/۵–۲	۲۰۰,۰۰–۱/۱ × ۱۰^۷		
۶, ۷, ۵۵, ۵۹, ۶۲, ۶۳	۰	۰/۴	۰/۰۵۹	—	$\frac{k_e}{k}$ = ۱/۰	< ۱۷۰۰	صفحه افقی، هم‌دما، از	
					۰/۵–۲	۱۷۰۰–۷۰۰۰	زیر گرما داده‌شده.	
۶۶	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰/۲۱۲	—	۰/۵–۲	۷۰۰۰–۳/۲ × ۱۰^۵		
	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰/۰۶۱	—	۰/۵–۲	> ۳/۲ × ۱۰^۵		
۱۸, ۶۱	—	—	معادلهٔ (۷-۵۲)	۱۰–۴۰	$\frac{k_e}{k}$ = ۱/۰	< ۲۰۰۰	صفحه عمودی با شار	مایع
					۱–۲۰,۰۰۰	۱۰^۳–۱۰^۷	گرمایی ثابت یا هم‌دما	
	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰/۰۴۶	۱–۴۰	۱–۲۰	۱۰^۶–۱۰^۹		
۷, ۸, ۵۸, ۶۳, ۶۶				—	$\frac{k_e}{k}$ = ۱/۰	< ۱۷۰۰	صفحه افقی، هم‌دما و	
	۰	۰/۶	۰/۰۱۲	—	۱–۵۰۰۰	۱۷۰۰–۶۰۰۰	از زیر گرما داده شده	
	۰	۰/۲	۰/۳۷۵	—	۱–۵۰۰۰	۶۰۰۰–۳۷,۰۰۰		
	۰	۰/۳	۰/۱۳		۱–۲۰	۳۷,۰۰۰–۱۰^۸		
	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰/۰۵۷		۱–۲۰	> ۱۰^۸		
۵۶, ۵۷, ۶۰						منل صفحات‌عمودی	حلقوی عمودی	گاز یا مایع
	۰	۰/۲۹	۰/۱۱	—	۱–۵۰۰۰	۶۰۰۰–۱۰^۶	حلقوی افقی، هم‌دما	
	۰	۰/۲۰	۰/۴۰	—	۱–۵۰۰۰	۱۰^۶–۱۰^۸		
۴۳	۰	۰/۲۲۶	۰/۲۲۸	—	۰/۷–۴۰۰۰	۱۲۰–۱/۱ × ۱۰^۹	حلقوی کروی	

حالا می‌توان انتقال گرما را از معادله (۷-۵۴) حساب کرد. مساحت برابر است با $(۰/۵)^۲ = ۰/۲۵\ m^۲$ بنابراین:

$$q = \frac{(۱/۳۴۳)(۰/۰۲۹۵)(۰/۲۵)(۱۰۰ - ۴۰)}{۰/۰۱۵}$$

$$= ۳۹/۶۲\ W \qquad \left[۱۳۵/۲\ \frac{Btu}{h}\right]$$

شار گرمایی تابشی از معادله (۷-۶۷) با در نظر گرفتن $T_۱ = ۳۷۳\ K$، $T_۲ = ۳۱۳\ K$ و $\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ = ۰/۲$ حساب می‌شود. پس با $\sigma = ۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸}\ \frac{W}{m^۲.K^۴}$،

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{rad} = \frac{(۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(۳۷۳^۴ - ۳۱۳^۴)}{\left[\frac{۱}{۰/۲} + \frac{۱}{۰/۲} - ۱\right]} = ۶۱/۴۷\ \frac{W}{m^۲}$$

و:

$$q_{rad} = (۰/۵)^۲(۶۱/۴۷) = ۱۵/۳۷\ W$$

که حدود نصف مقدار انتقال جابه‌جایی در عرض فضاست. محاسبه بعدی نشان می‌دهد که به ازای مقادیر پایین‌تر $\varepsilon = ۰/۰۵$، انتقال تابشی به ۳/۵۵ W کاهش و برای مقدار بزرگ‌تر $\varepsilon = ۰/۸$، انتقال به ۹۲/۲ W افزایش می‌یابد. به هر حال، انتقال گرمای تابشی می‌تواند عامل مهمی در این چنین مسائلی باشد.

مثال ۷-۹ انتقال گرما در عرض شکاف هوای افقی

دو صفحه افقی مربعی به ضلع ۲۰ cm به فاصلهٔ ۱ cm از هم قرارگرفته و فضای بین آنها را هوای به فشار ۱ atm پر می‌کند. دمای صفحهٔ پایینی ۱۰۰°C و صفحه بالایی ۴۰°C است. انتقال گرما در فاصله هوایی را بیابید.

حل :

خواص همان‌هایی هستند که در مثال ۷-۸ داده شدند:

$$\rho = ۱/۰۲۹\ \frac{kg}{m^۳} \qquad \beta = ۲/۹۱۵ \times ۱۰^{-۳}\ K^{-۱}$$

$$\mu = ۲/۰۴۳ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{kg}{m.s} \qquad k = ۰/۰۲۹۵\ \frac{W}{m.^\circ C}$$

$$Pr = ۰/۷$$

حاصل‌ضرب گراشف بر مبنای فاصلهٔ جدایی صفحات محاسبه می‌شود و از این‌رو داریم:

$$Gr\ Pr = \frac{(۹/۸)(۱/۰۲۹)^۲(۲/۹۱۵ \times ۱۰^{-۳})(۱۰۰ - ۴۰)(۰/۰۱)^۳}{(۲/۰۴۳ \times ۱۰^{-۵})^۲}(۰/۷)$$

$$= ۳۰۴۳$$

با مراجعه به جدول ۷-۳ داریم $C = ۰/۰۵۹$ ، $n = ۰/۴$ و $m = ۰$ و در نتیجه:

$$\frac{k_e}{k} = (۰/۰۵۹)(۳۰۴۳)^{۰/۴}\left(\frac{۰/۲}{۰/۰۱}\right)^۰ = ۱/۴۶$$

و:

$$q = \frac{k_e A\ (T_۱ - T_۲)}{\delta} = \frac{(۱/۴۶۰)(۰/۰۲۹۵)(۰/۲)^۲(۱۰۰ - ۴۰)}{۰/۰۱}$$

$$= ۱۰/۳۴\ W$$

مثال ۷-۱۰ انتقال گرما در عرض لایهٔ آب

دو صفحه مربعی افقی به ضلع ۵۰ Cm به فاصله ۱Cm از هم قرارگرفته‌اند. دمای ثابت صفحهٔ پایینی ۱۰۰°F ودمای ثابت صفحهٔ بالایی ۸۰°F است. فضای بین دو صفحه را آب به فشار جو پر می‌کند. اتلاف گرما از صفحه پایینی را بیابید.

حل :

خواص را در دمای متوسط ۹۰°F حساب کرده، برای آب داریم:

$$k = ۰/۶۲۳\ \frac{W}{m.^\circ C} \qquad \frac{g\beta\rho^۲ c_p}{\mu k} = ۲/۴۸ \times ۱۰^{۱۰}$$

حال، حاصل‌ضرب عدد گراشف - پراندل را با استفاده از فاصله صفحات ۱ cm به عنوان بُعد مشخصه، حساب می‌کنیم:

$$Gr\ Pr = (۲/۴۸ \times ۱۰^{۱۰})(۰/۰۱)^۳(۱۰۰ - ۸۰)\frac{۵}{۹} = ۲/۷۶ \times ۱۰^۵$$

اکنون، با استفاده از معادلهٔ (۷-۶۴) و مراجعه به جدول ۷-۳ داریم:

$$C = ۰/۱۳ \qquad n = ۰/۳ \qquad m = ۰$$

پس معادلهٔ (۷-۶۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{k_e}{k} = (۰/۱۳)(۲/۷۶ \times ۱۰^۵)^{۰/۳} = ۵/۵۷$$

لذا، ضریب هدایت گرمایی مؤثر برابر است با:

$$k_e = (۰/۶۲۳)(۵/۵۷) = ۳/۴۷\ \frac{W}{m.^\circ C}$$

و انتقال گرما برابر است با:

$$q = \frac{k_e A\ \Delta T}{\delta} = \frac{(۳/۴۷)(۰/۵)^۲(۱۰۰-۸۰)\left(\frac{۵}{۹}\right)}{۰/۰۱} = ۹۶۴\ W$$

البته متوجه می‌شوید که انتقال گرما در عرض فضای پرآب خیلی بیش‌تر از فضای پر هوا است (مثال ۷-۹) زیرا ضریب هدایت گرمایی بیش‌تر است.

فضاهای تخلیه‌شده از هوا (چگالی پایین)

در معادلات ارائه شده برای جابه‌جایی آزاد در فضاها دیدیم که وقتی حاصل‌ضرب Gr_δ Pr خیلی کوچک است، معمولاً کم‌تر از حدود ۲۰۰۰، لایه سیال مثل وقتی عمل می‌کند که جابه‌جایی خالص وجود دارد و $\frac{k_e}{k} \to ۱/۰$. این بدان معنی است که سرعت‌های جریان جابه‌جایی آزاد پایین هستند. مقدار کوچک Gr_δ را می‌توان با پایین آوردن فشار (چگالی) سیال و یا کم‌کردن فاصلهٔ δ ایجاد کرد. اگر فشار گازی را خیلی پایین بیاوریم با وضعیتی به نام چگالی پایین روبه‌رو هستیم که مسیر آزاد متوسط ملکول‌ها و ضربه‌های ملکولی منفرد در آن وجود دارد.

در برخی از وضعیت‌های عملی، انتقال گرمای بین سطح جامد و گاز چگالی پایین وجود دارد. منظور از انتخاب واژه ***چگالی پایین*** آن حالاتی است که دیگر مسیر آزاد متوسط ملکول‌های گاز در مقایسه با بعد مشخصه سطح انتقال گرما کوچک نیست. ***مسیر آزاد متوسط*** λ مسافتی است که یک ملکول به‌طور متوسط بین تصادم‌ها طی می‌کند. هر چه این مسافت بزرگ‌تر باشد، فاصله‌ای که دمای سطح گرم برای مبادله با گاز در تماس با آن دارد بیش‌تر است و این بدان معنی است که لزوماً نمی‌توان فرض کرد که گاز بسیار نزدیک به سطح، همان دمایی را دارد که سطح گرمادیده؛ آن طوری که در تحلیل‌های لایه مرزی فرض می‌کردیم. روشن است که سنجه(پارامتر) مورد توجه اصلی ما نسبت مسیر آزاد متوسط به بعد مشخصه جسم است. این گروه را عدد نودسن می‌نامند:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \qquad (۶۸-۷)$$

مسیر آزاد متوسط را می‌توان مطابق نظریه جنبشی گازها از رابطهٔ زیر حساب کرد:

$$\lambda = \frac{۰/۷۰۷}{۴\pi r^۲ n} \qquad (۶۹-۷)$$

که r شعاع ملکولی مؤثر برای تصادم‌ها و n چگالی ملکولی است. رابطه‌ای تقریبی برای مسیر آزاد متوسط ملکول‌های هوا چنین است:

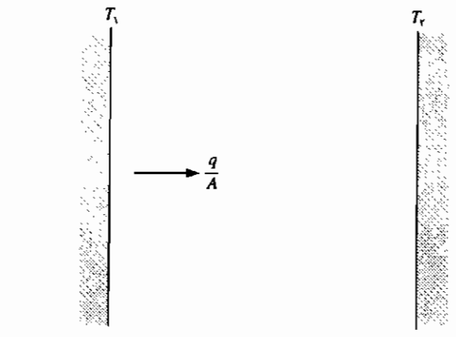
$$\lambda = ۲/۲۷ \times ۱۰^{-۵}\frac{T}{p}\quad \text{متر} \qquad (۷۰-۷)$$

که T به کلوین و p به پاسکال است.

به عنوان اولین نمونه انتقال گرمای چگالی پایین، دو صفحهٔ نامتناهی موازی را مطابق شکل ۷-۱۳ درنظر می‌گیریم. صفحات به دماهای مختلف هستند و با گاز از هم جدا شده‌اند. نخست موردی را درنظر می‌گیریم که چگالی یا فاصلهٔ دو صفحه آن‌قدر کوچک است که آثار جابه‌جایی آزاد قابل صرف‌نظر است اما چگالی گاز

آن‌قدر بالاست که $\lambda \to 0$ و مطابق مورد ۱، نیم‌رخ دما خطی است. با پایین رفتن چگالی گاز، مسیرهای آزاد متوسط بزرگ‌تر نیاز به فاصلهٔ بیش‌تری از سطوح انتقال گرما دارند تا گاز دماهای سطح را به‌خود بگیرد. نیم‌رخ‌های دمایی پیش‌بینی شده مطابق شکل ۷-۱۳ ب است. با برون‌یابی بخش مستقیم منحنی‌های چگالی پایین به دیواره، "پرش" دمایی ΔT ایجاد می‌شود که می‌توان آن را با معادله انرژی زیر حساب کرد:

$$\frac{q}{A} = k\frac{T_1 - T_2}{g + L + g} = k\frac{\Delta T}{g} \qquad (۷۱-۷)$$



شکل ۷-۱۳ اثر مسیر آزاد متوسط بر انتقال گرمای هدایتی بین صفحات موازی (الف) مدل فیزیکی؛ (ب) نیم‌رخ‌های دمایی پیش‌بینی شده.

فرض می‌کنیم در این معادله که فاصله برون‌یابی g برای هر دو صفحه یکی است. عموماً، پرش دمایی به نوع سطح بستگی دارد و این فواصل برون‌یابی برابر نیستند مگر آنکه جنس صفحات یکی باشد. برای جنس‌های مختلف داریم:

$$\frac{q}{A} = k\frac{T_1 - T_2}{g_1 + L + g_2} = k\frac{\Delta T_1}{g_1} = k\frac{\Delta T_2}{g_2} \qquad (۷۲-۷)$$

که در اینجا ΔT_1 و ΔT_2 پرش‌های دمایی در دو سطح انتقال گرما و g_1 و g_2 فواصل برون‌یابی متناظر آنها هستند. پس پرش دمایی برای سطوح یکسان چنین است:

$$\Delta T = \frac{g}{2g + L}(T_1 - T_2) \qquad (۷۳-۷)$$

برای هدایت چگالی پایین بین استوانه‌های هم‌مرکز نیز می‌توان روابط مشابهی به‌دست آورد. برای پیش‌بینی آهنگ انتقال گرما باید روابط پرش دمایی میان سطح‌های مختلف گاز به جامد مشخص شود.

گفتیم که پرش دمایی به خاطر شکست ملکول‌ها در "ارتباط برقرار کردن" با دمای سطح به هنگامی است که مسیر آزاد متوسط، با بعد مشخصه جسم هم‌مرتبه می‌شود. سنجه‌ای که این رفتار را توضیح می‌دهد به **ضریب مراوده** *accommodation Coefficient* موسوم است که چنین تعریف می‌شود:

$$\alpha = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_w} \qquad (۷۴-۷)$$

که E_i = انرژی ملکول‌های برخورنده به سطح

E_r = انرژی ملکول‌های بازتابیده از سطح

E_w = انرژی ملکول‌ها در صورت به‌دست آوردن انرژی دیوار به دمای T_w

مقادیر ضریب مراوده را باید به تجربه تعیین کرد و برخی مقادیر نمونه در جدول ۷-۴ آورده شده‌اند.

می‌توان از نظریه جنبشی گازها همراه مقادیر α برای تعیین برش دمایی در یک سطح استفاده کرد. نتیجه این تحلیل چنین است:

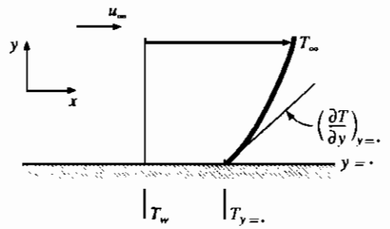
$$T_{y=0} - T_w = \frac{2 - \alpha}{\alpha}\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\frac{\lambda}{\Pr}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{y=0} \qquad (۷۵-۷)$$

نام‌گذاری معادله (۷-۷۵) در شکل ۷-۱۴ آمده است. این پرش دمایی با ΔT در شکل ۷-۱۳ مشخص شده است و گرادیان دما برای استفاده در شکل ۷-۱۳ چنین است:

$$\frac{T_1 - T_2 - 2\Delta T}{L}$$

جدول ۷-۴ ضرایب مراوده گرمایی برای هوا در فشار پایین در تماس با سطوح مختلف

سطح	ضریب مراوده، α
لاک یا برنز سیاه تخت	۰/۸۸-۰/۸۹
برنز، صیقلی	۰/۹۱-۰/۹۴
ماشین‌کاری شده	۰/۸۹-۰/۹۳
حکاکی شده	۰/۹۳-۰/۹۵
چدن، صیقلی	۰/۸۷-۰/۹۳
ماشین‌کاری شده	۰/۸۷-۰/۸۸
حکاکی شده	۰/۸۹-۰/۹۶
آلومینیم، صیقلی	۰/۸۷-۰/۹۵
ماشین‌کاری شده	۰/۹۵-۰/۹۷
حکاکی شده	۰/۸۹-۰/۹۷



شکل ۷-۱۴ نام‌گذاری برای استفاده از معادلهٔ (۷۱-۷۵).

مسیر آزاد متوسط به ازای چگالی خیلی پایین (خلأ بالا) در مقایسه با فاصله دو صفحه خیلی بزرگ شده، انتقال گرمای هدایتی - جابه‌جایی به صفر نزدیک می‌شود. اما خواننده باید توجه داشته باشد که کل انتقال گرما در عرض شکاف برابر مجموع انتقال گرمای هدایتی جابه‌جایی و تابشی است. انتقال گرمای تابشی را در فصل ۸ به طور مشروح بحث می‌کنیم اما در اینجا، معادلهٔ (۷-۶۷) را برای محاسبهٔ انتقال گرمای تابشی بین دو صفحه موازی ارائه کردیم. توجه کنید که ε برای سطوح خیلی جاذب به ۱/۰ نزدیک می‌شود و مقدار آن برای سطوح خیلی بازتابنده کوچک است. مثال ۷-۱۱ کاربرد روابط چگالی پایین را در محاسبه انتقال گرما در عرض شکاف نشان می‌دهد.

مثال ۷-۱۱ انتقال گرما در عرض فضای تخلیه‌شده از هوا.

فاصله دو صفحه آلومینیمی صیقلی ($\varepsilon = 0/06$) برابر 2/5 cm است و از هوای به فشار 10^{-6} atm پر شده است. دمای صفحات به ترتیب ۱۰۰ و ۳۰°C است. انتقال گرمای هدایتی در هوای شکاف را بیابید. این مقدار را با انتقال گرمای تابشی و هدایت هوا در فشار جو عادی مقایسه کنید.

حل:

نخست مسیر آزاد متوسط را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم آیا آثار چگالی پایین مهم است یا خیر. از معادلهٔ (۷-۷۰) در دمای متوسط $\bar{T} = 338\text{K}$ ($65°\text{C}$)

$$\lambda = \frac{(2/27 \times 10^{-5})(338)}{(1/0132 \times 10^{-6})(10^{-6})} = 0/0757\,\text{m} = 7/57\,\text{cm} \quad [0/248\,\text{ft}]$$

چون فاصله صفحات 2/5 cm است باید انتظار داشت که آثار چگالی پایین اهمیت داشته باشد. با ارزیابی خواص در دمای هوای متوسط ۶۵°C، داریم

$$k = 0/0291\ \frac{\text{W}}{\text{m.°C}} \qquad \left[0/0168\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft.°F}}\right]$$

$\gamma = 1/40$ $\quad \Pr = 0/7$ $\quad \alpha \approx 0/9$ $\quad$ از جدول ۷-۴

با ترکیب معادلهٔ (۷-۷۵) با رابطهٔ گرادیان دمای مرکزی داریم

$$\Delta T = \frac{2 - \alpha}{\alpha} \times \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \times \frac{\lambda}{\Pr} \times \frac{T_1 - T_2 - 2\Delta T}{L}$$

با جای‌گزینی خواص مناسب داریم

$$\Delta T = \frac{2 - 0/9}{0/9} \times \frac{2/8}{2/4} \times \frac{0/757}{0/7} \times \frac{100 - 30 - 2\Delta T}{0/025}$$

$$= 32/38°\text{C} \quad [58/3°\text{F}]$$

بنابراین انتقال گرمای هدایتی برابر است با:

$$\frac{q}{A} = k\frac{T_1 - T_2 - 2\Delta T}{L} = \frac{(0/0291)(70 - 64/76)}{0/025}$$

$$= 6/099\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \qquad \left[1/93\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^2}\right]$$

هدایت در فشار جو عادی برابر است با:

$$\frac{q}{A} = k\frac{T_1 - T_2}{L} = 81/48\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \qquad \left[25/8\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^2}\right]$$

انتقال گرمای تابشی از معادلهٔ (۸-۴۲) با $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0/06$ برای آلومینیم صیقلی محاسبه می‌شود:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{rad} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = \frac{(5/669 \times 10^{-8})(3934^4 - 303^4)}{\frac{2}{0/06} - 1}$$

$$= 27/05\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\ \left[8/57\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^2}\right]$$

پس در حالت چگالی پایین، حتی برای سطوح خیلی صیقلی، انتقال گرمای تابشی تقریباً ۵ برابر هدایتی است.

❑ ۷-۱۲ ترکیب جابه‌جایی آزاد و اجباری

در عمل حالاتی وجود دارد که انتقال گرمای جابه‌جایی آنها نه "اجباری" است نه "آزاد". این حالات وقتی به‌وجود می‌آید که سیال را روی سطحی گرمادیده باسرعت نسبتاً کم به جریان در آورند. همراه با سرعت جریان - اجباری یک سرعت جابه‌جایی وجود دارد که توسط نیروهای شناور ناشی از کاهش چگالی سیال در نزدیکی سطح گرمادیده ایجاد می‌شود.

متایس Metais و اکرت [۱۰] خلاصه‌ای از آثار جابه‌جایی آزاد توأم با اجباری در لوله‌ها را ارائه کرده‌اند و شکل ۷-۱۵ رژیم‌های جابه‌جایی مرکب در لوله‌های عمودی را نشان می‌دهد. در این شکل دو ترکیب متفاوت نشان داده شده‌اند. ***جریان همیار*** به معنی آن است که جریان‌های جابه‌جایی اجباری و آزاد هم‌جهتند. در حالی‌که ***جریان مخالف*** به معنی آن است که آنها در جهت مخالف هم می‌باشد. اختصار UWT به معنی دمای دیواره یکنواخت و اختصار UHF داده‌های مربوط به شار گرمایی یکنواخت را نشان می‌دهد. پیش‌بینی نتایج کیفیِ شکل نسبتاً ساده است. عدد رینولدز بالا دال بر سرعت جریان اجباری بالا و در نتیجه تأثیر کم جریان‌های جابه‌جایی آزاد است. باید انتظار داشت که هرچه مقدار حاصل‌ضرب گراشف - پراندل بزرگ‌تر باشد آثار جابه‌جایی آزاد بیش‌تر آشکار شود.

شکل ۷-۱۶ رژیم‌های جابه‌جایی مرکب در لوله‌های افقی را نشان می‌دهد. عدد گراتز این شکل چنین تعریف می‌شود:

$$\text{Gz} = \text{Re}\,\Pr\frac{d}{L} \qquad (۷۶-۷)$$

محدوده کاربرد شکل‌های ۷-۱۵ و ۷-۱۶ چنین است:

$$۱۰^{-۲} < \Pr\left(\frac{d}{L}\right) < ۱$$

هم‌بستگی‌های ارائه‌شده در اشکال مزبور برای دمای دیواره ثابتند. تمام خواص در دمای فیلم ارزیابی می‌شود.

براوون Brown و گووین Gauvin [۱۷] هم‌بستگی بهتری برای ناحیه جریان آرام جابه‌جایی آمیخته شکل ۷-۱۶ به‌دست آورده‌اند:

$$\mathrm{Nu} = ۱/۷۵\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{۰/۱۴}\left|\mathrm{Gz} + ۰/۰۱۲(\mathrm{Gz}\,\mathrm{Gr}^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}}\right|^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۷۷\text{-}۷)$$

که μ_b در دمای کپه‌ای ارزیابی می‌شود. این رابطه بر روابط شکل ۷-۱۶ برتری دارد. اطلاعات بیش‌تر در مرجع ۶۸ موجودند. فاند و کسوانی Keswani [۴۷] مسأله ترکیب جابه‌جایی آزاد - اجباری از استوانه‌های افقی را به طور مشروح بررسی کرده‌اند.

نکته کلی در تحلیل جابه‌جایی مرکب آن است که نوع مد حاکم انتقال گرما به سرعت سیال وابسته به آن مد مربوط می‌شود. مثلاً باید انتظار داشت که جابه‌جایی اجباری با سرعت سیال $۳۰\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ قسمت اعظم آثار جابه‌جایی آزاد موجود در میدان‌های گرانش عادی را تحت‌الشعاع قرار دهد زیرا سرعت جریان‌های جابه‌جایی آزاد در مقایسه با $۳۰\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کم است. از طرف دیگر ممکن است جریان اجباری با سرعت‌های خیلی کم $\left(۰/۳\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sim\right)$ کاملاً تحت تأثیر جریان‌های جابه‌جایی آزاد قرار گیرد. تحلیل مرتبه‌بزرگی معادلات لایه مرزی جابه‌جایی آزاد معیار کلی غالب بودن یا نبودن آثار جابه‌جایی آزاد را به‌دست می‌دهد. معیار آن است که وقتی:

$$\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^{۲}} > ۱۰ \qquad (۷۸\text{-}۷)$$

باشد، جابه‌جایی آزاد اهمیت عمده دارد و این نتیجه با اشکال ۷-۱۵ و ۷-۱۶ مطابقت دارد.

مثال ۷-۱۲ جابه‌جایی ترکیبی آزاد و اجباری با هوا

هوا در ۱ atm و ۲۷°C در لوله‌ای افقی به قطر ۲۵ mm با سرعت متوسط $۳۰\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ به طور اجباری جریان می‌یابد. دمای ثابت دیواره ۱۴۰°C است. ضریب انتقال گرمای این حالت را اگر طول لوله ۰/۴m باشد، بیابید.

حل:

خواص برای این محاسبه را در دمای فیلم ارزیابی می‌کنیم:

$$T_f = \frac{۱۴۰ + ۲۷}{۲} - ۸۳/۵^{\circ}\mathrm{C} = ۳۵۶/۵\ \mathrm{K}$$

$$\rho_f = \frac{p}{\mathrm{RT}} = \frac{۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^{۵}}{(۲۸۷)(۳۵۶/۵)} = ۰/۹۹\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^{۳}}$$

$$\beta = \frac{۱}{T_f} = ۲/۸۰۵ \times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{K}^{-۱} \qquad \mu_w = ۲/۳۳۷ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}}$$

$$\mu_f = ۲/۱۰۲ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}} \qquad k_f = ۰/۰۳۰۵\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m.^{\circ}C}} \qquad \Pr = ۰/۶۹۵$$

دمای کپه‌ای را برای ارزیابی μ_b برابر ۲۷°C می‌گیریم؛ بنابراین:

$$\mu_b = ۱/۸۴۶۲ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}}$$

سنجه‌های مهم چنین حساب می‌شود:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(۰/۹۹)(۰/۳)(۰/۰۲۵)}{۲/۱۰۲ \times ۱۰^{-۵}} = ۳/۵۳$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{\rho^{۲} g \beta (T_w - T_b) d^{۳}}{\mu^{۲}}$$

$$= \frac{(۰/۹۹)^{۲}(۹/۸)(۲/۸۰۵ \times ۱۰^{-۳})(۱۴۰ - ۲۷)(۰/۰۲۵)^{۳}}{(۲/۱۰۲ \times ۱۰^{-۵})^{۲}}$$

$$= ۱/۰۰۷ \times ۱۰^{۵}$$

$$\mathrm{Gr}\ \Pr\frac{d}{L} = (۱/۰۷۷ \times ۱۰^{۵})(۰/۶۹۵)\frac{۰/۰۲۵}{۰/۴} = ۴۶۷۷$$

طبق شکل ۷-۱۶ با رژیم جریان جابه‌جایی آمیخته مواجه هستیم. بنابراین باید از معادلهٔ (۷-۷۷) استفاده کنیم. عدد گراتز چنین حساب می‌شود:

$$\mathrm{Gz} = \mathrm{Re}\ \Pr\frac{d}{L} = \frac{(۳۵۳)(۰/۶۹۵)(۰/۰۲۵)}{۰/۴} = ۱۵/۳۳$$

و محاسبه عددی معادلهٔ (۷-۷۷) چنین خواهد بود:

$$\mathrm{Nu} = ۱/۷۵\left(\frac{۱/۸۴۶۲}{۲/۳۳۷}\right)^{۰/۱۴}\left\{۱۵/۳۳ + (۰/۰۱۲)[(۱۵/۳۳)(۱/۰۷۷\times۱۰^{۵})^{\frac{۳}{۴}}]^{\frac{۳}{۴}}\right\}^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= ۷/۷۰$$

بنابراین ضریب انتقال گرمای متوسط چنین حساب می‌شود:

$$\bar{h} = \frac{k}{d}\mathrm{Nu} = \frac{(۰/۰۳۰۵)(۷/۷۰)}{۰/۰۲۵} = ۹/۴۰\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{۲}.^{\circ}\mathrm{C}}\left[۱/۶۷\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^{۲}.^{\circ}\mathrm{F}}\right]$$

مقایسه این مقدار با مقداری که برای جابه‌جایی اجباری کاملاً آرام به‌دست می‌آید جالب است. رابطه سیدر - تیت [معادله (۶ - ۱۰)] را به کار می‌بریم، بنابراین:

$$\mathrm{Nu} = ۱/۸۶\ (\mathrm{Re}\ \Pr)^{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{\mu_f}{\mu_w}\right)^{۰/۱۴}\left(\frac{d}{L}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= ۱/۸۶\ \mathrm{Gz}^{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{\mu_f}{\mu_w}\right)^{۰/۱۴}$$

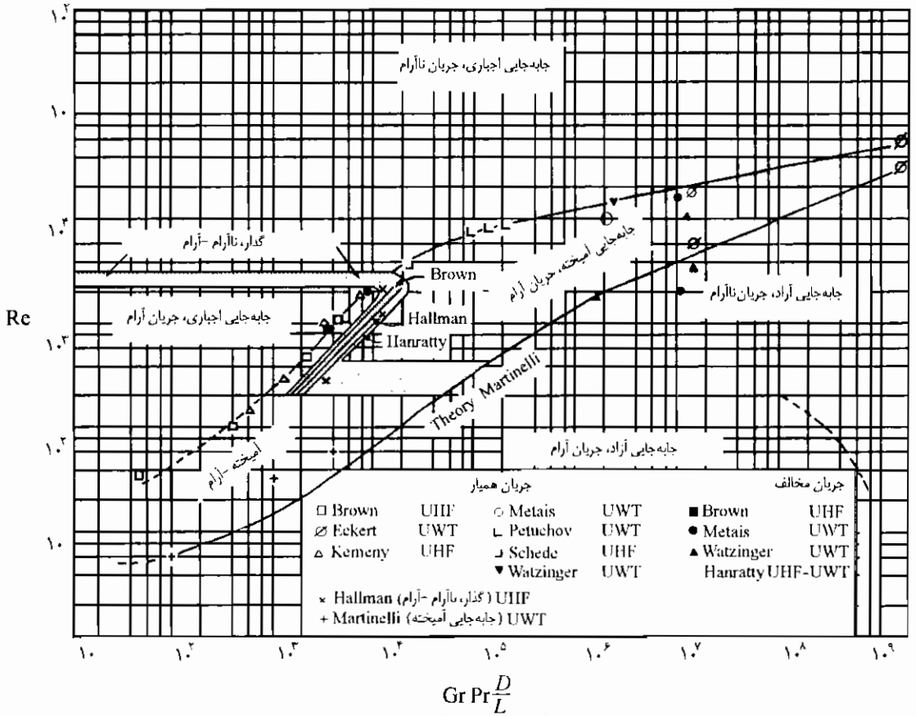
$$= (۱/۸۶)(۱۵/۳۳)^{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۲/۱۰۲}{۲/۳۳۷}\right)^{۰/۱۴}$$

$$= ۴/۵۵$$

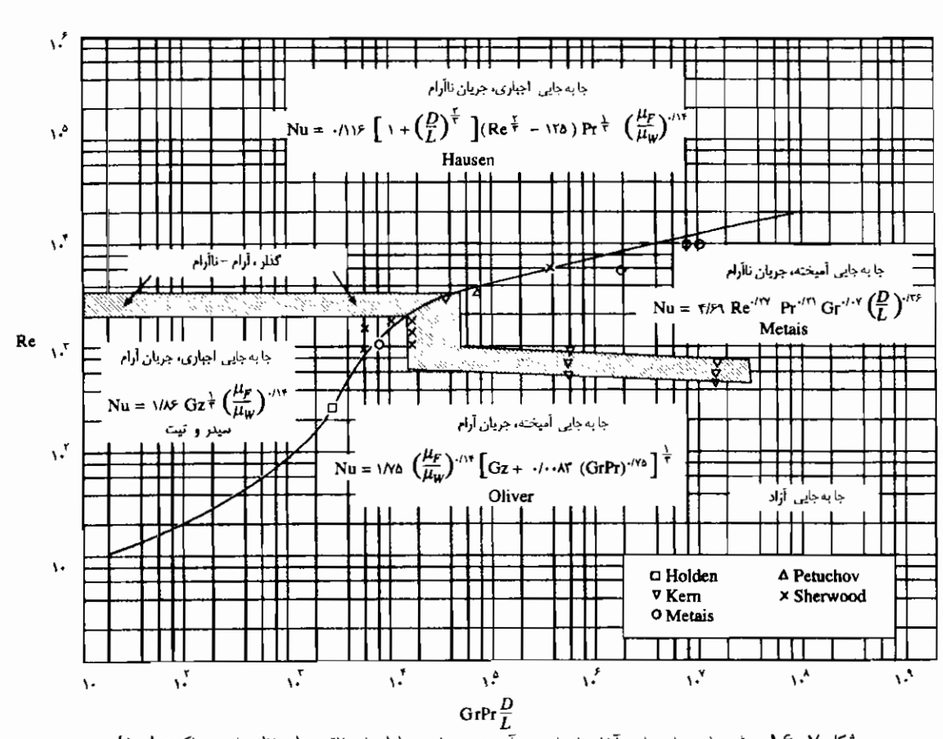
و:

$$\bar{h} = \frac{(۴/۵۵)(۰/۰۳۰۵)}{۰/۰۲۵} = ۵/۵۵\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{۲}.^{\circ}\mathrm{C}} \qquad \left[۰/۹۷۷\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^{۲}.^{\circ}\mathrm{F}}\right]$$

بنابراین چنان‌چه محاسبه را دقیقاً بر اساس جابه‌جایی اجباری آرام انجام دهیم ۴۱- درصد خطا ایجاد می‌شود.



شکل ۷-۱۵ رژیم‌های جابه‌جایی آزاد، اجباری و آمیخته جریان در لوله‌های عمودی طبق مرجع ۱۰.



شکل ۷-۱۶ رژیم‌های جابه‌جایی آزاد، اجباری و آمیخته جریان در لوله‌های افقی، طبق نظر متایس و اکرت [۱۰].

☑**جدول ۷-۵** خلاصه‌ای از روابط انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد. در اغلب موارد، خاصه‌ها در $T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$ ارزیابی شده‌اند.

شکل هندسی	معادله	محدودیت‌ها	شماره معادله
تعدادی از سطوح هم‌دما	$Nu_f = C(Gr_f\ Pr_f)^m$	جدول ۷-۱ را ببینید	(۷-۲۵)
	C و m از جدول ۷-۱		
سطح هم‌دمای عمودی	$\overline{Nu}^{\frac{1}{2}} = 0/825 + \frac{0/387\ Ra^{\frac{1}{6}}}{\left[1+\left(\frac{0/492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{8}{27}}}$	$10^{-1} < Ra_L < 10^{12}$	(۷-۲۹)
سطح عمودی، شارگرمایی ثابت، h موضعی	$Nu_{x^*} = C(G_{x^*}\ Pr_f)^m$	$C = 0/60, m = \frac{1}{5}$ برای $10^5 < G_{x^*} < 10^{11}$	(۷-۳۱)
		$C = 0/17, m = \frac{1}{4}$ برای $2\times10^{13} < Gr^* < 10^{16}$	(۷-۳۲)
استوانه‌های افقی هم‌دما	$\overline{Nu}^{\frac{1}{2}} = 0/60 + 0/387\left\{\frac{Gr\ Pr}{\left[1+\left(\frac{0/559}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{16}{9}}}\right\}^{\frac{1}{6}}$	$10^{-5} < Gr\ Pr < 10^{12}$	(۷-۳۶)
سطح افقی، شارگرمایی ثابت		متن کتاب را ببینید	(۷-۳۹) تا (۷-۴۲)
سطوح مایل	بخش ۷-۷	متن کتاب را ببینید	
کره‌ها	$Nu = 2 + 0/43(Gr\ Pr)^{\frac{1}{4}}$	$1 < Gr\ Pr < 10^5$	(۷-۵۰)
	$Nu = 2 + 0/5(Gr\ Pr)^{\frac{1}{4}}$	آب، $3\times10^5 < Gr\ Pr < 8\times10^8$	(۷-۵۱)
	$Nu = 2 + \frac{0/589(Gr\ Pr)^{\frac{1}{4}}}{\left[1+\left(\frac{0/469}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{4}{9}}}$	$0/5 < Pr$	(۷-۵۲)
		$Gr\ Pr < 10^{11}$	
فضاهای بسته	$q = k_e A\left(\frac{\Delta T}{\delta}\right)$	ثابت‌های C، m و n از جدول ۷-۳	(۷-۶۴)
	$\frac{k_e}{K} = C(Gr_\delta\ Pr)^n\left(\frac{L}{\delta}\right)^m$	هدایت خالص برای $Gr_\delta\ Pr < 2000$	
در عرض فضاهای تخلیه‌شده از هوا	قسمت اعظم انتقال تابشی است		

❑ ۷-۱۳ خلاصه

ملاحظه کردید که روابط تجربی زیادی برای سیستم‌های جابه‌جایی طبیعی وجود دارد. اهداف ما در این بخش عبارتند از: (۱) صحبتی درباره احتیاط و (۲) ارائه جدولی با خلاصه روابط.

بسیاری از داده‌های جابه‌جایی آزاد در شرایط آزمایشگاهی در هوای ساکن، آب ساکن و غیره گردآوری شده‌اند. ممکن است نتوان یک مسأله جابه‌جایی آزاد عملی را به این ترتیب فرمول‌بندی کرد و لایه مرزی می‌تواند اثر جابه‌جایی اجباری اندکی نیز داشته باشد. به‌علاوه، سطوح واقعی عملاً به ندرت هم‌دما و یا شار گرمایی ثابتند و در نتیجه ممکن‌است روابط حاصل از هم‌بسته کردن داده‌های آزمایشگاهی برای این شرایط را نتوان دقیقاً به‌کار برد. حاصل کلام آن‌که مهندس باید بداند که ممکن است مقادیر ضریب انتقال گرمای محاسبه شده تا ۲۵ ± درصد با مقدار واقعی حاصل از تجربه، متفاوت باشد.

برای حل مسائل جابه‌جایی آزاد باید شیوه‌ای مشابه روش فصل ۶ برای مسائل جابه‌جایی اجباری در پیش گرفت.

۱- مشخص کنید که آن مسأله واقعاً مسأله جابه‌جایی *آزاد* است.
۲- هندسه وضعیت را مشخص کنید؛ صفحه عمودی، استوانه افقی و غیره
۳- خواص سیال مناسب را مقدمتاً تعیین کنید.
۴- رژیم جریان را با محاسبه حاصل ضرب اعداد گراشف - پراندل مشخص کنید. در کاربرد بعد مشخصه صحیح برای هندسه خاص دقت کنید.
۵- معادله‌ای مطابق با آن هندسه و رژیم جریان انتخاب و خواص را در صورت نیاز دوباره و مطابق با شرایط و معادله ارزیابی کنید.
۶- مقدار h و / یا آهنگ انتقال گرما را حساب کنید.

خلاصه‌ای از این روابط را برای کمک به خواننده در انتخاب رابطه جابه‌جایی آزاد در جدول ۷-۵ آورده‌ایم.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ چرا راه حل تحلیلی مسأله جابه‌جایی آزاد از نمونه جابه‌جایی اجباری آن پیچیده‌تر است؟
۲ عدد گراشف را تعریف کنید. اهمیت فیزیکی آن چیست؟
۳ معیار تقریبی برای گذار به ناآرامی در لایه مرزی جابه‌جایی آزاد چیست؟
۴ معمولاً برای هم‌بسته کردن داده‌های انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از چه تابعی استفاده می‌شود؟
۵ مسأله جابه‌جایی آزاد و اجباری ترکیبی را مورد بحث قرار دهید.
۶ معیار تقریبی جداکننده هدایت خالص از جابه‌جایی آزاد در فضای بسته بین دیوارهای عمودی چیست؟
۷ عدد گراشف پیراسته برای حالت شار گرمایی ثابت روی صفحه عمودی را چگونه تعریف می‌کنند؟

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۷-۱ شار گرمایی ثابت از صفحه عمودی
۷-۲ انتقال گرما از صفحه عمودی هم‌دما
۷-۳ انتقال گرما از لوله افقی در آب
۷-۴ انتقال گرما از سیم ظریف در هوا
۷-۵ لوله افقی گرمادیده در هوا
۷-۶ خنک شدن مکعب در هوا
۷-۷ محاسبه با روابط ساده شده
۷-۸ انتقال گرما در عرض شکاف هوای عمودی
۷-۹ انتقال گرما در عرض شکاف هوای افقی
۷-۱۰ انتقال گرما در عرض لایهٔ آب
۷-۱۱ انتقال گرما در عرض فضای تخلیه‌شده از هوا
۷-۱۲ جابه‌جایی ترکیبی آزاد و اجباری با هوا

❑ مسائل

۷-۱ فرض کنید می‌خواهیم ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری یا آزاد روی صفحات تخت عمودی را مقایسه کنیم. رابطه‌ای تقریبی میان اعداد رینولدز و گراشف به‌دست آورید به طوری که ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری خالص و جابه‌جایی آزاد خالص مساوی شود. جریان را آرام فرض کنید.

۷-۲ دمای صفحه تخت عمودی هم‌دما $93^\circ C$ بوده، در معرض هوایی به دمای $20^\circ C$ و فشار ۱ atm قرار دارد. نیم‌رخ‌های سرعت جابه‌جایی آزاد را به صورت تابعی از فاصله از سطح صفحه در جاهایی که x آن برابر ۱۵، ۳۰ و ۴۵ cm است، رسم کنید.

۷-۳ نشان دهید که در معادله حالت گاز کامل $p = \rho\ RT$، $\beta = \frac{1}{T}$ است.

۷-۴ دمای صفحهٔ عمودی مربعی به ضلع ۱ ft برابر $65^\circ C$ بوده، در معرض هوای جو به دمای $15^\circ C$ قرار دارد. انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از این صفحه را با انتقال گرمای ناشی از رانش اجباری هوا روی این صفحه با سرعت بیشینه‌ای مقایسه کنید که در لایهٔ مرزی جابه‌جایی آزاد اتفاق می‌افتد. در مورد این مقایسه بحث کنید.

۷-۵ ضخامت لایه مرزی جابه‌جایی آزاد را بر حسب تابعی از x برای صفحه‌ای عمودی به دمای $80^\circ C$ رسم کنید که در معرض هوایی بافشار جو و دمای $15^\circ C$ قرار گرفته است. تنها منطقهٔ آرام را در نظر بگیرید.

۷-۶ برای سرعت بیشینه در لایه مرزی جابه‌جایی آزاد روی صفحه تخت عمودی عبارتی به‌دست آورید. این سرعت بیشینه در چه جایی از این لایه مرزی اتفاق می‌افتد؟

۷-۷ دو صفحه تخت عمودی به دمای $65^\circ C$ را در مخزن آبی به دمای $25^\circ C$ قرار می‌دهند. اگر ارتفاع صفحات ۳۰ cm باشد، حداقل فاصلهٔ آنها چه‌قدر باشد تا لایه‌های مرزی جابه‌جایی آزاد تداخل نکنند؟

۷-۸ دمای استوانه‌ای عمودی به ارتفاع ۳۰ cm برابر $100^\circ C$ بوده و در معرض هوای اتاق به دمای $15^\circ C$ است. حداقل قطر این استوانه چه‌قدر باشد تا مثل صفحهٔ تخت عمودی رفتار کند؟

۷-۹ صفحهٔ عمودی مربعی به ضلع ۱ m تا $400^\circ C$ گرما داده شده، در هوای اتاق به دمای $25^\circ C$ قرار داده می‌شود. اتلاف گرما از یک طرف صفحه را حساب کنید.

۷-۱۰ دمای ثابت صفحه‌ای تخت و عمودی برابر $120^\circ F$ بوده، در معرض هوای جو به دمای $70^\circ F$ قرار می‌گیرد. ضخامت لایه مرزی در فاصله $0/14\ in.$ از لبه بالاروند صفحه $1/0\ in.$ است. ضخامت لایه مرزی را در فاصله $24\ in.$ از لبه بالاروند حساب کنید.

۷-۱۱ دمای استوانه عمودی به ارتفاع ۱/۸ m و قطر ۷/۵ cm در محیط جوی به دمای $30^\circ C$ برابر $93^\circ C$ است. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد را از این استوانه حساب کنید. در این محاسبه می‌توان استوانه را به صورت صفحه تخت عمودی در نظر گرفت.

۷-۱۲ دیوار بیرونی ساختمانی به ارتفاع ۶ m شار گرمایی تابشی متوسط $1100\ \frac{W}{m^2}$ را از خورشید دریافت می‌کند. به فرض $95\ \frac{W}{m^2}$ از دیوار

هدایت شود دمای دیوار بیرونی را بیابید. دمای هوای جو در بیرون ساختمان را برابر $20^\circ C$ فرض کنید.

۱۳-۷ به فرض بتوان بدن انسان را تقریباً به صورت استوانه‌ای عمودی به قطر $1\ ft$ و ارتفاع $6\ ft$ در نظر گرفت، اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد را برای سطحی به دمای $75^\circ F$ در هوای محیط به دمای $68^\circ F$ بیابید.

۱۴-۷ صفحه‌ای مربعی و عمودی به ضلع $30\ cm$ را به طریق برقی گرما می‌دهند به طوری که حالت شار گرمایی ثابت ایجاد شده و کل گرمای انتشار یافته $30\ W$ باشد. هوای محیط در فشار $1\ atm$ و دمای $20^\circ C$ است. مقدار ضریب انتقال گرما را در ارتفاعات 15 و $30\ cm$ حساب کنید. ضریب انتقال گرمای متوسط این صفحه را بیابید.

۱۵-۷ دمای صفحه‌ای عمودی و مربعی به ضلع $0/3\ m$ برابر $49^\circ C$ بوده و در معرض هوای اتاق به فشار $1\ atm$ و دمای $19^\circ C$ است. اتلاف گرما از هر دو طرف صفحه را بیابید.

۱۶-۷ اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از صفحه‌ای عمود و مربعی به ضلع $0/61\ m$ و دمای $100^\circ C$ را محاسبه کنید که در معرض هلیم به دمای $20^\circ C$ و فشار $2\ atm$ قرار دارد.

۱۷-۷ صفحه‌ای عمودی و بزرگ به ارتفاع $6/1\ m$ و عرض $1/22\ m$ با دمای ثابت $57^\circ C$، در معرض هوای جو به دمای $4^\circ C$ قرار می‌گیرد. اتلاف گرما از صفحه را بیابید.

۱۸-۷ دمای صفحهٔ عمودی و مربعی به ضلع $1m$ برابر $49^\circ C$ بوده و در معرض هوای اتاق به دمای $20^\circ C$ است. اتلاف گرما از صفحه را بیابید.

۱۹-۷ برای ایجاد عدد ریلی 10^{12} در هوا در شرایط استاندارد و $\Delta T = 10^\circ C$ چه فاصلهٔ عمودی‌ای لازم است؟

۲۰-۷ در صفحه‌ای قائم به ابعاد $25\ cm \times 25\ cm$، یک گرم‌کن برقی نصب شده است که شار گرمایی ثابت $1000\ \frac{W}{m^2}$ را تولید می‌کند. این صفحه در آب $15^\circ C$ فرو برده می‌شود. ضریب انتقال گرماو دمای متوسط صفحه را بیابید. در این دمای متوسط چه‌قدر گرما از سطحی هم‌دما به هدر می‌رود؟

۲۱-۷ فرض کنید که به دلیل تقارن، در هر طرف استوانه افقی، نیمی از انتقال گرما به طریق جابه‌جایی به وجود آید. بااین فرض، انتقال گرما در هر طرف استوانه را با انتقال گرما از صفحه‌ای تخت و عمودی که ارتفاعش برابرفاصلهٔ محیطی نقطهٔ رکود کف تا نقطهٔ رکود بالای استوانه است، مقاسیه کنید. در مورد این مقایسه بحث کنید.

۲۲-۷ گرم‌کنی استوانه‌ای و افقی با $d = 2\ cm$ را در استخری از مخلوط سدیم و پتاسیم با ترکیب ۲۲ درصد سدیم قرار می‌دهیم. دمای مخلوط $120^\circ C$ بوده، دمای ثابت سطح گرم‌کن $200^\circ C$ است. انتقال گرما از گرم‌کنی به طول $40\ cm$ را حساب کنید.

۲۳-۷ میله گرم‌کنی افقی به قطر $3/0\ cm$ و طول $1\ m$ را در استخری از آمونیاک مایع اشباع به دمای $20^\circ C$ قرار می‌دهیم. دمای سطحِ گرم‌کن، $70^\circ C$ و ثابت است. آهنگ انتقال گرما را بیابید.

۲۴-۷ از بخار چگالندهٔ $120^\circ C$ که داخل لوله‌ای افقی به قطر $7/5\ cm$ جاریست برای گرم‌کردن محلی که دمای هوای محیط آن $17^\circ C$ است، استفاده می‌شود. کل مقدار بار گرمایی $29/3\ kW$ است. طول لوله چه‌قدر باشد تا این گرمایش انجام شود؟

۲۵-۷ سیمی از جنس پلاتین به طول $10\ cm$ و به قطر $0/4\ mm$ را به طور افقی در ظرف آبی به دمای $38^\circ C$ قرار می‌دهند. این ظرف به طور الکتریکی گرما می‌گیرد به طوری که دمای سطح آن $93^\circ C$ است. گرمای تلف‌شده از سیم را حساب کنید.

۲۶-۷ آب با آهنگ $\frac{kg}{s}\ 0/8$ و دمای $90^\circ C$ در لوله‌ای فولادی به قطر داخلی $2/5\ cm$ و قطر خارجی $3\ cm$ جاریست. دمای سطح بیرونی لوله $85^\circ C$ و دمای هوای محیط $20^\circ C$ است. فشار هوای اتاق $1\ atm$ و طول لوله $15\ m$ است. مقدار گرمای تلف‌شده به طریق جابه‌جایی آزاد به اتاق چه‌قدر است؟

۲۷-۷ لوله‌ای افقی به قطر $8/0\ cm$ را در اتاقی که حاوی هوای جو به دمای $20^\circ C$ است قرار می‌دهند. دمای سطحی لوله $140^\circ C$ است. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد را از متر طول لوله حساب کنید.

۲۸-۷ لوله‌ای افقی به قطر خارجی $1/25\ cm$ را گرما می‌دهند تا دمای سطح آن $250^\circ C$ شود و آن‌را در معرض هوای اتاق به دمای $20^\circ C$ و فشار $1\ atm$ قرار می‌دهد. انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد واحد طول لوله چه‌قدر است؟

۲۹-۷ یک گرم‌کن برقی افقی به قطر $2/5\ cm$ را در حمام روغن سبک به دمای $93^\circ C$ فرو می‌برند. دمای سطحی گرم‌کن $150^\circ C$ است. گرمای تلف‌شده به ازای فوت طول گرم‌کن را بیابید.

۳۰-۷ کانال تهویه مطبوعی با مقطع مربع به ضلع $0/3\ m$ حامل هوا به دمایی است که دمای بیرونی کانال $15/6^\circ C$ شده و در معرض هوای اتاق به دمای $27^\circ C$ است. گرمای کسب شده توسط متر طول کانال را حساب کنید.

۳۱-۷ از سیم نازکی به قطر $0/0010\ in.$ $(0/0254 mm)$ جریان الکتریکی عبور کرده وگرم شده و آن‌را به طور افقی در اتاقی حاوی هلیم به فشار $3\ atm$ و $10^\circ C$ قرار می‌دهند. اگر دمای سطحی سیم از $240^\circ C$ تجاوز نکند، توان الکتریکی داده شده به واحد طول سیم را بیابید.

۳۲-۷ کانال بزرگی به مقطع دایره و به قطر $3/0\ m$ حاوی گازهای گرم به دمای $250^\circ C$ است. سطح بیرونی این کانال را در معرض هوای اتاق به فشار $1\ atm$ و دمای $20^\circ C$ قرار می‌دهند. گرمای تلف‌شده از واحد طول کانال را حساب کنید.

۳۳-۷ گرم‌کنی به قطر $2/0\ cm$ را در مخزن گلیسیرینی به دمای $20^\circ C$ قرار می‌دهند. دمای سطح گرم‌کن $60^\circ C$ و طول آن $60\ cm$ می‌باشد. انتقال گرما را حساب کنید.

۳۴-۷ استوانه‌ای به قطر $3/5\ cm$ حاوی یک گرم‌کن برقی است که شار گرمایی ثابتی به میزان $1500\ \frac{W}{m^2}$ را در سطح آن ایجاد می‌کند. اگر این استوانه دارای زاویهٔ شیب 35 با افق بوده، در معرض هوای اتاقی به دمای $20^\circ C$ باشد، دمای سطحی متوسط را حساب کنید.

۳۵-۷ لوله‌ای افقی به قطر $30\ cm$ به دمای ثابت $25^\circ C$ است و در هوای اتاق به دمای $20^\circ C$ قرار داده می‌شود. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از لوله به ازای واحد طول آن‌را بیابید.

۳۶-۷ دمای ثابت کانالی به قطر $5\ in.$ که حاوی گازهای حاصل از احتراق است $500^\circ F$ می‌باشد. این کانال را به طور افقی در انباری که دمای محیط آن $60^\circ F$ است قرار می‌دهند. طول کانال برای آنکه $125000\ \frac{Btu}{h}$ گرمایش جابه‌جایی را تأمین کند، حساب کنید.

۳۷-۷ دمای استوانه‌ای افقی به قطر $5\ cm$ و طول $3\ m$ برابر $180^\circ F$ بوده، در آبی به دمای $60^\circ F$ فرو برده می‌شود. اتلاف گرما از این استوانه رابیابید.

۳۸-۷ دمای ثابت استوانه‌ای افقی به قطر $2/0\ m$ برابر $77^\circ C$ بوده، درفضای انباری بزرگ به دمای $27^\circ C$ قرار می‌گیرد. طول این استوانه $20\ m$ است. گرمای تلف‌شده از استوانه را بیابید.

۳۹-۷ آهنگ اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از کره‌ای به قطر $30\ cm$ و دمای $90^\circ C$ که در معرض هوای جو به دمای $20^\circ C$ قرار می‌گیرد را حساب کنید.

۴۰-۷ دمای کره‌ای به قطر $2/5\ cm$ برابر $32^\circ C$ بوده، در آب به دمای $10^\circ C$ فرو برده می‌شود. آهنگ اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد را بیابید.

۴۱-۷ بالون کروی اتاقک‌داری به قطر $2/4\ m$ به ارتفاعی صعود می‌کندکه فشار محیط $1/4\ kPa$ و دمای محیط $-50^\circ C$ است. دمای سطح بیرونی این کره تقریباً $0^\circ C$ است. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد را از سطح بیرونی کره حساب کنید. این اتلاف را با اتلاف گرمای جابه‌جایی اجباری از این کره، وقتی سرعت جریان آزاد کم و تقریباً $3/0\ \frac{cm}{s}$ باشد، مقایسه کنید.

۴۲-۷ دمای کره‌ای به قطر $2/5\ cm$ برابر $38^\circ C$ بوده، در آب $15^\circ C$ فرو برده می‌شود. آهنگ انتقال گرما در این شرایط را بیابید.

۴۳-۷ از استدلال مربوط به آخرین قلم جدول ۷-۱ برای جابه‌جایی آزاد از کره استفاده کرده، آن‌را با معادلهٔ (۷-۵۰) مقایسه کنید.

۴۴-۷ با استفاده از اطلاعات جدول ۷-۱ و روابط ساده شده جدول ۷-۲، رابطه ساده‌ای پیشنهاد کنید که بتوان آن را جای‌گزین معادلهٔ (۷-۵۰) برای محاسبه جابه‌جایی آزاد از کره به هوای به فشار $1\ atm$ کرد.

۴۵-۷ دمای صفحهٔ دایره‌ایِ گرمی به قطر $15\ cm$ در هوای جو به دمای $20^\circ C$ برابر $150^\circ C$ است. اتلاف گرمای جابه‌جایی را وقتی صفحه در حالت افقی قرار گرفته باشد، حساب کنید.

۴۶-۷ گرم‌کن روغن موتوری تشکیل شده از ظرف بزرگی که در کف آن یک گرم‌کن برقی به شکل صفحهٔ مربعی به ضلع $30\ cm$ قرار دارد. دمای ثابت این صفحه $60^\circ C$ است. آهنگ انتقال گرما را برای وقتی حساب کنید که دمای روغن $20^\circ C$ باشد.

۴۷-۷ گرم‌کن‌هایی برقی به صورت نوارهای کوچک به عرض $6\ mm$ را در وضعیت افقی قرار داده‌اند. دمای نوارها $500^\circ C$ بوده در معرض هوای اتاق به دمای $20^\circ C$ قرار دارد. به فرض این نوارها از سطوح بالا و پایین گرما انتشار دهند. طول نواری را بیابید که $2\ KW$ گرما را به طریق جابه‌جایی آزاد پخش کند.

۴۸-۷ دمای سطح بالایی صفحه افقی به ابعاد $10\ m \times 10\ m$ برابر $25^\circ C$ بوده، در معرض هوای اتاق به دمای $28^\circ C$ است. مقدار انتقال گرما را حساب کنید.

۴۹-۷ گرم‌کنی افقی به ابعاد $4\ m \times 4\ m$ را در هوای اتاق به دمای $15^\circ C$ قرار می‌دهند. سطوح بالا و پایین این صفحه تا $50^\circ C$ گرما داده می‌شود. اتلاف گرمای کل جابه‌جایی آزاد را حساب کنید.

۵۰-۷ صفحه‌ای افقی به دمای یکنواخت $400\ K$ و به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $45\ cm$ در معرض هوای جو به دمای $300\ K$ قرار می‌گیرد. اتلاف گرما از این صفحه را بیابید.

۵۱-۷ صفحهٔ گرمادیده‌ای به ابعاد $20\ cm \times 20\ cm$ با افق زاویه 60° دارد و در آب قرار داده می‌شود. شار گرمایی تقریباً ثابتی وجود دارد، دمای متوسط صفحه $40^\circ C$ و سطح گرمادیده رو به پایین است. دمای آب $20^\circ C$ می‌باشد. گرمای تلف‌شده از صفحه را بیابید.

۵۲-۷ مسأله ۷-۵۱ را برای صفحه گرمادیده رو به بالا تکرار کنید.

۵۳-۷ میان دو شیشهٔ پنجرهٔ دوجداره که $1/25\ cm$ با هم فاصله دارند، هوا قرار دارد. ابعاد صفحه $1/2\ m \times 1/8\ m$ است. آهنگ انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد را از فاصله هوایی به‌ازای اختلاف دمای $30^\circ C$ و $T_1 = 20^\circ C$ بیابید.

۵۴-۷ کلکتور آفتابی صفحه تخت مربعی به ضلع $1\ m$ با افق زاویه 20° می‌سازد. دمای سطح گرم $160^\circ C$ بوده، در محفظه‌ای قرار داده می‌شود که از هوا تخلیه‌شده و فشارش $0/1\ atm$ است. در بالای سطح گرم و به موازات آن پنجره شیشه‌ای شفلفی قرار گرفته که به انرژی تابشی آفتابی اجازه عبور می‌دهد. فاصلهٔ سطح گرم و پنجره $8\ cm$ است. دمای پنجره به دلیل جابه‌جایی به محیط اطراف $40^\circ C$ است. انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد را بین سطح گرم و پنجرهٔ شفاف حساب کنید.

۵۵-۷ صفحه‌ای تخت به ابعاد $1\ m \times 1\ m$ با افق زاویهٔ 30° داشته و در معرض هوای جو به دمای $30^\circ C$ و $1\ atm$ است. این صفحه شار گرمایی انرژی تابشی خالص $700\ \frac{W}{m^2}$ را از خورشید دریافت می‌کند که بعداً به طریق جابه‌جایی آزاد به محیط اطراف پخش می‌شود. دمای متوسط صفحه چه‌قدر می‌شود؟

۵۶-۷ استوانه‌ای افقی به قطر $5\ cm$ و ضریب گسیل $0/5$ را در اتاق بزرگی که دمای دیوارهایش $35^\circ C$ است قرار می‌دهند. استوانه به طریق جابه‌جایی طبیعی با $h = 6/5\ \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ گرما از دست می‌دهد. ترموکوپلی حساس روی سطح استوانه قرار می‌دهند که دمای $30^\circ C$ را نشان می‌دهد. دمای هوای اتاق چه‌قدر است؟

۵۷-۷ دمای صفحه‌ای به ابعاد $10\ cm \times 10\ cm$ بوده، با افق زاویهٔ 45° می‌سازد. اتلاف گرما از دو طرف صفحه به هوای اتاق در دمای $20^\circ C$ را بیابید.

۵۸-۷ دمای صفحه‌ای به ابعاد $5\ cm \times 5\ cm$ برابر $50^\circ C$ بوده، با افق زاویهٔ 60° می‌سازد. اتلاف گرما از دوطرف صفحه به آب در دمای $20^\circ C$ را بیابید.

۵۹-۷ داخل لوله‌ای افقی به قطر $6/5\ mm$ هوای به فشار $1\ atm$ و دمای $38^\circ C$ با سرعت متوسط $30\ \frac{m}{s}$ رانده می‌شود. دمای دیواره لوله $540^\circ C$ بوده و طول آن $30\ cm$ است. ضریب انتقال گرمای متوسط را حساب کنید. به ازای سرعت $30\ \frac{m}{s}$ و دمای دیوارهٔ لوله $800^\circ C$ مسأله را تکرار کنید.

۶۰-۷ بلوک مسی کوچکی که کف آن مربعی به ضلعی ۲/۵ cm و ارتفاع آن ۵ cm است در هوای اتاق به فشار ۱ atm و ۲۰°C خنک می‌شود. این بلوک در ۹۳°C هم‌دماست. آهنگ انتقال گرما را حساب کنید.

۶۱-۷ صفحه‌ای افقی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴۰ cm و به دمای ثابت ۵۵°C را در معرض هوای جو به دمای ۲۵°C قرار می‌دهند. گرمای تلف‌شده از سطح بالایی صفحه را بیابید.

۶۲-۷ گرم‌کنی افقی و کوچک به شکل دیسکی دایره‌ای به قطر ۳ cm است. دمای این دیسک ۵۰°C بوده، در معرض هوای جو به دمای ۳۰°C قرار داده می‌شود. اتلاف گرما را بیابید.

۶۳-۷ بلوکی سرامیکی به دمای ۴۰۰°C و ابعاد ۱۵ cm × ۱۵ × ۸ است و در معرض هوای اتاق به دمای ۲۷°C قرار می‌گیرد. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد را بیابید.

۶۴-۷ تقویت‌کننده‌ای مغناطیسی روی جعبه‌ای مکعبی به ضلع ۶ in. روی یک وجه قرار گرفته، باید W ۵۰ به هوای محیط، که دمای آن ۷۰°F است، انتشار دهد. دمای سطح جعبه را حساب کنید.

۶۵-۷ دماسنجی شیشه‌ای در اتاق بزرگی قراردارد که دمای دیوارهایش ۱۰°C است ضریب جابه‌جایی بین این دماسنج و هوای اتاق $5 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$ است و دماسنج دمای ۳۰°C را نشان می‌دهد. دمای هوای اتاق را با فرض $\varepsilon = ۱/۰$ پیدا کنید.

۶۶-۷ کانال تهویه مطبوعی افقی دارای ابعاد افقی ۳۰ cm و عمودی ۱۵ cm بوده و دمایش ۱۲۰°F است و در معرض هوای جو به دمای ۷۰°F قرار دارد. اتلاف گرما از واحد طول کانال را حساب کنید.

۶۷-۷ دو صفحه قائم مربعی به ضلع ۳۰ cm، به فاصلهٔ ۱/۲۵ cm از هم قرار گرفته‌است و فضای بین آنها را آب پر می‌کند. روی این صفحات شرط شار گرمایی ثابت اعمال می‌شود به طوری که دمای متوسط یکی از آنها ۳۸°C و دمای دیگری ۶۰°C است. آهنگ انتقال گرما در این شرایط را بیابید. خواص را در دمای متوسط حساب کنید.

۶۸-۷ محفظه‌ای حاوی هلیم به فشار ۱/۳ atm بوده و دارای سطح گرمایش عمودی است که دمای آنها به ترتیب ۸۰°C و ۲۰°C است. صفحات عمودی به ابعاد ۴۰ cm × ۴۰ بوده، به فاصلهٔ ۲ cm از هم قرار دارند. مقدار انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد بین دو سطح عمودی را بیابید.

۶۹-۷ حلقه‌ای افقی به قطر داخلی ۸ و قطر خارجی ۱۰ cm حاوی آب مایع است. دمای سطوح داخل و خارج به ترتیب ۴۰ و ۲۰°C است. مقدار انتقال گرما در عرض فضای حلقوی را به ازای متر طول آن بیابید.

۷۰-۷ دو کرهٔ هم‌مرکز را طوری درست کرده‌اند تا داخل کره داخلی آب نمک به دمای ۱۰°C- نگه‌داری کنند. قطر کره داخلی ۲ m و فاصله این دو کره ۵ cm است. دمای کره بیرونی ۳۰°C بوده، فضای بین دو کره را تا فشار ۰/۰۵ atm از هوا تخلیه کرده‌اند. مقدار انتقال گرمای جابه‌جایی را در عرض فاصلهٔ بین دوکره پیدا کنید.

۷۱-۷ خمرهٔ بزرگی که در فرابری غذایی به کار می‌رود محتوی روغن داغ به دمای ۴۰۰°F است. در اطراف قائم این خمره پوسته‌ای قرار گرفته که تا ۱۴۰°F خنک می‌شود. فاصلهٔ خمره تا پوسته ۳ cm و ارتفاع این فضا ۳۵ cm است. اتلاف جابه‌جایی آزاد به ازای متر مربع مساحت سطح را پیدا کنید.

۷۲-۷ دو صفحه عمودی مربعی به ضلع ۳۰ cm به فاصلهٔ ۲/۵ cm از هم قرار گرفته و فضای بین آنها را هوا به فشار ۱ atm فرا گرفته است. دمای دو صفحه به ترتیب ۲۰۰ و ۹۰°C است. آهنگ انتقال گرما در عرض شکاف هوا را بیابید.

۷۳-۷ دو صفحه به فاصلهٔ ۱/۶ mm از هم قرار گرفته و فضای بین آنها را هوا پر کرده است. آهنگ انتقال گرمای واحد مساحت را وقتی اختلاف دما ۱۶۵°C و دمای یک صفحه ۹۰°C باشد، پیدا کنید.

۷۴-۷ مسأله ۷-۷۳ را برای فاصله‌ای افقی که با آب پر شده باشد تکرار کنید.

۷۵-۷ فاصلهٔ فضایی عمودی از هوای به فشار جو به ارتفاع ۴/۰ ft پر شده و اختلاف دما در ۳۰۰ K برابر ۲۰°F است. $\frac{k_e}{k}$ و مقدار R را به ازای فاصله‌های فضایی از صفر تا ۱۰ in. محاسبه و رسم کنید. در تقریباً چه فاصلهٔ فضایی مقدار R بیشینه است.

۷۶-۷ دو صفحهٔ عمودی به ابعاد ۵۰ cm × ۵۰ به فاصلهٔ ۴ cm از هم قرار گرفته و فاصله را آب پر کرده است. دماهای صفحه ۵۰ و ۲۰°C است. مقدار انتقال گرما در عرض این فضا را بیابید.

۷۷-۷ مسأله ۷-۷۶ را برای صفحاتی که افقی قرار گرفته و دمای سطح پایینی ۵۰°C باشد تکرار کنید.

۷۸-۷ دو صفحه عمودی به ابعاد ۱/۱ m × ۱/۱ با فاصله فضایی ۴/۰ cm با هوا از هم جدا شده‌اند. دماهای دوسطح ۳۰۰ و ۳۵۰ K است. مقدار انتقال گرما در این فضا را می‌توان با کاهش فشار هوا کم کرد. $\frac{k_e}{k}$ و مقدار R را به صورت تابعی از فشار محاسبه کرده، رسم کنید. مقدار فشار تا چه میزان کاهش یابد تا $\frac{k_e}{k} = ۱/۰$ شود؟

۷۹-۷ مسألهٔ ۷-۷۸ را برای دو صفحهٔ افقی با دمای سطح زیرین ۳۵۰ K تکرار کنید.

۸۰-۷ ضخامت فاصلهٔ هوایی در دیوار ساختمانی ۱۰ cm و ارتفاع آن ۲ m است. مقدار انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از این فاصلهٔ فضایی به ازای اختلاف دمای ۱۷°C را پیدا کنید.

۸۱-۷ عبارتی برای فاصلهٔ بهینه برای دو صفحه عمودی با هوای در میان آنها بیابید که مقدار انتقال گرمای حداکثر را به‌دست بدهد. به فرض انتقال گرما از هدایت خالص در $Gr_\delta > ۲۰۰۰$ ناشی شود. این فاصله بهینه را به صورت تابعی از اختلاف دما برای هوا به فشار ۱ atm رسم کنید.

۸۲-۷ هوا بین دو صفحه عمودی به دماهای ۱۰۰°C و ۲۰°C را پر کرده است. صفحات مربعی به ضلع ۱/۰ m هستند و فاصلهٔ آنها ۸ cm است. مقدار انتقال گرمای جابه‌جایی در عرض فاصلهٔ هوایی را بیابید.

۸۳-۷ بخش خاصی از یک شیشهٔ عایق کننده، از دو صفحهٔ شیشه‌ای مربعی به ضلع ۳۰ cm، ساخته شده‌اند که به فاصلهٔ ۱ cm از هم قرار گرفته و فضای بین آنها را هوا پر کرده است. درصد کاهش مقدار انتقال گرمابرای

این آرایش را به جابه‌جایی آزاد از صفحه‌ای عمودی با اختلاف دمای ۳۰°C حساب کنید.

۸۴-۷ یک طریق کاهش اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد در کلکتور آفتابی افقی آنست که فشار هوای فاصلهٔ فضایی بین شیشه شفافی که اجازه عبور به انرژی آفتابی می‌دهد و صفحه جاذب سیاه زیرین، را کم کنیم. به فرض دمای صفحه زیرین ۱۲۰°C و دمای سطح بالایی ۲۰°C باشد. چه فشارهایی وجود داشته باشند تا به ازای فواصل فضایی ۱ و ۲ و ۵ و ۱۰ cm، جابه‌جایی وجود نداشته باشد.

۸۵-۷ هوایی به دمای ۲۰°C و فشار ۱atm داخل لوله‌ای عمودی به قطر ۲/۵ cm و ارتفاع ۳۰ cm رانده می‌شود. آهنگ انتقال گرمای کل را برای وقتی محاسبه کنید که دمای دیوارهٔ لوله ۲۰۰°C و سرعت جریان هوا $45 \frac{cm}{s}$ باشد.

۸۶-۷ لوله‌ای افقی با دمای سطح ۵۵°C در معرض هوای جو به دمای ۲۷°C قرار دارد. با گرم کن برقی مناسبی که ورودی آن به ازای متر طولش ۱۷۵ W است به لوله گرما داده می‌شود. اگر دمای سطح به ۸۳°C بالا رود، توان ورودی مورد نیاز را بیابید.

۸۷-۷ صفحه عمودی بزرگی با دمای سطح ۱۴۰°F در معرض هوای به ۷۰°F و ۱ atm قرار دارد. موقعیتی عمودی روی صفحه بیابید که لایه مرزی در آنجا ناآرام می‌شود. $\frac{q}{A}$ متوسط در بخشی از صفحه قبل از این محل چیست؟ بیشینه سرعتِ لایه مرزی در این محل چه‌قدر است؟

۸۸-۷ فاصلهٔ هوایی افقی بالای یک کلکتور آفتابی، ۲/۵ cm است. دمای صفحه پایین ۷۰°C، در حالی که دمای صفحه بالایی ۳۰°C است. جابه‌جایی آزاد در عرض این فاصله را برای هوا در ۱ atm بیان کنید. اگر فاصله را به ۱/۰ cm کاهش دهیم، انتقال گرما چه‌قدر تغییر می‌کند؟

۸۹-۷ در نوعی کلکتور آفتابی، فشار فاصله هوا را آن قدر کاهش می‌دهند که آثار جابه‌جایی آزاد از بین می‌رود. برای فاصلهٔ هوایی مسأله ۷-۸۸ فشاری را که موجب حذف جابه‌جایی می‌شود تعیین کنید؛ یعنی $Gr\,Pr < ۱۷۰۰$.

۹۰-۷ دمای سطح کره‌ای به قطر ۲/۵ cm برابر ۱۲۰°F است و در معرض سیالی به دمای ۸۰°F قرار دارد. اتلاف گرما را برای (الف) هوا و (ب) آب، مقایسه کنید.

۹۱-۷ هوا در ۱ atm بین دو کره هم‌مرکز به قطرهای ۱۰ و ۸ cm و دماهای ۳۰۰ و ۳۵۰ K قرار دارد. انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد در عرض فاصله هوایی را بیابید.

۹۲-۷ می‌خواهیم برخی قوطی‌های کنسرو را از دمای اتاق ۳۰۰ K با قرار دادن در یخچالی به دمای ۲۷۵ K خنک کنیم. قطر و ارتفاع قوطی‌ها ۸/۰ cm است. آهنگ سرد کردن را حساب کنید. تقریباً چه‌قدر طول می‌کشد تا دمای قوطی به ۲۹۰K برسد به شرطی که محتوی آن خواص آب را داشته باشد؟

۹۳-۷ دمای دیسکی افقی به قطر ۵/۰ cm برابر ۱۲۰°F است و در آب به دمای ۸۰°F فروبرده می‌شود. گرمای تلف‌شده از بالا و کف دیسک را حساب کنید.

۹۴-۷ دمای سطح زیرین صفحه‌ای مربعی به ضلع ۱۰ cm برابر ۴۰۰ K است و در معرض هوا در ۱ atm و ۳۰۰ K قرار دارد. صفحه با قائم شیب ۴۵° دارد. گرمای تلف‌شده از سطح زیرین صفحه را بیابید.

۹۵-۷ انتقال گرمای صفحهٔ مسأله ۷-۹۴ را به شرطی محاسبه کنید که سطح گرمادیده رو به بالا باشد.

۹۶-۷ استوانه‌ای عمودی به ارتفاع ۵۰ cm و دمای ۴۰۰ K در معرض هوای ۱ atm و ۳۰۰ K است. بیشینه قطری را تعیین کنید که می‌توان به ازای آن از روابط صفحه تخت عمودی برای محاسبه انتقال گرما استفاده کرد. انتقال گرما برای این قطر چه‌قدر است؟

۹۷-۷ رابطه‌ای برای نسبت گرمای هدایت شده در یک لایهٔ هوا با چگالی پایین به مقداری که برای $\lambda = ۰$ هدایت می‌شود، به‌دست آورید. این نسبت را در مقابل $\frac{\lambda}{L}$ مربوط به $\alpha = ۰/۹$ و خواص هوای ارزیابی شده در ۳۵°C رسم کنید.

۹۸-۷ می‌خواهیم فوق عایقی را از ورقه‌های آلومینیم صیقلی بسازیم که به فاصله ۰/۸ mm از هم قرار دارند. فضای بین ورقه‌ها آب‌بندی است و تا فشار 10^{-5} atm از هوا تخلیه‌شده است. از چهار ورقه استفاده کرده‌ایم. دمای دو ورقه بیرونی به ترتیب ۳۵ و ۹۰°C و ضخامت آنها ۰/۷۵ mm است در حالی که ضخامت ورقه‌های داخلی ۰/۱۸ mm است. انتقال هدایتی و تابشی در عرض بخش لایه‌لایه را به ازای واحد سطح حساب کنید. به فرض در این محاسبات، ورقه‌های داخلی در تعیین انتقال گرمای تابشی "شناور" باشند. خواص را در ۶۵°C ارزیابی کنید.

۹۹-۷ دو صفحه صیقلی بزرگ به فاصلهٔ ۱/۳ mm از هم قرارگرفته، فضای بین آنها تا فشار 10^{-5} atm از هوا تخلیه‌شده است. خواص سطح صفحات به صورت $\alpha_1 = ۰/۰۸$، $\varepsilon_1 = ۰/۰۸$، $\alpha_2 = ۰/۹۵$، $\varepsilon_2 = ۰/۲۳$ است، که α ضریب مراوده است. دماهای صفحات $T_1 = ۷۰°C$ و $T_2 = ۴°C$ است. کل انتقال گرما بین صفحات به طریق تابش و هدایت چگالی پایین را بیابید.

۱۰۰-۷ صفحهٔ شیشه‌ای صافی با روکشی خاص پوشیده شده که هادی برق است و می‌تواند شرایط شار گرمایی ثابت تولید کند. یکی از این سطوح، ۰/۵ m^2، به طور عمودی در هوای اتاق به ۲۰°C آویزان است. چه شار گرمایی ایجاد می‌شود و توان برقی ورودی برای رسیدن به دمای سطح متوسط ۶۵°C روی هر دوطرف صفحه چه‌قدر است؟ فرض کنید که سطح صفحه تقریباً مانند جسم سیاه تابش می‌کند. به ازای همان دمای سطح متوسط چه مقدار گرما پخش می‌شود؟

۱۰۱-۷ صفحه مربعی و عمودی به ضلع ۲۰ cm تا دمای ۳۰°C گرما داده می‌شود و در گلیسرین به دمای ۱۰°C فرو برده می‌شود. گرمای تلف‌شده از دو طرف صفحه را بیابید.

۱۰۲-۷ دمای سطح استوانه‌ای عمودی به ارتفاع ۳۰ cm و قطر ۳۰ cm برابر ۴۳/۳°C است و در آب به ۱۰°C فرو برده می‌شود. گرمای تلف‌شده از کل سطح استوانه را بیابید.

۱۰۳-۷ بین دو صفحه عمودی به فاصله ۲ cm هوا قرار دارد. هوا تخلیه می‌شود به طوری که مسیر آزاد متوسط برابر فاصله دو صفحه می‌شود. یکی از

دو صفحه در ۴۰۰ K با $\varepsilon = ۰/۱$ است در حالی که دیگری در ۳۰۰ K با $\varepsilon = ۰/۱۵$ است. ضرایب مراوده دو سطح برابر ۰/۹ است. انتقال گرما بین دو صفحه را بیابید.

۷-۱۰۴ کره‌ای به قطر ۴۰ cm و به دمای ۴۰۰ K در معرض هوای اتاق با ۲۰°C قرار دارد. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از کره را محاسبه کنید. اگر سطح دارای $\varepsilon = ۰/۹$ باشد، اتلاف گرمای تابشی از کره را نیز حساب کنید.

۷-۱۰۵ دوصفحه مربعی به ضلع ۲۰ cm به دماهای ۳۵۰ و ۴۰۰ K هستند و به فاصله ۲ cm از هم قرار دارند. فضای بین صفحه‌ها با هلیم در ۲ atm پر شده است. انتقال گرما از فاصله فضایی را بیابید.

۷-۱۰۶ صفحه‌ای مربعی افقی به ضلع ۳۰ cm در معرض هوای به ۱ atm و ۲۵°C است. دمای دوطرف صفحه ۱۲۵°C است. اتلاف جابه‌جایی آزاد از صفحه را بیابید.

۷-۱۰۷ سیمی از جنس فولاد ضدزنگ افقی به قطر ۱ mm دارای $k = ۱۶ \frac{W}{m.^\circ C}$ و مقاومت مخصوص $۷۰ \mu\Omega.cm$ در معرض هوای ۱ atm و ۲۰°C قرار دارد. طول سیم ۱ m است. بیشینه دمایی که سیم به‌دست می‌آورد و ولتاژی را بیابید که باید به آن اعمال شود تا حالت دمای سطحی داده شده را ایجاد کند.

۷-۱۰۸ قطر استوانه‌ای عمودی ۱۰/۵ cm و ارتفاع آن ۳۰ cm است و در معرض هوای ۱ atm و ۱۵°C قرار دارد. دمای سطح استوانه ۱۰۰°C است. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از سطح استوانه را محاسبه کنید. فرض‌های خود را بیان کنید.

۷-۱۰۹ سیمی به قطر ۰/۰۲۵ mm به طور افقی در اتاقی به هوای ۱ atm و ۳۰۰ K قرار دارد. ولتاژی به سیم اعمال می‌شود که دمای سطح آن را به ۸۶۵ K می‌رساند. ضریب گسیل سطح سیم ۰/۹ است. اتلاف گرما از سیم به ازای واحد آن را به طریق جابه‌جایی آزاد و تابش حساب کنید.

۷-۱۱۰ دمای سطحی تخت به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲۰ cm برابر ۴۰۰ K است و در معرض هوای ۱ atm و ۳۰۰ K قرار دارد. اتلاف گرما از سطح بالایی مثلث را بیابید.

۷-۱۱۱ دمای دیسکی افقی به قطر ۱۰ cm برابر ۴۹°C است و در آب ۱ atm و ۱۰°C فرو برده می‌شود. اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد از سطح بالایی دیسک را حساب کنید.

مسائل طراحی

۷-۱۱۲ می‌خواهیم یک گرم‌کن جابه‌جایی آزاد طرح کنیم که $\frac{kJ}{h}$ ۱۰۰۰۰ را در هوای اتاق به ۳۰۰ k انتشار دهد. دمای سطح گرم‌کن نباید از ۳۵۰ K بیش‌تر شود. چهار طریق را در نظر بگیرید: (الف)تعدادی سطح عمودی، (ب)یک سطح عمودی، (ج)یک سطح افقی و (د)تعدادی سطح استوانه‌ای افقی. این چهار طریق را بررسی وطرحی پیشنهاد کنید.

۷-۱۱۳ می‌خواهیم شیشه پنجره عایق دو قاب خاص را از دو صفحه شیشه بسازیم که بین آنها هوا قرار دارد. صفحه‌ها مربعی به ضلع ۶۰ cm هستند و باید با دماهای ۱۰- و ۲۰°C به کار روند. به فرض که هوای شکاف ۱ atm باشد، جابه‌جایی آزاد در عرض فاصله دو شیشه را به صورت تابعی از فاصله برای پنجره‌ای عمودی محاسبه و رسم کنید. از نظر طراحی از این منحنی به چه نتایجی می‌رسید؟

۷-۱۱۴ مسألهٔ ۷-۱۱۳ را برای پنجره‌ای افقی که سطح گرم آن در زیر است تکرار کنید.

۷-۱۱۵ طرفداران بقای انرژی ادعا می‌کنند که پنجره‌های ضد طوفان می‌توانند اتلاف انرژی (یا دریافت آن‌را) خیلی کاهش دهند. پنجره‌ای عمودی و مربعی به ضلع ۱/۰m را در نظر بگیرید که دارای فاصلهٔ هوایی ۲/۵ cm است. شیشه داخلی به دمای ۱۵°C و شیشه ضد طوفان به دمای ۱۰°C- است. مقدار R را برای این فاصله هوایی حساب کنید. اگر به همین ضخامت لایه‌ای از فایبرگلاس به کار رود مقدار R چه‌قدر می‌شود؟

۷-۱۱۶ می‌خواهیم عایق گرمایی تخلیه‌شده از هوایی را طرح کنیم که دارای چند لایه ورقه‌های باز تابنده ($\varepsilon = ۰/۰۴$) است و بین آنها هوایی قرار دارد که مقداری تخلیه‌شده و فاصله δ آن‌قدر کوچک است که $\frac{k_e}{k} = ۱/۰$. این عایق باید در محدوده اختلاف دمایی از ۰°C تا ۲۰۰°C کار کند. امکان استفاده از ۱، ۲، ۳ یا ۴ فاصلهٔ هوایی را بررسی و در مورد اثر عوامل مختلف بر طرح بحث کنید، مثل اندازه فاصله هوایی و فشار تخلیه مورد نیاز برای ایجاد $\frac{k_e}{k} = ۱/۰$.

۷-۱۱۷ شخصی وقتی در نزدیکی پنجره‌ای در آپارتمان خود در زمستان می‌نشیند از "حرکت سریع هوا" (draft) گله می‌کند و می‌گوید پاهایش سرما می‌خورند. وی می‌گوید که به نظر می‌رسد درز پنجره هوای سرد را در زمستان به داخل می‌فرستد و نه هوای گرم را در تابستان. (منزل او تهویه مطبوع دارد و پنجره‌ها در تابستان نیز بسته هستند.) با استفاده از فرض‌هایی مناسب، مسأله حرکت سریع هوا را تحلیل و توضیح داده و ارزیابی‌های کمی از آنچه که حرکت سریع هوا می‌تواند باشد انجام دهید. در مورد سرماخوردگی یا چگونه تحلیل می‌کنید؟

۷-۱۱۸ در کانال تهویه مطبوعی بامقطع دایره، هوای سرد ۵°C جاری است و از فولاد ۱درصدکربن به ضخامت ۰/۲ mm ساخته شده و قطر بیرونی آن ۱۸ cm است. کانال افقی است و از هوای اتاق به دمای ۲۰°C گرما می‌گیرد. اگر سرعت متوسط هوای کانال $۷/۵ \frac{m}{s}$ باشد، افزایش دمای هوای کانال را در مسیر ۳۰ m حساب کنید. مفروض‌های خود را در رسیدن به جواب بیان کنید.

۷-۱۱۹ می‌خواهیم آزمایشی انجام دهیم که ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد از کره‌ها را با پیش‌گرم کردن کره‌های آلومینیمی به قطرهای مختلف تا دمایی اولیه و سپس پاسخ دمایی سردشدن هر کره تا حد دمای هوای اتاق را اندازه بگیریم. چون مقدار عدد بیو پایین است (ر.ک. به فصل ۴) می‌توان فرض کرد که کره مانند ظرفیت فشرده عمل می‌کند. پشت کره نیز سیاه شده است به طوری که اتلاف تابشی از سطح بیرونی از رابطه $q_{rad} = \sigma A_{surf}(T^4 - T_{sur}^4)$ به‌دست می‌آید، دماها به درجه کلوین هستند. با استفاده از اطلاعات این فصل رفتار منحنی سردشدن کره‌هایی آلومینیمی به قطر ۵ mm، ۲۵ mm و ۵۰ mm را از ۲۳۰°C تا هوای (اتاق) ۲۰°C پیش‌بینی کنید. چند وقت یک‌بار قرائت دمای کره‌ها و اتاق را پیشنهاد می‌کنید؟ انتظار دارید محدودهٔ اعداد ریلای این آزمایش‌ها چه‌باشد؟ آیا راهی برای هم‌بسته کردن داده‌ها برحسب گروه‌های بی‌بعد مهم سراغ دارید؟

۷-۱۲۰ در اخبار وضعیت هوای تلویزیون اغلب عبارت "ضریب سردی باد" (wind chill factor) بیان می‌شود. ضریب واقعی بر اساس داده‌های تجربی است. عبارتی برای سردی باد برپایه اطلاعات ارائه شده در فصل‌های ۶ و ۷ به‌دست آورید. برای به‌دست آوردن این رابطه می‌توانید فرض کنید که (۱) شخص ر ا می‌توان به صورت استوانه‌ای قائم به قطر ۳۰ cm و قد ۱/۸ m فرض کرد، (۲) سردی باد، دمای هوای معادلی را بیان می‌کند که این استوانه در جابه‌جایی آزاد وقتی که با جابه‌جایی اجباری به دمای محیط و سرعت u_∞، گرما از دست می‌دهد، (۳) اتلاف گرمای جابه‌جایی اجباری از استوانه را می‌توان از معادلهٔ (۶-۱۷) با مقادیر مناسبی از C و n به‌دست آورد، و (۴) جابه‌جایی آزاد از استوانه عمودی را می‌توان از رابطه‌های ساده شده جدول ۷-۲ به‌دست آورد. براساس این فرض‌ها، رابطه(هایی) برای پیش‌بینی سردی باد به ازای دمای محیط بین ۱۲- و ۱۰°C و سرعت‌های باد بین ۵ و $۴۰ \frac{mi}{h}$ $\left(۱ \frac{mi}{h} = ۰/۴۴۷ \frac{m}{s}\right)$ پیشنهاد کنید. علاوه بر فرض‌هایی که در بالا گفتیم باید مفروضات دیگری نیز در نظر گرفت. مفروضات خود را در رسیدن به رابطه(ها) برای سردی باد به روشنی ذکر کنید. در صورت امکان، سایر منابع اطلاعاتی را برای اثبات نتایج خود وارسی کنید. اگر اکنون در حال آزمایش با هوای زمستانی هستید، نتایج خود را باگزارش وضعیت هوای تلویزیون مقایسه کنید.

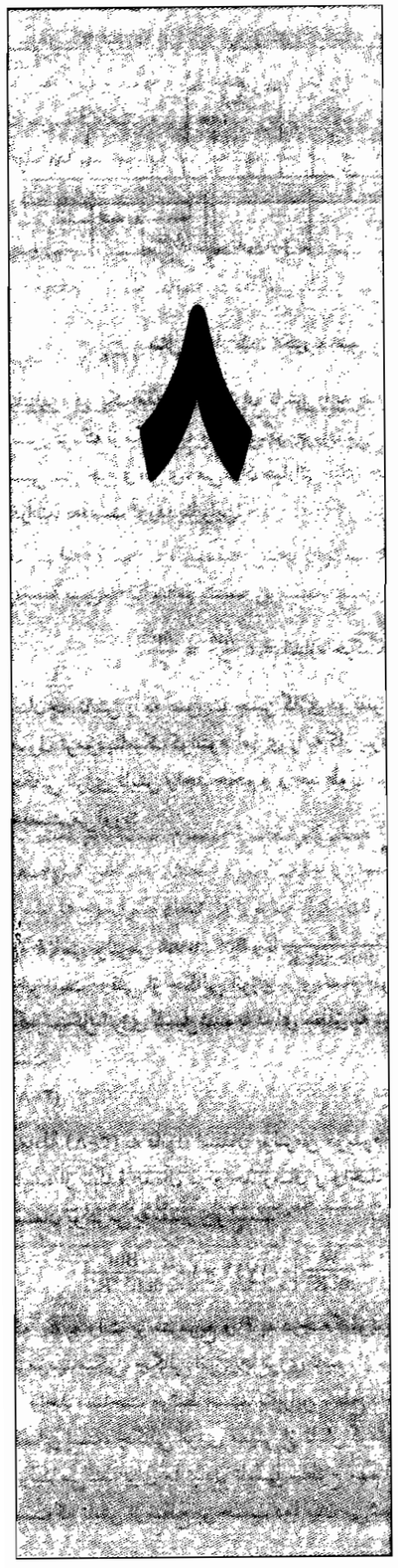
❑ مراجع

1. Eckert, E. R. G., and E. Soehngen: Interferometric Studies on the Stability and Transition to Turbulence of a Free Convection Boundary Layer, *Proc. Gen. Discuss. Heat Transfer ASME-IME, London, 1951.*
2. Eckert, E. R. G., and E. SOehngen: Studies on Heat Transfer in Laminar Free Convection With the Zehnder-Mach Interferometer, *USAF Tech. Rep.* 5747, December 1948.
3. Holman, J. P., H. E . Gartrell, and E. E. Soehngen: An Interferometric Method of Studying Boundary Layer Oscillations, *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 80, August 1960.
4. McAdams, W. H.: "Heat Transmission," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
5. Yuge, T.: Experiments on Heat Transfer from Spheres Including Combined Natural and Forced Convection, *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 82, P. 214, 1960.
6. Jakob, M.: Free Convection through Enclosed Gas Layers, *Trans. ASME,* vol. 68, p. 189, 1946
7. Jakob, M.: "Heat Transfer," vol.1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.
8. Globe, S., and D. Dropkin: *J. Heat Transfer,* February 1959, PP. 24–28.
9. Evans, L. B., and N.E. Stefany: An Experimental Study of Transient Heat Transfer to Liquids in Cylindrical Enelosures, *AIChE P ap. 4, Heat Transfer Conf Los Angeles, August 1965.*
10. Metais, B., and E. R. G. Eckert: Forced, Mixed, and Free Convection Regimes, *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 86, P. 295, 1964.
11. Bishop, E. N., L. R. Mack, and J. A. Scanlan: Heat Transfer by Natural Convection between Concentric Spheres, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol.9, P. 649, 1966.
12. Dropkin, D., and E. Somerscales: Heat Transfer by Natural Convection in Liquids Confined by Two Parallel Plates Whieh Are Inclined at Various Angles With Respect to the Horizontal, *J. Heat Transfer,,* vol. 87, P. 71, 1965.
13. Gebhart, B., Y. Jaluria, R. L. Mahajan, and B. Sammakia: "Buoyancy Induced Flows and Transport, "Hemisphere Publishing Corp., New york, 1988.
14. Gebhart, B.: Natural Convection Flow, Instability, and Transition, *ASME Pap.* 69-HT-29, August 1969.
15. Mollendorf, J. C., and B. Gebhart: An Experimental Study of Vigorous Transient Natural Convection, *ASME Pap.* 70-HT-2, May 1970.
16. Bayley, F. J.: An Analysis of Turbulent Free Convection Heat Transfer, *Proc. Inst. Mech. Eng.,* vol. 169, no. 20, P. 361, 1955.

17. Brown, C. K., and W. H. Gauvin: combined Free and Forced Convection, I, II, *can. J. Chem. Eng.,* vol. 43, no. 6, PP. 306, 313, 1965.
18. MacGregor, R. K., and A. P. Emery: free Convection through Vertical Plane Layers: Moderate and High Prandtl Number Fluids, *J. Heat Transfer,* vol. 91, P. 391, 1969.
19. Newell, M. E., and F. W. Schmidt: Heat Transfer by Laminar Natural Convection Within Rectangular Enclosures, *J. Heat Transfer,,* vol. 92, PP. 159-168, 1970.
20. Husar, R. B., and E. M. Sparrow: Patterns of Free Coneetion Flow Adjacent to Horizontal Heated Surfaces, *Int. J. Heat Mass Trans.,* vol. 11, P. 1206, 1968.
21. Habne, E. W. P.: Heat Transfer and Natural Convcction Patterns on a Horizontal Circular Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 12, P. 651, 1969.
22. Warner, C. Y., and V. S. Arpaci: an Experimental Investigation of Turbulent Natural Convection in Air at Low Pressure along a Vertical Heated Flat Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 11, P. 397, 1968.
23. Gunness, R. C., Jr., and B. Gebhart: Stability of Transient Convection, *Phys. Fluids,* vol. 12, P. 1968, 1969.
24. Rotern, Z., and L. Claassen: Natural Convection above Unconfined Horizontal Surfaces, *J. Fluid Mech.,* vol. 39, pt. 1, P. 173, 1969.
25. Vliet, G. C.: Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surfaces, *J. Heat Transfer,* vol. 91, P. 511, 1969.
26. Vliet, G. C., and C. K. Lin: An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers, *J. Heat Transfer,* vol. 91, P. 517, 1969.
27. Ostrach, S.: An Analysis of Laminar-Free-Conveetion Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force, *NACA Tech. Rep.* 1111, 1953.
28. Cheesewright, R.: Turbulent Natural Convection from a Vertical plane Surface, *J. Heat Transfer,* vol. 90, P. 1, February 1968.
29. Flack, R. D., and C. L. Witt: Velocity Measurements in TWo Natural Convection Air Flows Using a Laser Veldcimeter, *J. Heat Transfer,* vol. 101, P. 256, 1979.
30. Eekert, E. R. G., and T. W. Jackson: Analysis of Turbulent Free Convection Boundary Layer on a Flat Plate, *NACA Rep.* 1015, 1951.
31. King, W. J.: The Basic Laws and Data of Heat Transmission, *Mech. Eng.,* vol. 54, p. 347, 1932.
32. Sparrow, E. M., and J. L. Gregg: Laminar Free Convection from a Vertical Flat Plate, *Trans. ASME,* vol. 78, p. 435, 1956.
33. Benard, H.: Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur Par convection en régime permanent, *Ann. Chim. Phys.,* vol. 23, pp. 62-144, 1901.
34. "Progress in Heat and Mass Transfer," vol. 2, Eckert Presentation Volume, Pergamon Press, New York, 1969.
35. Gebhart, B., T. Audunson, and L. Pera: *Fourth Int. Heat Transfer Conf., Paris, August 1970.*
36. Sanders, C. J., and J. P. Holman: Franz Grashof and the Grashof Number, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. I5, P. 562, 1972.
37. Clifton, J. V., and A. J. Chapman: Natural Convection on a Finite-Size Horizontal Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 12, p. 1573, 1969.
38. Emery, A. F., H. W. Chi, and J. D. Dale: Free Convection trough Vertical Plane Layers of Non-Newtonian Power Law Fluids, *ASME Pap.* 70-WA/HT-I.
39. Vlict, G. C.: Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surfaces, *Trans. ASME,* vol. 91C, p. 511, 1969.
40. Bergles, A. E., and R. R. Simonds: Combined Forced and Free Convection for Laminar Flow in Horizontal

Tubes With Uniform Heat Flux, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 14, p. 1989, 1971.
41. Aihara, T., Y. Yamada, and S. Endo: Free Convection along the Downward-facing Surface of a Heated Horizontal Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 15, p. 2535, 1972.
42. Saunders, O. A., M. Fishenden, and H. D. Mansion: Some Measurement of Convection by an Optical Method, *Engineering,* p. 483. May 1935.
43. Weber, N., R. E. Rowe, E. H. Bishop, and J. A. Scanlan: Heat Transfer by Natural Convection between Vertically Eccentric Spheres, *ASME Pap.* 72-WA/HT-2.
44. Fujii, T., and H. Imura: Natural Convection Heat Transfer from a Plate With Arbitrary Inclination, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 15, p. 755, 1972.
45. Pera, L., and B. Gebhart: Natural Convection Boundary Layer Flow over Horizontal and Slightly Inclined Surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 1131, 1973.
46. Hyman, S. C., C. F. Bonilla, and S. W. Ehrlich: Heat Transfer to Liquid Metals from Horizontal Cylinders, *AiChE Symp. Heat Transfer, Atlantic City, 1953,* p. 21.
47. Fand, R. M., and K. K. Keswani: Combined Natural and Forced Convection Heat Transfer from Horizontal Cylinders to Water, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 175, 1973.
48. Dale, J. D., and A. F. Emery: The Free Convection of Heat from a Vertical Plate to Several Non-Newtonian Pseudoplastic Fluids, *ASME Pap.* 71-HT-s.
49. Fujii, T., O. Miyatake, M. Fujii, H. Tanaka, and K. Murakami: Natural Convective Heat Transfer from a Vertical Isothermal Surface to a Non-Newtonian Sutterby Fluid, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 2177, 1973.
50. Soehngen, E. E.: Experimental Studies on Heat Transfer at Very High Prandtl Numbers, *Prog. Heat Mass Transfer,* vol. 2, p. 125, 1969.
51. Vliet, G. C., and D. C. Ross: Turbulent Natural Convection on Upward and Downward Facing Inclined Constant Heat Flux Surfaces, *ASME Pap.* 74-WA/HT-32.
52. Llyod, J. R., and W. R. Moran: Natural Convention Adjacent to Horizontal Surface of Various Planforms, *ASME Pap.* 74-WA/HT-66.
53. Goldstein, R. J. E. M. Sparrow, and D. C. Jones: Natural Convection Mass Transfer Adjacent to Horizontal Plates, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 1025, 1973.
54. Holman, J. P., and J. H. Boggs: Heat Transfer to freon 12 near the Critical State in a Natural Circulation Loop, *J. Heat Transfer,,* vol. 80, p. 221, 1960.
55. Mull, W., and H. Reiher; Der Wa¨rmeschutz von Luftschichten, *Beih. Gesund. Ing.,* ser. 1, no. 28, 1930.
56. Krasshold, H.: Wärmeabgabe von zylindrischen Flussigkeitsschichten bei natürlichen Konvektion, *Forsch. Geb. Ingenieurwes,* vol. 2, p. 165, 1931.
57. Beckmann, W.: Die Wärmeübertragung in zylindrischen Gasschichten bei natürlicher Konvektion, *Forsch. Geb. Ingenieurwes,* vol. 2, p. 186, 1931.
58. Schmidt, E.:Free Convection in Horizontal Fluid Spaces Heated from Below. *Proc. Int. Heat Transfer Conf., Boulder, Col., ASME,* 1961.
59. Graff, J. G. A., and E. F. M. Van der Held: The Relation between the Heat Transfer and convection Phenomena in Enclosed Plain Air Players, *Appl. Sci. Res.,* ser. A, vol. 3, p. 393, 1952.
60. Liu, C. Y., W. K. Mueller, and F. Landis: Natural Convection Heat Transfer in Long Horizontal Cylindrical Annuli, *Int. Dev. Heat Transfer,* pt. 5, pap. I17, p. 976, 1961.
61. Emery, A., and N. C. Chu: Heat Transfer across Vertical Layers, *J. Heat Transfer,,* vol. 87, p. 110, 1965.
62. O'Toole, J., and P. L. Silveston: Correlation of Convective Heat Transfer in Confined Horizontal Layers, *Chem. Eng. Prog. Symp.,* vol. 57, no. 32, p. 81, 1961.

63. Goldstein, R. J., and T. Y. Chu: Thermal Convection in a Horizontal Layer of Air, *Prog. Heat Mass Transfer,* vol. 2, p, p. 55, 1969.
64. Singh, S. N., R. C. Bircebak, and R. M. Drake: Laminar Free Convection Heat Transfer from Downward-facing Horizontal Surfaces of Finite Dimensions *Prog. Heat Mass Transfer,* vol. 2, P. 87, 1969.
65. McDonald, J. S., and T. J. Connally: Investigation of Natural Convection Heat Transfer in liquid Sodium, *Nucl Sci. Eng.,* vol. 8, p. 369, 1960.
66. Hollands, K. G. T., G. D. Raithby, and L. Konicek: Correlation Equations for Free Convection Heat Transfer in Horizontal Layers of Air and Water, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 879, 1975.
67. Hollands, K. G. T., T. E. Unny, and G. D. Raithby: Free Convective Heat Convective Heat Transfer across Inclined Air Layers, *ASME Pap.* 75-HT-55, August 1975.
68. Depew, C. A., J. L. Franklin, and C. H. Ito: Combined Free and Forced Convection in Horizontal, Uniformly Heated Tubes, *ASME PAp.* 75-HT-19, August 1975.
69. Raithby, G. D., and K. G. T. Hollands: A General Method of Obtaining Approximate Solutions to Laminar and Turbulent Free Convection Problems, *Advances in Heat Transfer,* Academic Press, New York, 1974.
70. Churchill, S. W., and H. H. S. Chu: Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 1049, 1975.
71. Churchill, S. W., and H. H. S. Chu: Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 1323, 1975.
72. Churchill, S. W.: A Comprehensive Correlating Equation for Laminar, Assisting, Forced and Free Convection, *AiChE J.,* vol. 23, no. 1, p. 10, 1977.
73. Al-Arabi, M., and Y. K. Salman: Laminar Natural Convection Heat Transfer from an Inclined Cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 23, pp. 45-51, 1980.
74. Holman, J. P.: "Heat Transfer," 4th ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
75. Hatfield, D. W., and D. K. Edwards: Edge and Aspect Ratio Effects on Natural Convection from the Horizontal Heated Plate Facing DownWards, *Int, J. Heat Mass Transfer,* vol. 24, p. 1019, 1981.
76. Morgan, V.T.: "The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders," "Advances in Heat Transfer" (T. F. Irvine and J. P. Hartnett, eds.), vol. 11, Academic Press, Inc., New York, 1975.
77. Sparrow, E. M., and M. A. Ansari: A Refutation of King's Rule for Multi-Dimensional External Natural Convection, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 26, p. 1357, 1983.
78. Lienhard, J. H.: on the Commonality of Equations for Natural Convection from Immersed Bodies, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 2121, 1973.
79. Amato, W. S., and C. L. Tien: Free Convection Heat Transfer from Isothermal Spheres in Water, *Int. J. Heat Mass Transfer,* Vol. 15, p. 327, 1972.
80. Warrington, R. O., and R. E. Powe: The Transfer of Heat by Natural Convection Between Bodies and Their Enelosures, *Int, J. Heat Mass Transfer,* vol. 28, p. 319, 1985.
81. Sparrow, E. M., and A. J. Stretton: Natural Convection from Bodies of Unity Aspect Ratio, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 28, p. 741, 1985.
82. El Sherbing, S. M., G. D. Raithby, and K. G. T. Hollands: Heat Transfer across Vertical and Inclined Air Layers, *J. Heat Transfer,* vol. 104C, p. 96, 1982.
83. Churchill, S. W.: Free Convection Around Immersed Bodies, p. 2.5.7-24, in G. F. Hewitt (ed.), *Heat Exchanger Design Handbook,* Hemisphere Publishing Corp., Washington, D. C., 1983.



۸

انتقال گرمای تابشی

۸-۱ مقدمه

در فصل‌های قبل نشان دادیم که چگونه به‌کمک تحلیل ریاضی و داده‌های تجربی می‌توان انتقال گرمای هدایتی و جابه‌جایی را محاسبه کرد. اکنون می‌خواهیم نوع سوم انتقال گرما، تابش گرمایی، را بررسی کنیم. **تابش گرمایی** آن تابش الکترومغناطیسی است که از جسم به خاطر دمای آن گسیل می‌شود در این فصل، نخست طبیعت تابش گرمایی، مشخصه‌های آن و خواصی را بیان می‌کنیم که از این پس در بیان مصالح از نظر تابش به کار می‌روند. سپس، انتقال تابش در فضا بررسی می‌شود. در انتها، مسأله کلی انتقال گرمای تابش گرمایی را با در نظر گرفتن اثر خواص مصالح و آرایش هندسی اجسام بر انرژی کلی مبادله شده تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

❑ ۸-۲ سازوکار فیزیکی

تابش الکترومغناطیسی انواع مختلف دارد که تابش گرمایی تنها نوعی از آن است. تابش بدون توجه به نوع آن با سرعت نور $۳\times۱۰^{۸}\ \frac{m}{s}$، انتشار می‌یابد. این سرعت برابر حاصل‌ضرب طول‌موج در بسامد (فرکانس) تابش است:

$$c = \lambda\nu$$

که c = سرعت نور
λ = طول‌موج
ν = بسامد

ممکن است واحد λ سانتی‌متر، آنگستروم ($۱\mathring{A} = ۱۰^{-۸}$ cm) و یا میکرومتر ($۱\mu m = ۱۰^{-۶}$ m) باشد. بخشی از طیف الکترومغناطیسی مطابق شکل ۸-۱ است. تابش گرمایی در محدوده طول‌موج از ۰/۱ تا ۱۰۰ μm قرار می‌گیرد، در حالی که بخش نور مرئی طیف خیلی باریکی است و از حدود ۰/۳۵ تا ۰/۷۵ μm گسترش می‌یابد.

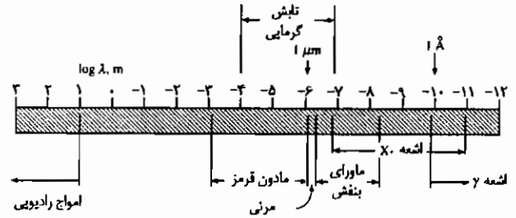
انتشار تابش گرمایی به شکل کوانتوم‌های گسسته صورت می‌گیرد که هر کوانتوم دارای انرژی زیر است:

$$E = h\nu \qquad (۸-۱)$$

که h ثابت پلانک و مقدار آن برابر است با:

$$h = ۶/۶۲۵ \times ۱۰^{-۳۴}\ J.s$$

تصور فیزیکی خیلی خام از انتشار تابشی آن است که هر کوانتوم را به صورت ذره‌ای دارای انرژی، جرم و اندازه حرکت درنظر بگیریم؛ درست همان‌طور که گاز را درنظر گرفتیم.



شکل ۸-۱ طیف الکترومغناطیسی.

بنابراین، در یک مفهوم، می‌توان تابش را به صورت «گاز فوتون» تصور کرد که از مکانی به مکان دیگر جریان دارد. با استفاده از رابطه نسبی بین جرم و انرژی، می‌توان عباراتی برای جرم و اندازه حرکت «ذرات» به‌دست آورد؛ بنابراین:

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$\text{اندازه حرکت} = c\,\frac{h\nu}{c^2} = \frac{h\nu}{c}$$

چنان‌چه تابش را به صورت چنین گازی در نظر بگیریم، می‌توان اصول ترمودینامیک کوانتوم آماری را به کار برد و عبارتی برای چگالی انرژی تابش واحد حجم و واحد طولِ موج به‌صورت* زیر به‌دست می‌آورد:

$$u_\lambda = \frac{\Lambda\,\pi h\,c\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \qquad (۲-۸)$$

که k ثابت بولتزمن Boltzmann و با $۱/۳۸۰۶۶\times۱۰^{-۲۳}\ \frac{\text{J}}{\text{molecule.K}}$ برابر است. وقتی از چگالی انرژی برای تمام طولِ‌موج‌ها انتگرال بگیریم، کل انرژی گسیل‌شده با دمای مطلق به توان چهار متناسب است:

$$E_b = \sigma T^4 \qquad (۳-۸)$$

معادلهٔ (۸-۳) به قانون استفان بولتزمن موسوم است و E_b انرژی تابیده از تابندهٔ ایده‌آل در واحد زمان و واحد سطح و σ ثابت استفان بولتزمن به‌مقدار زیر است:

$$\sigma = ۵/۶۶۹\times۱۰^{-۸}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2.\text{K}^4}\ \left[۰/۱۷۱۴\times۱۰^{-۸}\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^2.{}^\circ\text{R}^4}\right]$$

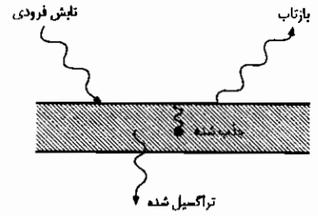
که E_b به وات بر مترمربع و T به درجه کلوین است. در تحلیل ترمودینامیکی، چگالی انرژی یا انرژی تابیده از سطح در واحد زمان و واحد مساحت مرتبط است. بنابراین سطح داخلیِ گرم شدهٔ یک فضای بسته، چگالیِ انرژیِ معینی از تابش گرمایی آن محیط بسته تولید می‌کند. برای ما تبادل تابشی سطوح مهم است و برای همین است که تابش از سطح بر حسب دما بیان می‌شود. زیر نویس b در معادله (۸-۳) معرف تابش از جسمِ‌سیاه است. این را ***تابش جسم‌سیاه*** می‌نامیم زیرا مصالحی که از این قانون تبعیت می‌کنند سیاه به نظر می‌رسند؛ آنها سیاه به نظر می‌رسند زیرا هیچ تابشی را بازنمی‌تابند. بنابراین جسمِ‌سیاه نیز جسمی است که تمام تابش برخوردی را جذب می‌کند. E_b را ***توان پخش جسم‌سیاه*** می‌نامند.

اکنون مهم است گفته شود که «سیاهی» سطح به تابش گرمایی ممکن است از نظر بینایی کاملاً گمراه کننده باشد. سطحی که با دودهٔ چراغ پوشیده شده، به نظر سیاه می‌رسد و برای طیف تابش گرمایی نیز سیاه است. اما برف و یخ به نظر کاملاً روشن می‌رسند ولی برای تابش گرمایی طولِ‌موج بلند، اساساً «سیاه»اند. بسیاری از رنگ‌های سفید نیز اساساً برای تابش طولِ‌موج بلند، سیاه هستند. پیرامون این نکته در بخش‌های بعدی مشروح‌تر بحث می‌کنیم.

❑ ۸-۳ خواص تابش

وقتی انرژی تابیده به سطحی مادی اصابت می‌کند، بخشی از تابش مطابق شکل ۸-۲ بازمی‌تابد، بخشی جذب و بخشی از آن تراگسیل می‌شود، ضریب بازتاب ρ را به‌صورت کسری که بازتابیده، ضریب جذب α را به‌صورت کسری که جذب‌شده و ضریب تراگسیل τ را به‌صورت کسری که تراگسیل‌شده تعریف می‌کنیم. بنابراین:

$$\rho + \alpha + \tau = ۱ \qquad (۴-۸)$$



شکل ۸-۲ طرح نشان دهنده آثار تابش فرودی.

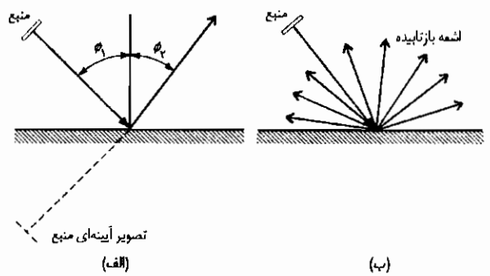
اغلب اجسام صلب تابش گرمایی را تراگسیل نکرده، از این‌رو در بسیاری از مسائل کاربردی می‌توان ضریب تراگسیل را برابر صفر گرفت. پس:

$$\rho + \alpha = ۱$$

وقتی تابش به سطحی برخورد می‌کند، دو قسم پدیدهٔ بازتاب را می‌توان مشاهده کرد. چنان‌چه زاویهٔ برخورد برابر زاویهٔ بازتاب باشد، بازتاب را ***آیینه‌ای*** می‌نامند و اگر پرتو برخوردی، پس از بارتاب در تمام جهات به‌طور یکنواخت پخش شود، بازتاب را

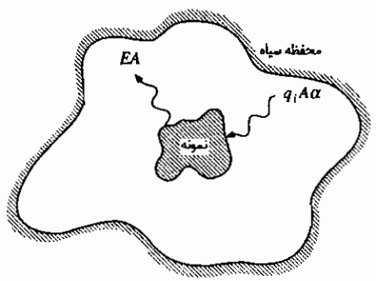
* مثلاً ترمودینامیک اثر جی. پی. هولمن ویرایش چهارم از انتشارات مک گروهیل، ۱۹۸۸ صفحهٔ ۳۵۰ را بخوانید.

پخشنده (diffuse) می‌نامند. این دو نوع بازتاب در شکل ۸-۳ نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که بازتاب آیینه‌ای تصویری آیینه‌ای از منبع را به ناظر نشان می‌دهد. هیچ سطح واقعی آیینه‌ای یا پخشنده نیست. یک آیینه معمولی برای نور مرئی کاملاً آیینه‌ای است ولی برای کل محدوده طول‌موج تابش گرمایی، ضرورتاً آیینه‌ای نخواهد بود. معمولاً سطح ناهموار نسبت به سطح خیلی صیقلی رفتار پخشنده بهتری را نشان می‌دهد. هم‌چنین سطح صیقلی آیینه‌ای‌تر است تا سطح ناهموار. اثر ناهمواری سطح بر خواص تابش - گرمایی مواد، قابل توجه جدی بوده، موضوعی برای تحقیقات بعدی باقی می‌ماند.



شکل ۸-۳ (الف) آیینه‌ای ($\phi_2 = \phi_1$) (ب) بازتاب پخشنده.

توان گسیل جسم E به عنوان انرژی گسیل‌شده توسط آن جسم به ازای واحد مساحت و واحد زمان تعریف می‌شود. ممکن است بخواهید رابطه‌ای بین توان گسیل جسم و خواص ماده بیابید که در بالا تعریف شد. به فرض محفظه‌ای کاملاً سیاه، محفظه‌ای که تمام تابش برخوردی را جذب می‌کند، موجود باشد؛ مطابق شکل شماتیک ۸-۴. این محفظه طبق قانون T^4 نیز تابش گسیل دارد.



شکل ۸-۴ طرحی که مدل به‌کار رفته در به‌دست آوردن قانون کیرشهف را نشان می‌دهد.

فرض کنید که شار تابشی که به سطحی در محفظه مزبور می‌رسد $q_i\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ باشد. اکنون فرض کنید جسمی را در داخل این محفظه قرار دهند و بگذارند که با آن به یک تعادل گرمایی برسد. در تعادل، انرژی جذب‌شده توسط جسم باید برابر انرژی گسیل‌شده باشد و گرنه جریان انرژی به داخل یا به خارج جسم وجود خواهد داشت که دمای آن را بالا یا پایین خواهد برد. در تعادل می‌توان نوشت:

$$EA = q_i A\alpha \qquad (۵-۸)$$

اکنون اگر به جای جسم داخل محفظه، جسم‌سیاه هم‌اندازه و هم‌شکل آن قرار دهیم و بگذاریم که، در ***همان دما***، با محفظه به تعادل برسد:

$$E_b A = q_i A(۱) \qquad (۶-۸)$$

زیرا ضریب جذب جسم‌سیاه برابر واحد است. اگر طرفین معادله (۸-۵) را به طرفین معادلهٔ(۸-۶) تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{E}{E_b} = \alpha$$

و درمی‌یابیم که نسبت توان پخش جسم‌سیاه در ***همان دما*** برابر ضریب جذب آن جسم است. این نسبت به‌عنوان ***ضریب گسیل جسم*** ε تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} \qquad (۷-۸)$$

بنابراین

$$\varepsilon = \alpha \qquad (۸-۸)$$

معادله (۸-۸) به " همانیِ‌کیرشهف " موسوم است. باید گفت که ضرایب گسیل و ضرایب جذب مورد بحث، خواص ***کل*** ماده خاص‌اند؛ یعنی رفتار کل ماده را در تمام طولِ‌موج‌ها نشان می‌دهند. با اندازه‌گیری ضریب گسیل مواد مشخص می‌شود که عناصر واقعی کم‌تر از سطوح سیاه و ایده‌آل تابش گسیل می‌دارند. در حقیقت، ضریب گسیل ماده با دما و طولِ‌موج تابش تغییر می‌کند.

جسم خاکستری

جسم خاکستری جسمی است که ضریب گسیل تک‌فام آن ε_λ مستقل از طولِ‌موج است. ***ضریب گسیل تک‌فام*** به‌صورت نسبت توان گسیل تک‌فام جسم به توان گسیل تک‌فام جسم‌سیاه با همان‌طولِ‌موج و دما تعریف می‌شود. بنابراین:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$$

ضریب گسیل کل جسم به ضریب گسیل تک‌فام به‌صورت زیر مربوط می‌شود:

$$E = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda \quad \text{و} \quad E_b = \int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda = \sigma T^4$$

بنابراین :

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda}{\sigma T^4} \qquad (۸-۹)$$

که $E_{b\lambda}$ توان گسیل جسم‌سیاه به ازای طولِ‌موج واحد است. چنان‌چه شرط جسم خاکستری اعمال شود، یعنی ε_λ = ثابت، معادله (۸-۹) چنین می‌شود:

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda \qquad (۸-۱۰)$$

ضرایب گسیل مواد مختلف به‌طور گسترده‌ای با طولِ‌موج، دما و حالت سطح تغییر می‌کند. بعضی از مقادیر نمونه ضریب گسیل کل سطوح مختلف در پیوست A ارائه شده‌اند. توجه کنید که در مقادیر جدول شده، عدم اطمینان تجربی بسیاری وجود دارد. بررسی بسیار کامل خواص تابشی در مرجع ۱۴ ارائه شده است.

پلانک با وارد کردن مفهوم کوانتومی برای انرژی الکترومغناطیسی، برای $E_{b\lambda}$ رابطه تابعی به‌دست آورده است. این رابطه معمولاً در حال حاضر با روش‌های ترمودینامیک آماری به‌دست می‌آید و نشان داده می‌شود که $E_{b\lambda}$ با چگالی انرژی معادله (۸-۲) به‌صورت زیر رابطه دارد:

$$E_{b\lambda} = \frac{u_\lambda\, c}{4} \qquad (۸-۱۱)$$

یا :

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1\, \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \qquad (۸-۱۲)$$

که λ = طولِ‌موج، μm

T = دما، K

C_1 = $3/743\times10^8 \frac{W.\mu m^4}{m^2}$ $\left[1/187\times10^8 \frac{Btu.\mu m^4}{h.ft^2}\right]$

C_2 = $1/4387\times10^4 \mu m.K$ $[2/5896\times10^4 \mu m.°R]$

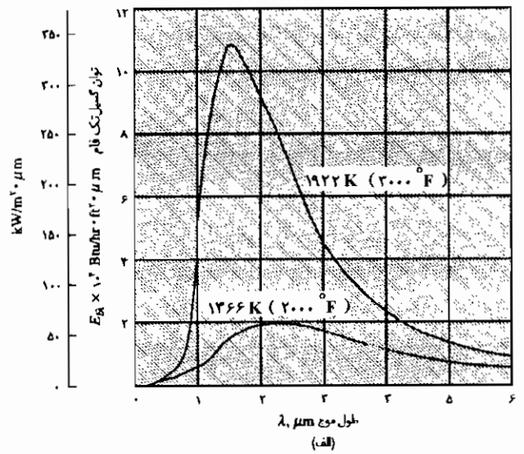
منحنی $E_{b\lambda}$ به صورت تابعی از دما و طولِ‌موج در شکل (۸-۵الف) نشان داده شده است. توجه کنید که اوج منحنی در دماهای بالاتر با طولِ‌موج‌های کوتاه‌تر ایجاد می‌شود. این نقاط بیشینه در منحنی‌های تابش به‌وسیله قانون جابه‌جایی وین Wien به هم ربط داده می‌شود:

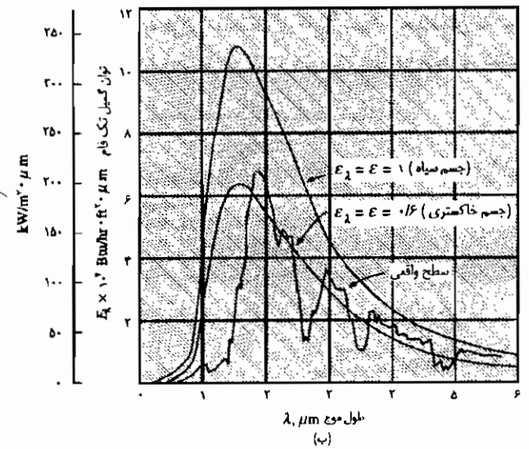
$$\lambda_{max}\, T = 2897/6\ \mu m.K \quad [5215/6\ \mu m.°R] \qquad (۸-۱۳)$$

شکل (۸-۵ ب) بیناب‌های تابش نسبی از جسم‌سیاه در ۳۰۰۰°F و جسم خاکستری ایده‌آل متناظر آن با ضریب گسیل برابر ۰/۶ را نشان می‌دهد. هم چنین منحنی رفتار تقریبی سطح واقعی نمایش داده شده است که خیلی با منحنی جسم‌سیاه ایده‌آل یا جسم خاکستری ایده‌آل متفاوت است.

سطوح را معمولاً در تحلیل‌ها به‌صورت خاکستری در نظر می‌گیرند که ضرایب گسیل آنها برابر مقدار متوسط انتگرال‌گیری شده است.

تغییر مکان نقطهٔ بیشینه منحنی تابش، بیانگر تغییر رنگ جسم در اثر گرم شدن است. چون نوار طولِ‌موج‌های مرئی بین حدود ۰/۳ تا ۰/۷ μm است، تنها بخش خیلی کوچکی از طیف انرژی - تابشی در دماهای پایین را چشم تشخیص می‌دهد. وقتی جسم را گرم‌کنیم، شدت بیشینه به طولِ‌موج‌های کوتاه‌تر تغییر مکان یافته و اولین علامت مرئی افزایش دمای جسم، رنگ تیره - قرمز است. وقتی باز هم دما بالا رود رنگ به نظر قرمز روشن رسیده، سپس زرد روشن و در نهایت سفید می‌شود. جسم نیز در دماهای بالاتر خیلی روشن‌تر به نظر می‌رسد زیرا بخش زیادی از تابش کل در محدوده قابل رؤیت قرار دارد.





شکل ۸-۵ (الف) توان گسیل جسم‌سیاه به‌صورت تابعی از طولِ‌موج و دما، (ب) مقایسه توان گسیل اجسام سیاه و اجسام خاکستری ایده‌آل با توان گسیل سطح واقعی.

گاه می‌خواهیم مقدار انرژی تابیده از جسمی سیاه را در محدودهٔ طولِ‌موج مشخص و معین پیدا کنیم. کسری از انرژی کل که بین ۰ و λ تابیده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_{b_{0-\lambda}}}{E_{b_{0-\infty}}} = \frac{\int_0^\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda}{\int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda} \qquad (۸-۱۴)$$

معادلهٔ (۸-۱۲) را می‌توان با تقسیم دو طرف آن بر T^5 چنین نوشت:

$$\frac{E_{b\lambda}}{T^5} = \frac{C_1}{(\lambda T)^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)} \qquad (۸-۱۵)$$

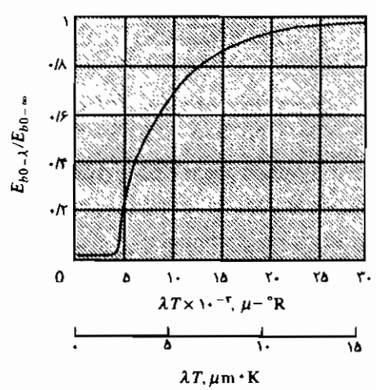
حال انتگرال‌های معادلهٔ (۸-۱۴) را می‌توان برای هر دمای مشخص، برحسب تنها متغیر λT بیان کرد. دانکل Dunkle [۲] نتایج مربوطه را جدول‌بندی کرده است. نسبت معادله (۸-۱۴) در شکل ۸-۶ ترسیم و در جدول ۸-۱، جدول‌بندی شده است. انرژی تابشی گسیل‌شده بین طولِ‌موج‌های λ_1 و λ_2 برابر است با:

$$E_{b_{\lambda_1-\lambda_2}} = E_{b_{0-\infty}} \left(\frac{E_{b_{0-\lambda_2}}}{E_{b_{0-\infty}}} - \frac{E_{b_{0-\lambda_1}}}{E_{b_{0-\infty}}}\right) \qquad (۸-۱۶)$$

که $E_{b_{0-\infty}}$ کل تابش گسیل‌شده در تمام طولِ‌موج است:

$$E_{b_{0-\infty}} = \sigma T^4 \qquad (۸-۱۷)$$

و مقدار آن را با انتگرال‌گیری فرمول پخش پلانک، معادله ۸-۱۲، در تمام طولِ‌موج‌ها به‌دست می‌آوریم.



شکل ۸-۶ کسر تابش جسم‌سیاه در بازهٔ طولِ‌موج.

طیف تابش خورشیدی تقریباً مثل طیف جسم‌سیاه در ۵۸۰۰K است. شیشهٔ پنجره معمولی تابش را تا ۲/۵μm تراگسیل می‌کند. با مراجعه به جدول ۸-۱ متوجه می‌شویم که به‌ازای $\lambda T = (2/5\times5800) = 14500\ \mu m.K$ به کسری از طیف خورشیدیِ زیر

جدول ۸-۱ توابع تابش

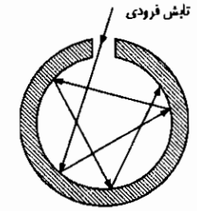
λT		$\frac{E_{b_\lambda}}{T^5}$			
		Btu	W		
μm.°R	μm.K	h.ft².°R⁵.μm×۱۰¹⁰	m².K⁵.μm×۱۰¹¹	$\frac{E_{b_{0-\lambda T}}}{\sigma T^4}$
۱,۰۰۰	۵۵۵/۶	۰/۰۰۰۶۷۱	۰/۴۰۰×۱۰⁻⁵	۰/۱۷۰×۱۰⁻⁷
۱,۲۰۰	۶۶۶/۷	۰/۰۲۰۲	۰/۱۲۰×۱۰⁻³	۰/۷۵۶×۱۰⁻⁶
۱,۴۰۰	۷۷۷/۸	۰/۲۰۴	۰/۰۰۱۲۲	۰/۱۰۶×۱۰⁻⁴
۱,۶۰۰	۸۸۸/۹	۱/۰۵۷	۰/۰۰۶۳۰	۰/۷۳۸×۱۰⁻⁴
۱,۸۰۰	۱,۰۰۰/۰	۳/۵۴۴	۰/۰۲۱۱۱	۰/۳۲۱×۱۰⁻³
۲,۰۰۰	۱,۱۱۱/۱	۸/۸۲۲	۰/۰۵۲۵۴	۰/۰۰۱۰۱
۲,۲۰۰	۱,۲۲۲/۲	۱۷/۷۷۶	۰/۱۰۵۸۷	۰/۰۰۲۵۲
۲,۴۰۰	۱,۳۳۳/۳	۳۰/۶۸۶	۰/۱۸۲۷۵	۰/۰۰۵۳۱
۲,۶۰۰	۱,۴۴۴/۴	۴۷/۱۶۷	۰/۲۸۰۹۱	۰/۰۰۹۸۳
۲,۸۰۰	۱,۵۵۵/۶	۶۶/۳۳۴	۰/۳۹۵۰۵	۰/۰۱۶۴۳
۳,۰۰۰	۱,۶۶۶/۷	۸۷/۰۴۷	۰/۵۱۸۴۱	۰/۰۲۵۳۷
۳,۲۰۰	۱,۷۷۷/۸	۱۰۸/۱۴	۰/۶۴۴۰۴	۰/۰۳۶۷۷
۳,۴۰۰	۱,۸۸۸/۹	۱۲۸/۵۸	۰/۷۶۵۷۸	۰/۰۵۰۵۹
۳,۶۰۰	۲,۰۰۰/۰	۱۴۷/۵۶	۰/۸۷۸۷۸	۰/۰۶۶۷۲
۳,۸۰۰	۲,۱۱۱/۱	۱۶۴/۴۹	۰/۹۷۹۶۳	۰/۰۸۴۹۶
۴,۰۰۰	۲,۲۲۲/۲	۱۷۹/۰۴	۱/۰۶۶۳	۰/۱۰۵۰۳
۴,۲۰۰	۲,۳۳۳/۳	۱۹۱/۰۵	۱/۱۳۷۸	۰/۱۲۶۶۵
۴,۴۰۰	۲,۴۴۴/۴	۲۰۰/۵۱	۱/۱۹۴۲	۰/۱۴۹۵۳
۴,۶۰۰	۲,۵۵۵/۶	۲۰۷/۵۵	۱/۲۳۶۱	۰/۱۷۳۳۷
۴,۸۰۰	۲,۶۶۶/۷	۲۱۲/۳۲	۱/۲۶۴۵	۰/۱۹۷۸۹
۵,۰۰۰	۲,۷۷۷/۸	۲۱۵/۰۶	۱/۲۸۰۸	۰/۲۲۲۸۵
۵,۲۰۰	۲,۸۸۸/۹	۲۱۶/۰۰	۱/۲۸۶۴	۰/۲۴۸۰۳
۵,۴۰۰	۳,۰۰۰/۰	۲۱۵/۳۹	۱/۲۸۲۷	۰/۲۷۳۲۲
۵,۶۰۰	۳,۱۱۱/۱	۲۱۳/۴۶	۱/۲۷۱۳	۰/۲۹۸۲۵
۵,۸۰۰	۳,۲۲۲/۲	۲۱۰/۴۳	۱/۲۵۳۲	۰/۳۲۳۰۰
۶,۰۰۰	۳,۳۳۳/۳	۲۰۶/۵۱	۱/۲۲۹۹	۰/۳۴۷۳۴
۶,۲۰۰	۳,۴۴۴/۴	۲۰۱/۸۸	۱/۲۰۲۳	۰/۳۷۱۱۸
۶,۴۰۰	۳,۵۵۵/۶	۱۹۶/۶۹	۱/۱۷۱۴	۰/۳۹۴۴۵
۶,۶۰۰	۳,۶۶۶/۷	۱۹۱/۰۹	۱/۱۳۸۰	۰/۴۱۷۰۸
۶,۸۰۰	۳,۷۷۷/۸	۱۸۵/۱۸	۱/۱۰۲۹	۰/۴۳۹۰۵
۷,۰۰۰	۳,۸۸۸/۹	۱۷۹/۰۸	۱/۰۶۶۵	۰/۴۶۰۳۱
۷,۲۰۰	۴,۰۰۰/۰	۱۷۲/۸۶	۱/۰۲۹۵	۰/۴۸۰۸۵
۷,۴۰۰	۴,۱۱۱/۱	۱۶۶/۶۰	۰/۹۹۲۲۱	۰/۵۰۰۶۶
۷,۶۰۰	۴,۲۲۲/۲	۱۶۰/۳۵	۰/۹۵۴۹۹	۰/۵۱۹۷۴
۷,۸۰۰	۴,۳۳۳/۳	۱۵۴/۱۶	۰/۹۱۸۱۳	۰/۵۳۸۰۹
۸,۰۰۰	۴,۴۴۴/۴	۱۴۸/۰۷	۰/۸۸۱۸۴	۰/۵۵۵۷۳
۸,۲۰۰	۴,۵۵۵/۶	۱۴۲/۱۰	۰/۸۴۶۲۹	۰/۵۷۲۶۷
۸,۴۰۰	۴,۶۶۶/۷	۱۳۶/۲۸	۰/۸۱۱۶۳	۰/۵۸۸۹۱
۸,۶۰۰	۴,۷۷۷/۸	۱۳۰/۶۳	۰/۷۷۷۹۶	۰/۶۰۴۴۹
۸,۸۰۰	۴,۸۸۸/۹	۱۲۵/۱۵	۰/۷۴۵۳۴	۰/۶۱۹۴۱
۹,۰۰۰	۵,۰۰۰/۰	۱۱۹/۸۶	۰/۷۱۳۸۳	۰/۶۳۳۷۱
۹,۲۰۰	۵,۱۱۱/۱	۱۱۴/۷۶	۰/۶۸۳۴۶	۰/۶۴۷۴۰
۹,۴۰۰	۵,۲۲۲/۲	۱۰۹/۸۵	۰/۶۵۴۲۳	۰/۶۶۰۵۱
۹,۶۰۰	۵,۳۳۳/۳	۱۰۵/۱۴	۰/۶۲۶۱۷	۰/۶۷۳۰۵
۹,۸۰۰	۵,۴۴۴/۴	۱۰۰/۶۲	۰/۵۹۹۲۵	۰/۶۸۵۰۶
۱۰,۰۰۰	۵,۵۵۵/۶	۹۷/۲۸۹	۰/۵۷۳۴۶	۰/۶۹۶۵۵

☑جدول ۸-۱ توابع تابش (ادامه)

λT		$\frac{E_{b\lambda}}{T^5}$		$\frac{E_{b_0-\lambda T}}{\sigma T^4}$
		Btu	W	
$\mu m.^\circ R$	$\mu m.K$	$h.ft^2.^\circ R^5.\mu m \times 10^{15}$	$m^2.K^5.\mu m \times 10^{11}$	
۱۰,۲۰۰	۵,۶۶۶/۷	۹۲/۱۴۵	۰/۵۴۸۷۷	۰/۷۰۷۵۴
۱۰,۴۰۰	۵,۷۷۷/۸	۸۸/۱۸۱	۰/۵۲۵۱۷	۰/۷۱۸۰۶
۱۰,۶۰۰	۵,۸۸۸/۹	۸۴/۳۹۴	۰/۵۰۲۶۱	۰/۷۲۸۱۳
۱۰,۸۰۰	۶,۰۰۰/۰	۸۰/۷۷۷	۰/۴۸۱۰۷	۰/۷۳۷۷۷
۱۱,۰۰۰	۶,۱۱۱/۱	۷۷/۳۲۵	۰/۴۶۰۵۱	۰/۷۴۷۰۰
۱۱,۲۰۰	۶,۲۲۲/۲	۷۴/۰۳۱	۰/۴۴۰۸۹	۰/۷۵۵۸۳
۱۱,۴۰۰	۶,۳۳۳/۳	۷۰/۸۸۹	۰/۴۲۲۱۸	۰/۷۶۴۲۹
۱۱,۶۰۰	۶,۴۴۴/۴	۶۷/۸۹۲	۰/۴۰۴۳۴	۰/۷۷۲۳۸
۱۱,۸۰۰	۶,۵۵۵/۶	۶۵/۰۳۶	۰/۳۸۷۳۲	۰/۷۸۰۱۴
۱۲,۰۰۰	۶,۶۶۶/۷	۶۲/۳۱۳	۰/۳۷۱۱۱	۰/۷۸۷۵۷
۱۲,۲۰۰	۶,۷۷۷/۸	۵۹/۷۱۷	۰/۳۵۵۶۵	۰/۷۹۴۶۹
۱۲,۴۰۰	۶,۸۸۸/۹	۵۷/۲۴۲	۰/۳۴۰۹۱	۰/۸۰۱۵۲
۱۲,۶۰۰	۷,۰۰۰/۰	۵۴/۸۸۴	۰/۳۲۶۸۷	۰/۸۰۸۰۶
۱۲,۸۰۰	۷,۱۱۱/۱	۵۲/۶۳۶	۰/۳۱۳۴۸	۰/۸۱۴۳۳
۱۳,۰۰۰	۷,۲۲۲/۲	۵۰/۴۹۳	۰/۳۰۰۷۱	۰/۸۲۰۳۵
۱۳,۲۰۰	۷,۳۳۳/۳	۴۸/۴۵۰	۰/۲۸۸۵۵	۰/۸۲۶۱۲
۱۳,۴۰۰	۷,۴۴۴/۴	۴۶/۵۰۲	۰/۲۷۶۹۵	۰/۸۳۱۶۶
۱۳,۶۰۰	۷,۵۵۵/۶	۴۴/۶۴۵	۰/۲۶۵۸۹	۰/۸۳۶۹۸
۱۳,۸۰۰	۷,۶۶۶/۷	۴۲/۸۷۴	۰/۲۵۵۳۴	۰/۸۴۲۰۹
۱۴,۰۰۰	۷,۷۷۷/۸	۴۱/۱۸۴	۰/۲۴۵۲۷	۰/۸۴۶۹۹
۱۴,۲۰۰	۷,۸۸۸/۹	۳۹/۵۷۲	۰/۲۳۵۶۷	۰/۸۵۱۷۱
۱۴,۴۰۰	۸,۰۰۰/۰	۳۸/۰۳۳	۰/۲۲۶۵۱	۰/۸۵۶۲۴
۱۴,۶۰۰	۸,۱۱۱/۱	۳۶/۵۶۵	۰/۲۱۷۷۷	۰/۸۶۰۵۹
۱۴,۸۰۰	۸,۲۲۲/۲	۳۵/۱۶۳	۰/۲۰۹۴۲	۰/۸۶۴۷۷
۱۵,۰۰۰	۸,۳۳۳/۳	۳۳/۸۲۵	۰/۲۰۱۴۵	۰/۸۶۸۸۰
۱۶,۰۰۰	۸,۸۸۸/۹	۲۷/۹۷۷	۰/۱۶۶۶۲	۰/۸۸۶۷۷
۱۷,۰۰۰	۹,۴۴۴/۴	۲۳/۳۰۱	۰/۱۳۸۷۷	۰/۹۰۱۶۸
۱۸,۰۰۰	۱۰,۰۰۰/۰	۱۹/۵۳۶	۰/۱۱۶۳۵	۰/۹۱۴۱۴
۱۹,۰۰۰	۱۰,۵۵۵/۶	۱۶/۴۸۴	۰/۰۹۸۱۷	۰/۹۲۴۶۲
۲۰,۰۰۰	۱۱,۱۱۱/۱	۱۳/۹۹۴	۰/۰۸۳۳۴	۰/۹۳۳۴۹
۲۱,۰۰۰	۱۱,۶۶۶/۷	۱۱/۹۴۹	۰/۰۷۱۱۶	۰/۹۴۱۰۴
۲۲,۰۰۰	۱۲,۲۲۲/۲	۱۰/۲۵۸	۰/۰۶۱۰۹	۰/۹۴۷۵۱
۲۳,۰۰۰	۱۲,۷۷۷/۸	۸/۸۲۵	۰/۰۵۲۷۲	۰/۹۵۳۰۷
۲۴,۰۰۰	۱۳,۳۳۳/۳	۷/۶۷۶	۰/۰۴۵۷۲	۰/۹۵۷۸۸
۲۵,۰۰۰	۱۳,۸۸۸/۹	۶/۶۸۷	۰/۰۳۹۸۲	۰/۹۶۲۰۷
۲۶,۰۰۰	۱۴,۴۴۴/۴	۵/۸۵۰	۰/۰۳۴۸۴	۰/۹۶۵۷۲
۲۷,۰۰۰	۱۵,۰۰۰/۰	۵/۱۳۹	۰/۰۳۰۶۱	۰/۹۶۸۹۲
۲۸,۰۰۰	۱۵,۵۵۵/۶	۴/۵۳۲	۰/۰۲۶۹۹	۰/۹۷۱۷۴
۲۹,۰۰۰	۱۶,۱۱۱/۱	۴/۰۱۲	۰/۰۲۳۸۹	۰/۹۷۴۲۳
۳۰,۰۰۰	۱۶,۶۶۶/۷	۳/۵۶۳	۰/۰۲۱۲۲	۰/۹۷۶۴۴
۴۰,۰۰۰	۲۲,۲۲۲/۲	۱/۲۷۳	۰/۰۰۷۵۸	۰/۹۸۹۱۵
۵۰,۰۰۰	۲۷,۷۷۷/۸	۰/۵۶۰	۰/۰۰۳۳۳	۰/۹۹۴۱۴
۶۰,۰۰۰	۳۳,۳۳۳/۳	۰/۲۸۳	۰/۰۰۱۶۸	۰/۹۹۶۴۹
۷۰,۰۰۰	۳۸,۸۸۸/۹	۰/۱۵۸	$۰/۹۴۰\times۱۰^{-۳}$	۰/۹۹۷۷۳
۸۰,۰۰۰	۴۴,۴۴۴/۴	۰/۰۹۴۸	$۰/۵۶۴\times۱۰^{-۳}$	۰/۹۹۸۴۵
۹۰,۰۰۰	۵۰,۰۰۰/۰	۰/۰۶۰۳	$۰/۳۵۹\times۱۰^{-۳}$	۰/۹۹۸۸۹
۱۰۰,۰۰۰	۵۵,۵۵۵/۶	۰/۰۴۰۲	$۰/۲۳۹\times۱۰^{-۳}$	۰/۹۹۹۱۸

۲/۵μm (یعنی حدود ۰/۹۷) می‌رسیم. پس شیشه بخش اعظم تابش خورشیدی برخورد کرده به خود را تراگسیل می‌کند. برعکس، تابش اتاق در حـــــدود ۳۰۰K زیـــر ۲/۵μm دارای ($\lambda T = (۲/۵)(۳۰۰) = ۷۵۰\ \mu m.K$) است و فقط بخش کوچکی (کم‌تر از ۰/۰۰۱ درصد) از این تابش از شیشه تراگسیل می‌شود. شیشه که اساساً در مقابل نور مرئی شفاف است، در مقابل تابش گرمایی گسیل‌شده در دماهای معمولی اتاق، تقریباً به طور کامل مات است.

در مفهوم جسم‌سیاه ایده‌ال سازی شده است؛ یعنی جسم‌سیاه کامل وجود ندارد تمام سطوح تا حدودی هرچند کم تابش را بازمی‌تابانند. البته به روش زیر می‌توان خیلی دقیق به جسم‌سیاه نزدیک شد. مثل شکل ۸-۷ حفره‌ای ساخته می‌شود که در مقایسه با اندازه سوراخ جانبی آن خیلی بزرگ باشد. یک شعاع انرژی فرودی چندین بار روی قسمت داخلی، قبل از آنکه بالاخره از سوراخ جانبی فرار کند، بازتاب می‌شود. با هر بازتاب کسری از انرژی، مطابق ضریب جذب داخل حفره جذب می‌شود. پس از چند عمل جذب، عملاً تمام تابش فرودی بر سوراخ جانبی، جذب می‌شود. باید یادآور شد که حفره شکل ۸-۷ تقریباً هم به عنوان جسم‌سیاه گسیلنده رفتار می‌کند هم جاذب.



شکل ۸-۷ روش ساخت محفظه جسم‌سیاه.

مثال ۸-۱ تراگسیل و جذب در ورق شیشه‌ای

برای مشاهده کوره، از ورق شیشه‌ای مربعی به ضلع ۰/۳ m استفاده می‌شود. ضریب تراگسیل شیشه از ۰/۲ تا ۳/۵μm برابر ۰/۵ می‌باشد. ضریب گسیل را می‌توان تا ۳/۵μm برابر ۰/۳ و بیش‌تر از آن را برابر ۰/۹ فرض کرد. ضریب تراگسیل شیشه به‌جز در محدوده ۰/۲ تا ۳/۵μm برابر صفر است. به فرض کوره در ۲۰۰۰ °C جسم‌سیاه باشد، انرژی جذب‌شده در شیشه و انرژی تراگسیل‌شده را حساب کنید.

حل :

$T = ۲۰۰۰^\circ C = ۲۲۷۳\ K$

$\lambda_1 T = (۰/۲)(۲۲۷۳) = ۴۵۴/۶\ \mu m.K$

$\lambda_2 T = (۳/۵)(۲۲۷۳) = ۷۹۵۵/۵\ \mu m.K$

$A = (۰/۳)^2 = ۰/۰۹\ m^2$

از جدول ۸-۱ داریم:

$$\frac{E_{b_0-\lambda_1}}{\sigma T^4} = ۰ \qquad \frac{E_{b_0-\lambda_2}}{\sigma T^4} = ۰/۸۵۴۴۳$$

$$\sigma T^4 = (۵/۶۶۹\times۱۰^{-۸})(۲۲۷۳)^4 = ۱۵۱۳/۳\ \frac{kW}{m^2}$$

کل تابش فرودی برابر است با:

$$۰/۲\mu m < \mu < ۳/۵\mu m = (۱/۵۱۳۳\times۱۰^{۶})(۰/۸۵۴۴۳ - ۰)(۰/۳)^2$$

$$= ۱۱۶/۴ kW \left[۳/۹۷\times۱۰^{۵}\ \frac{Btu}{h}\right]$$

کل تابش تراگسیل‌شده $= (۰/۵)(۱۱۶/۴) = ۵۸/۲\ kW$

$$\text{تابش جذب‌شده} = \begin{cases} (۰/۳)(۱۱۶/۴) = ۳۴/۹۲ kW \\ \text{برای} \quad ۰ < \lambda < ۳/۵\ \mu m \\ (۰/۹)(۱ - ۰/۸۵۴۴۳)(۱۵۱۳/۳)(۰/۰۹) = ۱۷/۸۴ kW \\ \text{برای} \quad ۳/۵\ \mu m < \lambda < \infty \end{cases}$$

کل تابش جذب‌شده $= ۳۴/۹۲ + ۱۷/۸۴ = ۵۲/۷۶ kW \left[۱۸۰۰۰۰\frac{Btu}{h}\right]$

❑ ۸-۴ ضریب شکل در تابش

دو سطح سیاه A_1 و A_2 را مطابق شکل ۸-۸ در نظر بگیرید. می‌خواهیم عبارتی کلی برای تبادل انرژی بین این سطوح، وقتی دماهای آنها متفاوت است، به‌دست آوریم. مسأله عبارت است از تعیین مقدار انرژی‌ای که از سطحی خارج می‌شود و به دیگری می‌رسد. برای حل این مسأله ***ضرایب شکل در تابش*** را چنین تعریف می‌کنیم:

F_{1-2} = کسری از انرژی خروجی از سطح ۱ و رسیده به سطح ۲

F_{2-1} = کسری از انرژی خروجی از سطح ۲ و رسیده به سطح ۱

F_{m-n} = کسری از انرژی خروجی از سطح m و رسیده به سطح n

اسامی دیگر ضریب شکل تابش عبارتند از ***ضریب دید***، ***ضریب زاویه‌ای*** و ***ضریب شکل‌بندی***. انرژی خروجی از سطح ۱ و رسیده به سطح ۲ برابر است با:

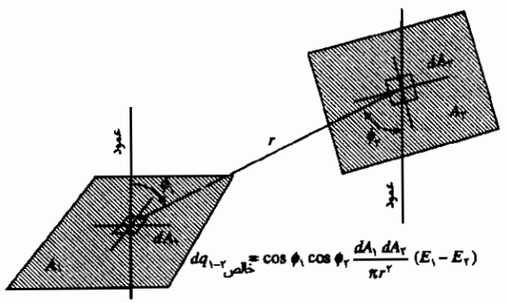
$$E_{b1} A_1 F_{12}$$

و انرژی خروجی از سطح ۲ و رسیده به سطح ۱ برابر است با:

$$E_{b2} A_2 F_{21}$$

چون سطوح سیاه‌اند، تمام تابش فرودی جذب می‌شود و مبادله انرژی خالص چنین است:

$$E_{b1} A_1 F_{12} - E_{b2} A_2 F_{21} = Q_{1-2}$$



شکل ۸-۸ طرح نشان‌دهندهٔ اجزای مساحت به‌کار رفته در به‌دست آوردن ضریب شکل در تابش.

اگر دمای دو سطح یکسان باشد، هیچ تبادل گرمایی وجود ندارد، یعنی $Q_{1-2} = ۰$ پس برای $T_1 = T_2$:

$$E_{b1} = E_{b2}$$

بنابراین :

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \qquad (۸-۱۸)$$

پس تبادل گرمای خالص برابر است با:

$$Q_{1-2} = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) = A_2 F_{21} (E_{b1} - E_{b2}) \qquad (۸-۱۹)$$

معادله (۸-۱۸) به رابطه تقابل معروف است و به‌طور کلی برای هر دو صفحهٔ m و n به‌کار می‌رود:

$$A_m F_{mn} = A_n F_{nm} \qquad (۸-۱۸ \text{ الف})$$

با وجودی که رابطهٔ فوق برای سطوح سیاه به‌دست آمده، می‌توان از آن، تا زمانی که تابش پخشنده است، برای سایر سطوح نیز استفاده کرد.

اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای عمومی برای F_{12} (یا F_{21}) تعیین کنیم. برای این کار اجزای سطح dA_1 و dA_2 شکل ۸-۸ را در نظر می‌گیریم. ϕ_1 و ϕ_2 زوایای بین عمود بر سطح و خط واصل بین اجزای سطح r است. تصویر dA_1 روی خط بین دو مرکز برابر است با:

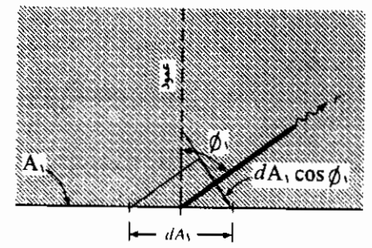
$$dA_1 \cos\phi_1$$

این موضوع را می‌توان در شکل ۸-۹ واضح‌تر دید. فرض بر آن است که سطوح پخشنده‌اند یعنی شدت تابش در تمام جهات یکسان است. شدت، تابش گسیل‌شده به‌ازای واحد سطح و واحد زاویه فضایی در جهت خاص معین است. بنابراین، برای به‌دست آوردن انرژی گسیل‌شده از جزء سطح dA_1 در راستایی معین باید شدت را در تصویر dA_1 در آن راستای خاص ضرب کرد. بنابراین انرژی خروجی از dA_1 در راستای مشخص با زاویهٔ ϕ_1 برابر است با:

$$I_b\, dA_1 \cos\phi_1 \qquad \text{(الف)}$$

که I_b شدت جسم‌سیاه است. تابشی که به جزء سطح dA_n به فاصلهٔ r از A_1 می‌رسد برابر است با:

$$I_b\, dA_1 \cos\phi_1 \frac{dA_n}{r^2} \qquad \text{(ب)}$$



شکل ۸-۹ نمای قائم مساحت نشان داده شده در شکل ۸-۸.

که dA_n عمود بر بردار شعاعی ساخته می‌شود. کمیت $\frac{dA_n}{r^2}$ زاویه فضایی را نشان می‌دهد که مقابل سطح dA_n است. شدت را می‌توان با انتگرال‌گیری از عبارت (ب) روی نیم‌کره‌ای که جزء سطح dA_1 را محصور می‌کند برحسب توان گسیل به‌دست آورد. در دستگاه مختصات کروی مثل دستگاه شکل ۸-۱۰ داریم:

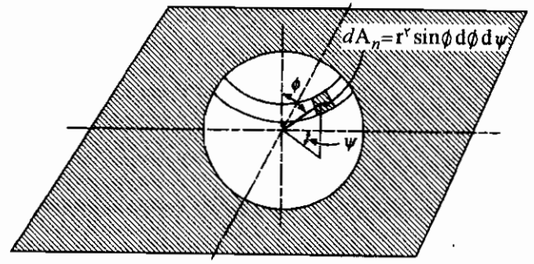
$$dA_n = r^2 \sin\phi\, d\psi\, d\phi$$

بنابراین:

$$E_b\, dA_1 = I_b\, dA_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos\phi\, d\phi\, d\psi$$
$$= \pi I_b\, dA_1$$

از این رو:

$$E_b = \pi I_b \qquad (۲۰-۸)$$



شکل ۸-۱۰ دستگاه مختصات کروی برای به‌دست آوردن ضریب شکل در تابش.

اکنون به مسأله مبادله انرژی شکل ۸-۸ بر می‌گردیم. جزء سطح dA_n برابر است با:

$$dA_n = \cos\phi_2\, dA_2$$

بنابراین انرژی خروجی از dA_1 که به dA_2 می‌رسد برابر است با:

$$dq_{1-2} = E_{b1}\cos\phi_1\cos\phi_2\frac{dA_1\, dA_2}{\pi r^2}$$

انرژی خروجی از dA_2 که به dA_1 می‌رسد برابر است با:

$$dq_{2-1} = E_{b2}\cos\phi_2\cos\phi_1\frac{dA_2\, dA_1}{\pi r^2}$$

و مبادله انرژی خالص چنین است:

$$q_{\text{خالص}\,1-2} = (E_{b1} - E_{b2})\int_{A2}\int_{A1}\cos\phi_1\cos\phi_2\frac{dA_1\, dA_2}{\pi r^2} \qquad (۲۱-۸)$$

مقدار انتگرال مطابق معادلهٔ (۸-۱۹) برابر $A_1 F_{12}$ یا $A_2 F_{21}$ است. برای ارزیابی این انتگرال باید شکل خاص سطوح A_1 و A_2 معلوم باشد. نخست روی مسأله‌ای ابتدایی کار کرده، سپس نتایج شکل‌های پیچیده‌تر را به صورت ترسیمی و معادله ارائه می‌کنیم.

تابش حاصل از سطح کوچک dA_1 به دیسک تخت A_2 را مطابق شکل ۸-۱۱ در نظر بگیرید. جزء سطح dA_2 را به صورت حلقه‌ای دایروی به شعاع x انتخاب می‌کنیم. بنابراین:

$$dA_2 = 2\pi x\, dx$$

توجه داریم که $\phi_1 = \phi_2$ و با استفاده از معادلهٔ (۸-۲۱)، با انتگرال‌گیری روی سطح A_2 داریم:

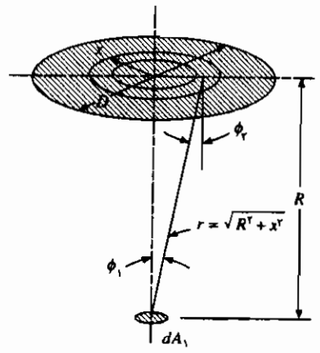
$$dA_1\, F_{dA1-A2} = dA_1 \int_{A2}\cos^2\phi_1\frac{2\pi x\, dx}{\pi r^2}$$

با جای‌گزینی مقادیر زیر:

$$r = (R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \cos\phi_1 = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

داریم:

$$dA_1\, F_{dA1-A2} = dA_1 \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{2R^2 x\, dx}{(R^2 + x^2)^2}$$



شکل ۸-۱۱ تابش از جزء مساحت کوچک به دیسک.

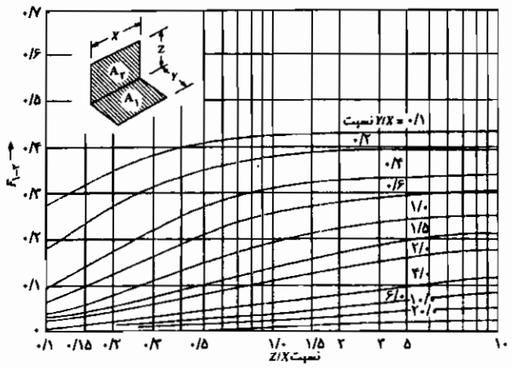
با انتگرال‌گیری داریم:

$$dA_1\, F_{dA1-A2} = -\,dA_1\left(\frac{R^2}{R^2 + x^2}\right)\Big]_0^{\frac{D}{2}} = dA_1\frac{D^2}{4R^2 + D^2}$$

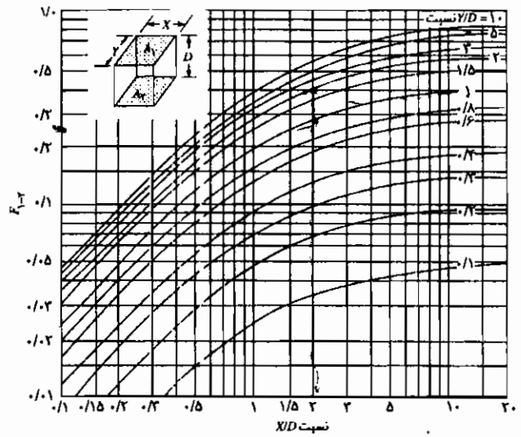
بنابراین:

$$F_{dA1-A2} = \frac{D^2}{4R^2 + D^2} \qquad (۲۲-۸)$$

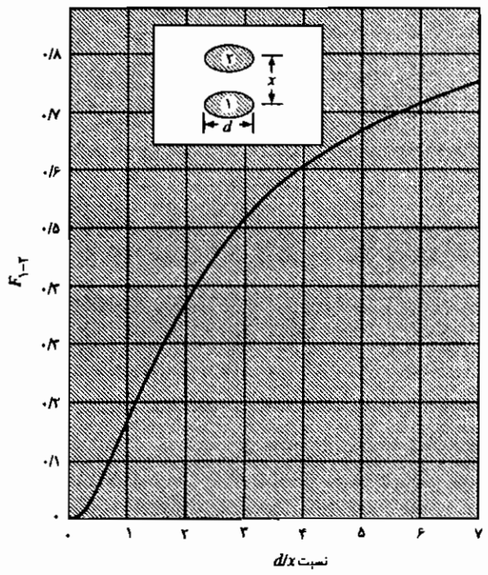
محاسبه ضرایب شکل را می‌توان به شکل‌های پیچیده‌تر مطابق مراجع ۳، ۵، ۲۴ و ۳۸ بسط داد؛ مرجع ۳۸ فهرست کاملی از روابط تحلیلی و نمودارهای مربوط به ضرایب شکل را به‌دست می‌دهد. ما فقط نتایج مربوط به چند شکل هندسی ۸-۱۲ تا ۸-۱۶ را ارائه می‌کنیم. روابط تحلیلی این اشکال در جدول ۸-۲ داده شده‌اند.



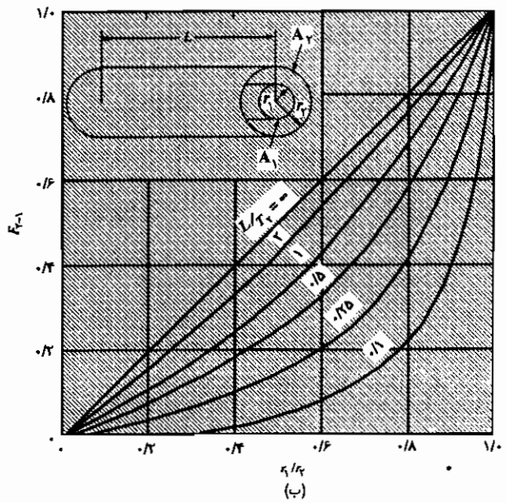
شکل ۸-۱۴ ضریب شکل تابش برای تابش میان مستطیل‌های عمود بر هم با یال مشترک.



شکل ۸-۱۲ ضریب شکل تابش برای تابش بین مستطیل‌های موازی.



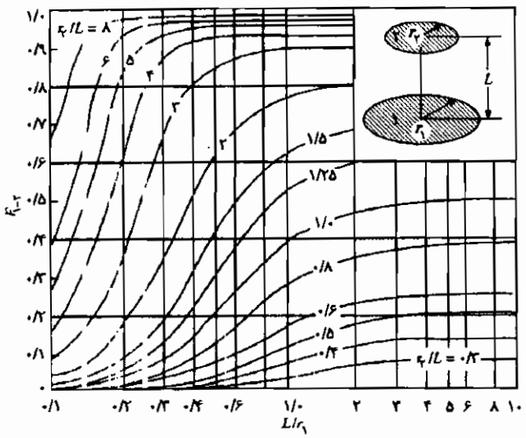
شکل ۸-۱۳ ضریب شکل تابش برای تابش بین دیسک‌های موازی.



شکل ۸-۱۵ ضریب شکل در تابش برای دو استوانه هم‌مرکز به‌طول محدود (الف) استوانه بیرونی به خودش؛ (ب) استوانه بیرونی به استوانه داخلی.

☑جدول ۸-۲ روابط ضریب شکل تابش

وضعیت هندسی	ضریب شکل
۱. مستطیل‌های موازی‌وساوی (شکل ۸-۱۲) $x = \frac{X}{D}, y = \frac{Y}{D}$	$F_{1-2} = \left(\frac{2}{\pi xy}\right)\left\{ \ln\left[\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+x^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}} + x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\left[\frac{x}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + y(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\left[\frac{y}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right] - x\tan^{-1}x - y\tan^{-1}y\right\}$
۲. دیسک‌های‌موازی،ساوی، هم‌محور(شکل ۸-۱۳) $R = \frac{d}{2x}$, $X = \frac{2R^2+1}{R^2}$	$F_{1-2} = \frac{X-(X^2-4)^{\frac{1}{2}}}{2}$
۳. مستطیل‌های‌عمودبرهم‌با یال مشترک(شکل ۸-۱۴) $H = \frac{Z}{X}, W = \frac{Y}{X}$	$F_{1-2} = \frac{1}{\pi W}\left(W\tan^{-1}\left(\frac{1}{W}\right) + H\tan^{-1}\left(\frac{1}{H}\right) - (H^2+W^2)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\left[\frac{1}{(H^2+W^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \left(\frac{1}{4}\right)\ln\left\{\left[\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\right] \times \left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)}\right]^{W^2} \times \left[\frac{H^2(1+H^2+W^2)}{(1+H^2)(H^2+W^2)}\right]^{H^2}\right\}\right)$
۴. استوانه‌های‌نامحدود و هم‌محور(شکل ۸-۱۵) $X = \frac{r_2}{r_1}, Y = \frac{L}{r_1}$	$F_{2-1} = \frac{1}{X} - \left(\frac{1}{\pi X}\right)\left\{\cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) - \left(\frac{1}{2Y}\right)\left[A^2+4A-2X^2+4\right]^{\frac{1}{2}} \times \cos^{-1}\left(\frac{B}{XA}\right) + B\sin^{-1}\left(\frac{1}{X}\right) - \frac{\pi A}{2}\right]\right\}$ $A = X^2+Y^2-1$ $B = Y^2-X^2+1$
	$F_{2-2} = 1 - \frac{1}{X} + \left(\frac{2}{\pi X}\right)\tan^{-1}\left[\frac{2(X^2-1)^{\frac{1}{2}}}{Y}\right] - \left(\frac{Y}{2\pi X}\right)\left(\frac{2X^2+Y^2}{Y}\sin^{-1}\left[\frac{2(X^2-1)+\left(\frac{Y}{X}\right)^2(X^2-2)}{Y^2+2(X^2-1)}\right] - \sin^{-1}\left(\frac{X^2-2}{X^2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{(2X^2+Y^2)}{Y}\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right]\right)$
۵. دیسک‌های موازی و هم‌محور(شکل ۸-۱۶) $R_1 = \frac{r_1}{L}$ $R_2 = \frac{r_2}{L}$ $X = \frac{1+R_1^2}{R_1^2}$	$F_{1-2} = \frac{X-[X^2-4(\frac{R_2}{R_1})^2]^{\frac{1}{2}}}{2}$

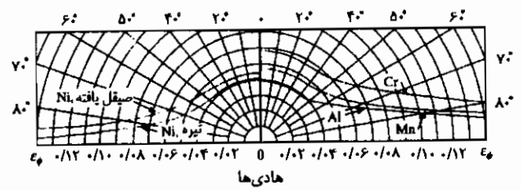


شکل ۸-۱۶ ضریب شکل در تابش میان دو دیسک هم‌مرکز موازی.

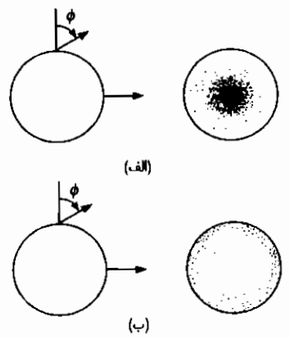
رفتار سطح حقیقی

سطوح حقیقی تفاوت‌های جالبی با سطوح ایده‌آل بندهای قبل دارد. مثلاً سطوح حقیقی کاملاً پخشنده نیستند و از این‌رو شدت تابش گسیل‌شده در تمام جهات ثابت نیست. مشخصات ضریب گسیل جهت‌دار چند نوع سطح در شکل ۸-۱۷ نشان داده شده‌است. این منحنی‌ها، رفتارِ متفاوت مشخصاتی هادی‌های الکتریکی و غیر هادی‌ها را نشان می‌دهند. هادی‌ها در راستایی که زاویه آزیموت بزرگ دارد انرژی بیش‌تری گسیل می‌دارند. این رفتار را می‌توان خیلی خوب با نظریهٔ موج الکترومغناطیسی مقدماتی توضیح داد که در مرجع ۲۴ بحث شده است. در نتیجهٔ این رفتار اصلی هادی‌ها و غیر هادی‌ها، می‌توانیم ظاهر کره‌ای که تا دماهای فروزان گرما می‌بیند را مطابق شکل ۸-۱۸ پیش‌بینی کنیم. لبه کرهٔ هادی الکتریکی، شفاف به‌نظر می‌رسد، زیرا در زوایای ϕ بزرگ‌تر، انرژی بیش‌تری گسیل می‌شود. کره‌ای از جنس ماده غیرهادی رفتاری برعکس داشته و در مرکز شفاف و در اطراف لبه تاریک به نظر خواهد رسید.

قابلیت بازتاب و جذب تابش گرمایی از سطوح حقیقی نه تنها تابع خود سطح بلکه تابع محیط اطراف نیز می‌باشند. این خواص به جهت و طول‌موج تابش فرودی بستگی دارند. ولی ممکن است توزیع شدت تابش فرودی با طول‌موج تابع بسیار پیچیده‌ای از دما و مشخصات سطح تمام سطوحی باشد که محیط اطراف را تشکیل می‌دهند. کل تابش برخوردی روی سطح به‌ازای واحد زمان و واحد سطح و واحد طول‌موج را با G_λ نشان می‌دهیم. بنابراین ضریب جذب کل به صورت نسبت انرژی کل جذب‌شده به انرژی کل برخوردی روی سطح خواهد بود و یا:



شکل ۸-۱۷ رفتار جهتی نمونهٔ ضریب گسیل برای هادی‌ها و غیرهادی‌ها. ε_ϕ ضریب گسیل در زاویه ϕ است که نسبت به عمود بر سطح اندازه‌گیری می‌شود. منحنی‌های غیر هادی‌ها برای غیر هادی‌های: (الف) یخ مرطوب؛ (ب) چوب؛ (پ) شیشه؛ (ت) کاغذ؛ (ث) خاک رس؛ (ج) اکسید مس و (چ) اکسید آلومینیم.



شکل ۸-۱۸ اثر تابندگی جهت‌دار برظاهر کره فروزان:
(الف) هادی الکتریکی؛ (ب) غیر هادی الکتریکی.

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda \, d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda \, d\lambda} \qquad (۲۳-۸)$$

چنان‌چه جسم خاکستری باشد به‌طوری که (ثابت $= \varepsilon = \varepsilon_\lambda$) این رابطه خیلی ساده می‌شود. قانون کیرشهف [معادلهٔ (۸-۸)] برای تابش تک‌فام چنین نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \qquad (۲۴-۸)$$

بنابراین، برای جسم خاکستری، α_λ = ثابت، و معادلهٔ (۸-۲۳) این نتیجه را بیان می‌کند که ضریب جذب کل نیز ثابت و مستقل از توزیع طول‌موج تابش برخوردی است. به‌علاوه چون ضریب گسیل و ضریب جذب خاکستری در کل طول‌موج‌ها، ثابت‌اند باید مستقل از دما نیز باشند. متأسفانه، سرشت سطوح حقیقی همیشه «خاکستری» نیست و با فرض رفتار جسم خاکستری ممکن است خطاهای بزرگی ایجاد شود. اما تحلیل مبادلهٔ تابش با استفاده از رفتار جسم حقیقی آن‌قدر پیچیده است که راحتی و سادگی فرض جسم خاکستری با فایدهٔ عملی‌ای که ایجاد می‌کند، توجیه می‌شود. مراجع ۱۰، ۱۱ و ۲۴ مقایسه محاسبات انتقال گرما را بر پایه تحلیل‌های جسم خاکستری و غیر خاکستری ارائه می‌کند.

مثال ۸-۲ انتقال گرما بین سطوح سیاه

دو صفحهٔ سیاه موازی ۰/۵ در ۱/۰ m به‌فاصلهٔ ۰/۵ m از هم قرار گرفته‌اند. دمای یک صفحه ۱۰۰۰°C صفحه دیگر ۵۰۰°C است. مبادلهٔ گرمای تابشی خالص بین این دو صفحه چه‌قدر است؟

حل :

نسبت‌های مورد استفاده در شکل ۸-۱۲ عبارتند از:

$$\frac{Y}{D} = \frac{0/5}{0/5} = 1/0 \qquad \frac{X}{D} = \frac{1/0}{0/5} = 2/0$$

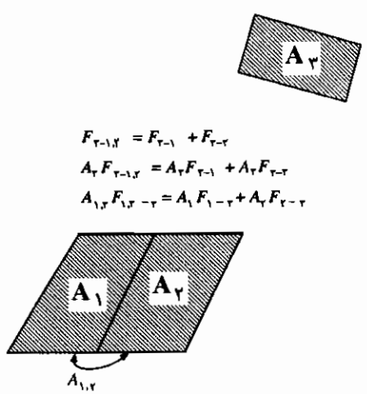
بنابراین $F_{12} = 0/285$. انتقال گرما به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\begin{aligned} q &= A_1 F_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = \sigma A_1 F_{12}(T_1^4 - T_2^4) \\ &= (5/669 \times 10^{-8})(0/5)(0/285)(1273^4 - 773^4) \\ &= 18/33 \text{ KW } \left[62540 \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right] \end{aligned}$$

❑ ۸-۵ روابط میان ضرایب شکل

بعضی از روابط مفید بین ضرایب شکل را می‌توان با توجه به سیستم شکل ۸-۱۹ به‌دست آورد. فرض کنید که می‌خواهیم ضریب شکل را برای تابش از A_3 به سطح مرکب $A_{1,2}$ به‌دست آوریم. این ضریب شکل خیلی ساده چنین حساب می‌شود:

$$F_{3-1,2} = F_{3-1} + F_{3-2} \qquad (۲۵-۸)$$



شکل ۸-۱۹ طرح نشان دهنده بعضی روابط بین ضرایب شکل.

یعنی، ضریب شکل کل برابر مجموع اجزای آن است. می‌توان معادلهٔ (۸-۲۵) را نیز چنین نوشت:

$$A_۳ F_{۳-۱,۲} = A_۳ F_{۳-۱} + A_۳ F_{۳-۲} \qquad (۸-۲۶)$$

و با استفاده از روابط تقابل داریم:

$$A_۳ F_{۳-۱,۲} = A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳}$$

$$A_۳ F_{۳-۱} = A_۱ F_{۱-۳}$$

$$A_۳ F_{۳-۲} = A_۲ F_{۲-۳}$$

عبارت مزبور را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

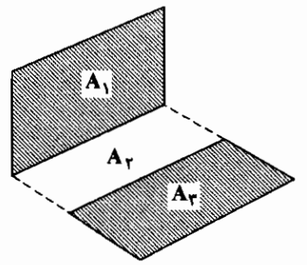
$$A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳} = A_۱ F_{۱-۳} + A_۲ F_{۲-۳} \qquad (۸-۲۷)$$

که به طور ساده بیان میکند که تابش کل رسیده به سطح ۳ برابر مجموع تابش از سطوح ۱ و ۲ است. فرض کنید می‌خواهیم ضریب شکل $F_{۱-۳}$ را برای سطوح شکل ۸-۲۰، برحسب ضرایب شکل معلوم برای مستطیل‌های عمود بر هم با یال مشترک، تعیین کنیم. می‌توان مطابق معادله (۸-۲۵) نوشت:

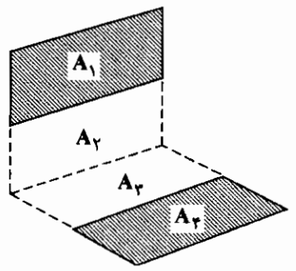
$$F_{۱-۲,۳} = F_{۱-۲} + F_{۱-۳}$$

$F_{۱-۲,۳}$ و $F_{۱-۲}$ هر دو را می‌توان از شکل ۸-۱۴ تعیین کرد. پس وقتی ابعاد معلوم باشد، $F_{۱-۳}$ به سادگی محاسبه می‌شود. حال، حالت اندک پیچیده‌تر شکل ۸-۲۱ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ضریب شکل $F_{۱-۴}$ را بر حسب ضرایب شکل معلوم برای مستطیل‌های عمود بر هم با یال مشترک به‌دست آوریم. طبق معادلهٔ (۸-۲۵) داریم:

(الف) $$A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳,۴} = A_۱ F_{۱-۳,۴} + A_۲ F_{۲-۳,۴}$$



شکل ۸-۲۰.



شکل ۸-۲۱.

$F_{۱,۲-۳,۴}$ و $F_{۲-۳,۴}$ هر دو را می‌توان از شکل ۸-۱۴ به‌دست آورد و $F_{۱-۳,۴}$ چنین بیان می‌شود:

$$A_۱ F_{۱-۳,۴} = A_۱ F_{۱-۳} + A_۱ F_{۱-۴} \qquad (ب)$$

$$A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳} = A_۱ F_{۱-۳} + A_۲ F_{۲-۳} \qquad (پ)$$

با حل معادله (پ) و به‌دست آوردن $A_۱ F_{۱-۳}$ و جای‌گزینی آن در (ب) و به‌دست آوردن $A_۱ F_{۱-۳,۴}$ و قرار دادن آن در (الف) داریم:

(ت) $$A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳,۴} = A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳} - A_۲ F_{۲-۳} + A_۱ F_{۱-۴} + A_۲ F_{۲-۳,۴}$$

توجه کنید که تمام ضرایب شکل به جز $F_{۱-۴}$ را می‌توان از شکل ۸-۱۴ تعیین کرد. بنابراین:

$$F_{۱-۴} = \frac{۱}{A_۱}(A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳,۴} + A_۲ F_{۲-۳} - A_{۱,۲} F_{۱,۲-۳} - A_۲ F_{۲-۳,۴}) \qquad (۸-۲۸)$$

در بحث گذشته به طور ضمنی‌فرض کردیم که اجسام مختلف خودشان را نمی‌بینید، یعنی:

$$F_{۱۱} = F_{۲۲} = F_{۳۳} = ۰ \ldots$$

برای آنکه مسأله کاملاً عمومی شود باید سطوح مقعری که خودشان را می‌بینید در نظرگرفت. بنابراین رابطه عمومی چنین است:

$$\sum_{j=۱}^{n} F_{ij} = ۱/۰ \qquad (۸-۲۹)$$

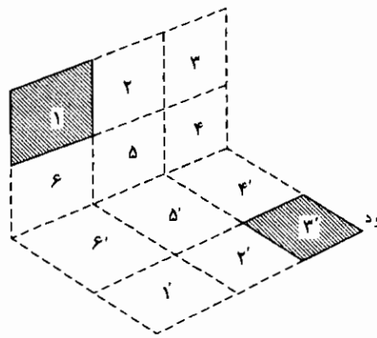
که F_{ij}کسری از انرژی کل است که از سطح i خارج شده، به سطح j می‌رسد. بنابراین برای محفظه سه سطحی داریم:

$$F_{۱۱} + F_{۱۲} + F_{۱۳} = ۱/۰$$

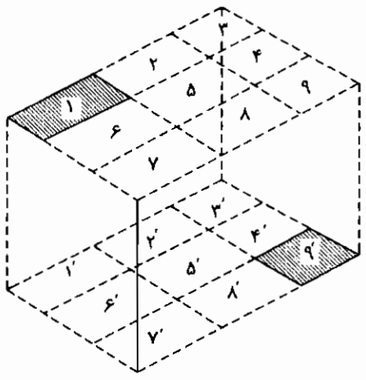
و $F_{۱۱}$کسری از انرژی را نشان می‌دهد که از سطح ۱ خارج و به خودش اصابت می‌کند. در تحلیل مبادلهٔ تابش بین سطوح منحنی باید دقت کرد.

همیلتون Hamilton و مورگان Morgan [۵] روابط تعمیم یافتهٔ مستطیل‌های عمود برهم و موازی را برحسب ضرایب شکل ارائه کرده‌اند که می‌توان از شکل‌های ۸-۱۲ و ۸-۱۴ به‌دست آورد. در اشکال ۸-۲۲ و ۸-۲۳ دو حالت مورد نظر نشان داده شده‌اند. در مورد مستطیل‌های عمود برهم شکل ۸-۲۲ می‌توان نشان داد که روابط تقابلی زیر به کار می‌رود [۵]:

$$A_۱ F_{۱۳'} = A_۳ F_{۳۱'} = A_{۳'} F_{۳'۱} = A_{۱'} F_{۱'۳} \qquad (۸-۳۰)$$



شکل ۸-۲۲
آرایش مستطیل‌های عمود بر هم تعمیم یافته.



شکل ۸-۲۳ آرایش عمومی مستطیل‌های موازی.

با استفاده از این روابط تقابلی، ضریب شکل در تابش $F_{۱۳'}$ را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\begin{aligned} A_۱ F_{۱۳'} = \frac{۱}{۲} [&K_{(۱,۲,۳,۲,۵,۶)^۲} - K_{(۲,۳,۲,۵)^۲} - K_{(۱,۲,۵,۶)^۲} \\ &+ K_{(۲,۵,۶)^۲} - K_{(۲,۵,۶)-(۱',۲',۳',۴',۵',۶')} \\ &- K_{(۱,۲,۳,۲,۵,۶)-(۴',۵',۶')} + K_{(۱,۲,۵,۶)-(۵',۶')} \\ &+ K_{(۲,۳,۲,۵)-(۴',۵')} + K_{(۵,۶)-(۱',۲',۵',۶')} \\ &+ K_{(۲,۵)-(۲',۳',۴',۵')} + K_{(۲,۵)^۲} \\ &- K_{(۲,۵)-۵'} - K_{(۵,۶)^۲} - K_{(۲,۵)^۲} \\ &- K_{۵-(۲',۵')} + K_{۵^۲}] \end{aligned} \qquad (۸-۳۱)$$

که جملات K چنین تعریف می‌شود:

$$K_{m-n} = A_m F_{m-n} \qquad (۸-۳۲)$$

$$K_{(m)^۲} = A_m F_{m-m'} \qquad (۸-۳۳)$$

آرایش مستطیل - موازی تعمیم‌یافته در شکل ۸-۲۳ نشان داده شده است. روابط تقابلی که در این حالت به کار می‌روند در مرجع ۵ چنین ارائه می‌شود:

$$A_۱ F_{۱۹'} = A_۳ F_{۳۷'} = A_۹ F_{۹۱'} = A_۷ F_{۷۳'} \qquad (۸-۳۴)$$

با استفاده از این روابط می‌توان ضریب شکل $F_{۱۹'}$ را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} A_۱ F_{۱۹'} = \frac{۱}{۴} [&K_{(۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹)^۲} - K_{(۱,۲,۵,۶,۷,۸)^۲} \\ &- K_{(۲,۳,۴,۵,۸,۹)^۲} - K_{(۱,۲,۳,۴,۵,۶)^۲} \\ &+ K_{(۱,۲,۵,۶)^۲} + K_{(۲,۳,۴,۵)^۲} + K_{(۲,۵,۸,۹)^۲} \\ &- K_{(۲,۵)^۲} - K_{(۵,۸)^۲} - K_{(۵,۶)^۲} \\ &- K_{(۲,۵,۶,۷,۸,۹)^۲} + K_{(۵,۶,۷,۸)^۲} \\ &+ K_{(۲,۵,۶)^۲} + K_{(۲,۵,۸)^۲} \\ &- K_{(۲,۵)^۲} + K_{(۵)^۲}] \end{aligned} \qquad (۸-۳۵)$$

نام‌گذاری جملات K مثل معادلات (۸-۳۲) و (۸-۳۳) است.

مثال ۸-۳ جبر ضریب شکل برای دو سر باز استوانه‌ها

دو استوانه هم‌مرکز به قطرهای ۱۰ و ۲۰ cm به طول ۲۰ cm می‌باشند. ضریب شکل بین دو سر باز استوانه‌ها را بیابید.

حل :

برای این مسأله از نام‌گذاری شکل ۸-۱۵ استفاده کرده، دو سر باز را به صورت سطوح ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم. داریم $\frac{L}{r_۲} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲/۰$ و $\frac{r_۱}{r_۲} = ۰/۵$؛ بنابراین از شکل ۸-۱۵ یا جدول ۸-۲ داریم:

$$F_{۳۱} = ۰/۴۱۲۶ \qquad F_{۳۲} = ۰/۳۲۸۶$$

با استفاده از رابطهٔ تقابلی [معادلهٔ (۸-۱۸)] داریم:

$$A_۱ F_{۱۲} = A_۲ F_{۲۱} \quad \text{و} \quad F_{۱۲} = \left(\frac{d_۲}{d_۱}\right) F_{۲۱} = \left(\frac{۲۰}{۱۰}\right)(۰/۴۱۲۶) = ۰/۸۲۵۳$$

برای سطح ۲ داریم:

$$F_{۲۱} + F_{۲۲} + F_{۲۳} + F_{۲۴} = ۱/۰$$

به دلیل تقارن $F_{۲۴} = F_{۲۲}$ است، بنابراین:

$$F_{۲۳} = F_{۲۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱ - ۰/۴۱۲۶ - ۰/۳۲۸۶) = ۰/۱۲۹۴$$

با استفاده مجدد از تقابل داریم:

$$A_۲ F_{۲۳} = A_۳ F_{۳۲}$$

و:

$$F_{۳۲} = \frac{\pi(۲۰)(۲۰)}{\pi\,(۲۰^۲ - ۱۰^۲)}\ ۰/۱۲۹۴ = ۰/۶۹۰۱$$
$$۴$$

ملاحظه می‌کنید که $F_{۳۱} = F_{۳۳} = F_{۳۴} = ۰$ و برای سطح ۳ داریم:

(الف) $$F_{۳۱} + F_{۳۲} + F_{۳۳} = ۱/۰$$

بنابراین، اگر بتوانیم $F_{۳۱}$ را تعیین کنیم می‌توانیم مقدار $F_{۳۳}$ مورد نظر را حساب کنیم. برای سطح ۱ :

$$F_{۱۲} + F_{۱۳} + F_{۱۴} = ۱/۰$$

و با توجه به تقارن داریم $F_{۱۳} = F_{۱۴}$، بنابراین:

$$F_{۱۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱ - ۰/۸۲۵۳) = ۰/۰۸۷۴$$

با استفاده از تقابل داریم:

$$A_۱ F_{۱۳} = A_۳ F_{۳۱}$$

$$F_{۳۱} = \frac{\pi(۱۰)(۲۰)}{\pi\,(۲۰^۲ - ۱۰^۲)}\ ۰/۰۸۷۴ = ۰/۲۳۳$$
$$۴$$

بنابراین از معادله (الف) داریم:

$$F_{۳۳} = ۱ - ۰/۲۳۳ - ۰/۶۹۰۱ = ۰/۰۷۶۹$$

مثال ۸-۴ جبر ضریب شکل برای مخروط ناقص

قطر قاعده بالایی و پایینی مخروط ناقصی به ترتیب ۱۰ و ۲۰ cm و ارتفاع آن ۱۰ cm است. ضریب شکل بین سطح بالایی و جانبی و هم‌چنین بین سطح جانبی و خودش را بیابید.

حل :

برای حل این مسأله از شکل ۸-۱۶ استفاده‌کرده، نام‌گذاری نشان داده شده را به‌کار می‌بریم. صفحه بالایی را با ۲ و صفحه پایینی را با ۱ و صفحه جانبی را با ۳ مشخص می‌کنیم. بنابراین، کمیت‌های مورد نظر عبارتند از $F_{۳۲}$ و $F_{۳۳}$. داریم:

$$\frac{L}{r_۱} = \frac{۱۰}{۱۰} = ۱/۰ \quad \text{و} \quad \frac{r_۲}{L} = \frac{۵}{۱۰} = ۰/۵$$

بنابراین از شکل ۸-۱۶ داریم:

$$F_{۱۲} = ۰/۱۲$$

از تقابل [معادلهٔ (۸-۱۸)] داریم:

$$A_۱ F_{۱۲} = A_۲ F_{۲۱}$$

$$F_{۲۱} = \left(\frac{۲۰}{۱۰}\right)^۲ (۰/۱۲) = ۰/۴۸$$

و :

$$F_{۲۲} = ۰$$

بنابراین :

$$F_{۲۱} + F_{۲۳} = ۱/۰$$

و :

$$F_{۲۳} = ۱ - ۰/۴۸ = ۰/۵۲$$

برای سطح ۳ :

(الف)

$$F_{۳۱} + F_{۳۲} + F_{۳۳} = ۱/۰$$

بنابراین باید $F_{۳۱}$ و $F_{۳۲}$ را پیداکنیم تا بتوانیم $F_{۳۳}$ را حساب کنیم. چون $F_{۱۱} = ۰$ است داریم:

$$F_{۱۲} + F_{۱۳} = ۱/۰ \quad \text{و} \quad F_{۱۳} = ۱ - ۰/۱۲ = ۰/۸۸$$

و با توجه به تقابل داریم :

(ب)

$$A_۱ F_{۱۳} = A_۳ F_{۳۱}$$

مساحت جانبی برابر است با:

$$A_۳ = \pi (r_۱ + r_۲)[(r_۱ - r_۲)^۲ + L^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \pi (۵ + ۱۰)(۵^۲ + ۱۰^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۵۲۶/۹ \text{ cm}^۲$$

بنابراین از معادلهٔ (ب) داریم:

$$F_{۳۱} = \frac{\pi (۱۰^۲)}{۵۲۶/۹} ۰/۸۸ = ۰/۵۲۵$$

همین روش در مورد سطح ۲ به کار می‌رود، بنابراین:

$$F_{۳۲} = \frac{\pi(۵)^۲}{۵۲۶/۹} ۰/۵۲ = ۰/۰۷۷۵$$

بالاخره از معادلهٔ (الف) داریم:

$$F_{۳۳} = ۱ - ۰/۵۲۵ - ۰/۰۷۷۵ = ۰/۳۹۷$$

مثال ۸-۵ ضریب شکل برای بازتابنده استوانه‌ای

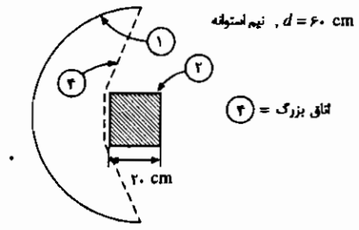
نیم استوانه شکل بلند زیر به قطر ۶۰ cm است و میله‌ای چهارگوش به ابعاد ۲۰ در ۲۰ cm در طول خط مرکزی آن قرار دارد و هر دو را محفظهٔ بزرگی فراگرفته است. $F_{۱۲}$ و $F_{۱۳}$ و $F_{۱۱}$ را مطابق نام‌گذاری شکل پیداکنید.

حل :

از تقارن داریم:

(الف)

$$F_{۲۱} = F_{۲۳} = ۰/۵$$



شکل مثال ۸-۵.

به طور کلی $F_{۱۱} + F_{۱۲} + F_{۱۳} = ۱/۰$. برای کمک به تحلیل این مسأله، سطح مجازی ۴ را مطابق شکل به صورت خط چین ایجاد می‌کنیم. برای این سطح، $F_{۳۱} = ۱/۰$، اکنون، تمام تابش خروجی از سطح ۱ به ۲ یا به ۳ می‌رسد. به همین ترتیب، این تابش به سطح خیالی ۴ خواهد رسید. از این‌رو:

(ب)

$$F_{۱۲} = F_{۱۲} + F_{۱۳}$$

از تقابل داریم:

$$A_۱ F_{۱۲} = A_۲ F_{۲۱}$$

مساحت‌ها به ازای واحد طول برابرند با:

$$A_۱ = \frac{\pi d}{۲} = \frac{\pi(۰/۶)}{۲} = ۰/۹۴۲$$

$$A_۲ = ۰/۲ + (۲)[(۰/۱)^۲ + (۰/۲)^۲]^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۶۴۷$$

$$A_۳ = (۴)(۰/۲) = ۰/۸$$

بنابراین:

(پ)

$$F_{۱۲} = \frac{A_۳}{A_۱} F_{۲۱} = \frac{(۰/۶۴۷)(۱/۰)}{۰/۹۴۲} = ۰/۶۸۶$$

هم‌چنین از تقابل داریم:

$$A_۲ F_{۲۱} = A_۱ F_{۱۲}$$

(ت)

$$F_{۱۲} = \frac{A_۲}{A_۱} F_{۲۱} = \frac{(۰/۸)(۰/۵)}{۰/۹۴۲} = ۰/۴۲۵$$

با ترکیب (ب) و (پ) و (ت) داریم:

$$F_{۱۳} = ۰/۶۸۶ - ۰/۴۲۵ = ۰/۲۶۱$$

و بالاخره:

$$F_{۱۱} = ۱ - F_{۱۲} - F_{۱۳} = ۱ - ۰/۴۲۵ - ۰/۲۶۱ = ۰/۳۱۴$$

این مثال چگونگی استفاده از ملاحظات هندسی هوشمندانه را در محاسبه ضرایب شکل تابش نشان می‌دهد.

❑ ۸-۶ مبادله گرما میان اجسام غیرسیاه

محاسبه انتقال گرمای تابشی میان سطوح سیاه نسبتاً ساده است زیرا تمام انرژی به سطح تابیده جذب می‌شود. مسأله اصلی تعیین ضریب شکل هندسی است و پس از آن محاسبه مبادله گرما خیلی

ساده می‌شود. در مورد اجسام غیر سیاه مسأله خیلی پیچیده‌تر است زیرا تمام انرژی برخوردی به سطح جذب نمی‌شود؛ قسمتی به سطح انتقال گرمای دیگری و قسمتی به بیرون از کل سیستم بازتابیده می‌شود. چون انرژی تابیده می‌تواند چندین بار بین سطوح انتقال گرما بازتابیده شود مسأله پیچیده می‌شود. در تحلیل این مسأله اگر خواستار نتایج صحیحی هستیم باید این بازتابیدن‌های چندگانه را در نظر بگیریم.

به فرض تمام سطوح مورد بررسی در تحلیل ما پخشنده و دمای آنها یکنواخت و خواص بازتاب و گسیل در سرتاسر سطح ثابت باشد. دو اصطلاح جدید را می‌توان چنین تعریف کرد:

G = تابش‌دهی

= کل تابش فرودی بر سطح به‌ازای واحد زمان و واحد سطح

J = رادیوسیتی

= کل تابش خروجی از سطح به ازای واحد زمان و واحد سطح

علاوه بر فرض‌های فوق، همچنین فرض می‌کنیم که رادیوسیتی و تابش‌دهی در سراسر هر سطح یکنواخت است. این فرض دقیقاً صحیح نیست، حتی برای سطح پخشندهٔ خاکستری ایده‌آل. ولی اگر این محدودیت تحلیلی اعمال نگردد مسائل بسیار پیچیده می‌شود. اسپارو Sparrow و سس Cess [۱۰] در مورد این مسائل بحث کرده‌اند، وقتی که هیچ انرژی‌ای تراگسیل نشده باشد رادیوسیتی مطابق شکل ۸-۲۴ برابر مجموع انرژی گسیل‌شده و انرژی بازتابیده است.

$$J = \varepsilon E_b + \rho G \qquad (۸-۳۶)$$

که ε ضریب گسیل و E_b توان گسیل جسم‌سیاه است. از آنجا که ضریب گسیل را صفر فرض کرده‌ایم ضریب بازتاب را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\rho = ۱ - \alpha = ۱ - \varepsilon$$

بنابراین:

$$J = \varepsilon E_b + (۱ - \varepsilon) G \qquad (۸-۳۷)$$

انرژی خالص خروجی از سطح مزبور برابر اختلاف رادیوسیتی و تابش‌دهی است:

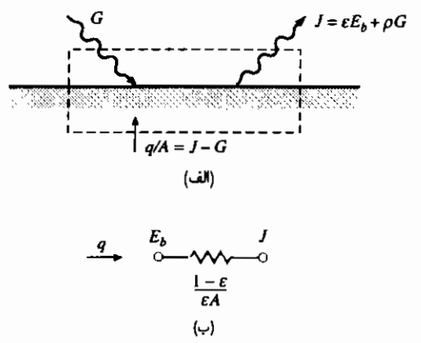
$$\frac{q}{A} = J - G = \varepsilon E_b + (۱ - \varepsilon)G - G$$

با محاسبهٔ G از معادلهٔ (۸-۳۷) برحسب J و قرار دادن آن در معادلهٔ فوق داریم:

$$q = \frac{\varepsilon A}{۱ - \varepsilon} (E_b - J)$$

یا :

$$q = \frac{E_b - J}{\frac{۱ - \varepsilon}{\varepsilon A}} \qquad (۸-۳۸)$$



شکل ۸-۲۴ (الف) توازن انرژی سطح برای جسم مات؛ (ب) جزئی که نمایش‌گر "مقاومت سطح" در روش شبکه - تابش است.

در اینجا تفسیر بسیار مفیدی از معادلهٔ (۸-۳۸) ارائه می‌کنیم. چنان‌چه مخرج کسر سمت راست را به‌عنوان مقاومت سطح در برابر انتقال گرمای تابشی و صورت آن را به عنوان اختلاف پتانسیل و جریان گرما را به عنوان «شدت جریان» در نظر بگیریم می‌توان مطابق شکل ۸-۲۴ (ب) جزء شبکه‌ای رسم کرد که وضعیت فیزیکی مسأله را نشان دهد. این اولین گام در روش شبکه‌ای تحلیل است که اوپنهایم Oppenheim [۲۰] ارائه کرده است.

اکنون مبادلهٔ انرژی تابیده توسط دو سطح $A_۱$ و $A_۲$ را درنظر بگیرید. مقداری از تابش کل خروجی از سطح ۱ که به سطح ۲ می‌رسد برابر است با:

$$J_۱ A_۱ F_{۱۲}$$

و مقداری از تابش کل خروجی از سطح ۲ که به سطح ۱ می‌رسد برابر است با:

$$J_۲ A_۲ F_{۲۱}$$

مبادله خالص بین این دوصفحه برابر است با:

$$q_{۱-۲} = J_۱ A_۱ F_{۱۲} - J_۲ A_۲ F_{۲۱}$$

ولی :

$$A_۱ F_{۱۲} = A_۲ F_{۲۱}$$

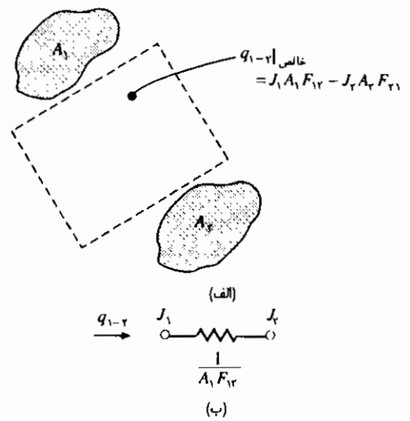
بنابراین :

$$q_{۱-۲} = (J_۱ - J_۲) A_۱ F_{۱۲} = (J_۱ - J_۲) A_۲ F_{۲۱}$$

یا :

$$q_{۱-۲} = \frac{J_۱ - J_۲}{\frac{۱}{A_۱ F_{۱۲}}} \qquad (۸-۳۹)$$

حالا می‌توانیم مطابق شکل ۸-۲۵ (ب) جزء شبکه‌ای بسازیم که نماینده معادلهٔ (۸-۳۹) باشد. دو جزء شبکه‌ای اشکال ۸-۲۴ و ۸-۲۵ عناصر اصلی روش شبکه - تابش را عرضه می‌کنند. برای ساخت شبکهٔ مسأله انتقال گرمای تابشی خاص، تنها نیاز به اختصاص «مقاومت سطحی» $\frac{۱ - \varepsilon}{\varepsilon A}$ به هر سطح و «مقاومت فضایی» $\frac{۱}{A_m F_{m-n}}$ بین پتانسیل‌های رادیوسیتی داریم.

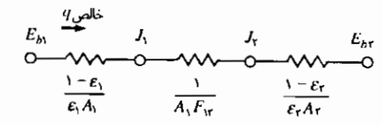


شکل ۸-۲۵ (الف) مبادله انرژی فضایی بین دو سطح؛ (ب) جزء نشان دهنده «مقاومت فضایی» در روش شبکه - تابش.

مثلاً می‌توان دو سطح که با هم فقط مبادلهٔ گرما می‌کنند را به‌وسیله شبکه شکل ۸-۲۶ عرضه کرد. در این حالت، انتقال گرمای خالص برابر اختلاف پتانسیل کل تقسیم بر مجموع مقاومت‌ها است:

$$q_{\text{خالص}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 A_2}}$$

$$= \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 A_2}} \qquad (۴۰-۸)$$



شکل ۸-۲۶ شبکه تابشی دو سطح که یکدیگر را می‌بینند و چیز دیگری را نمی‌بینند

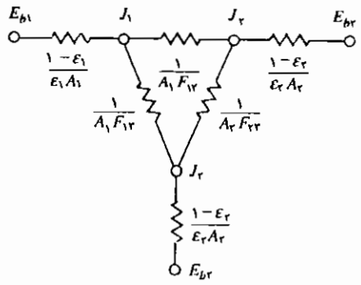
مسألهٔ سه جسمی در شکل ۸-۲۷ نشان داده شده است. در این حالت هرکدام از اجسام بادو جسم دیگر مبادلهٔ گرمامی‌کند. مبادلهٔ بین جسم ۱ و ۲ برابرست با:

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$

و بین جسم ۱ و ۳ برابر است با:

$$q_{1-3} = \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{A_1 F_{13}}}$$

برای تعیین جریان گرما در مسأله‌ای از این دست باید مقدار رادیوسیتی‌ها را حساب کرد. برای این منظور می‌توان از روش‌های استاندارد تحلیل در نظریه مدار dc استفاده کرد. راحت‌ترین روش، استفاده از قانون شدت‌جریان کیرشهف در مدار است که می‌گوید مجموع شدت جریان‌های وارد به گره برابر صفر است. مثال ۸-۶ استفاده از این روش رابرای مسأله سه جسمی نشان می‌دهد.



شکل ۸-۲۷ شبکه تابشی برای سه سطح که یکدیگر را می‌بینند و چیز دیگری را نمی‌بینند.

سطوح عایق‌شده و سطوح وسیع

همان‌طورکه متوجه شدید $(E_b - J)$ نمایش‌گر اختلاف پتانسیل در جریان گرما از مقاومت سطحی $\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon A}$ است. اگر سطحی کاملاً عایق باشد یا تمام انرژی برخورد کرده به خود را دوباره بتاباند دارای جریان گرمای صفر است و اختلاف پتانسیل در عرض مقاومت سطحی صفر است و در نتیجه $J = E_b$. ***اما سطوح عایق‌شده دارای مقاومت سطحی صفر نیستند.*** در نتیجه، گره J در شبکه **شناور** است. یعنی هیچ شدت جریانی را نمی‌کشد. اما سطحی وسیع $(A \to \infty)$ دارای مقاومتی سطحی است که به صفر نزدیک می‌شود و موجب می‌شود که سطح مثل جسم‌سیاه با $\varepsilon = 1/0$ عمل کند. این سطح دارای $J = E_b$ نیز هست زیرا مقاومت سطحی آن صفر است. پس این دو مورد - سطح عایق‌شده و سطح وسیع به دلایلی کاملاً متفاوت، هر دو دارای $J = E_b$ هستند. از این موارد خاص در چند مثال استفاده می‌کنیم.

مسأله دو سطح تخت که با یکدیگر مبادله گرما دارند ولی با سطح سومی مبادله گرما ندارند، یعنی سطحی کاملاً عایق که به هم وصل شده‌اند، به سادگی با استفاده از روش شبکه‌ای حل می‌شود. گرچه این سطح سوم باز هم بر فرآیند انتقال گرما تأثیر می‌گذارد زیرا انرژی را جذب و مجدداً به دو سطح دیگر که مبادله گرما می‌کنند می‌تاباند. شبکه مربوط به این سیستم در شکل ۸-۲۸ نشان داده شده است. توجه کنید که گره J_3 به مقاومت سطحی تابشی وصل نشده زیرا سطح ۳ مبادله انرژی نمی‌کند. مقاومت سطحی $\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon A}$ وجود دارد اما چون هیچ جریان گرمایی وجود ندارد هیچ اختلافی پتانسیلی وجود ندارد و $J_3 = E_{b3}$. همچنین توجه کنید که مقاومت‌های فضایی چنین نوشته می‌شود:

$$F_{13} = 1 - F_{12} \quad \text{و} \quad F_{33} = -F_{21}$$

چون سطح ۳ دوسطح دیگر را کاملاً احاطه می‌کند. در مورد خاصی که سطوح ۱ و ۲ محدب‌اند، هم‌دیگر را نمی‌بینند و $F_{11} = F_{22} = 0$ است. شکل ۸-۲۸ شبکه سادهٔ سری - موازی است

که می‌توان آن را حل کرد و جریان گرما را چنین به‌دست آورد:

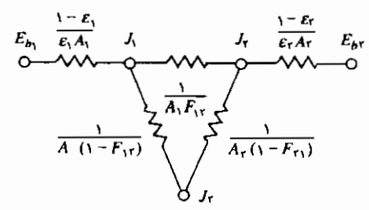
$$q_{\text{خالص}} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_1^4)}{\frac{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}}{A_2 - A_1 (F_{12})^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \qquad (۴۱-۸)$$

که در آن از رابطهٔ تقابلی زیر برای ساده‌کردن عبارت استفاده شده است:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

مجدداً باید توجه کرد که معادلات (۸-۴۱) تنها در مورد صفحاتی که خودشان را نمی‌بینند، به‌کار می‌روند که می‌شود $F_{11} = F_{22} = 0$. اگر این شرایط وجود نداشته باشد باید ضرایب شکل مربوطه را تعیین و شبکه را مطابق آن حل کرد. مثال ۸-۷ شرح مناسب مسأله سطح عایق‌شده را به‌دست می‌دهد.

در این شبکه و شبکه‌های بعدی فرض بر آن است که مبادله گرما تنها تابشی است و فعلاً از هدایت و جابه‌جایی صرف‌نظر می‌شود.



شکل ۸-۲۸ شبکه تابشی برای دو سطح که توسط سطح سوم غیرهادی اما دوباره تابنده، احاطه شده‌اند.

مثال ۸-۶ صفحات گرم محصور در اتاق

دو صفحه موازی به ابعاد ۰/۵ در ۱/۰ m به فاصله ۰/۵ m از هم قرار گرفته‌اند. دمای یکی از صفحات ۱۰۰۰°C و دمای دیگری ۵۰۰°C است. ضرایب گسیل دو صفحه به ترتیب ۰/۲ و ۰/۵ است. این صفحات در اتاق خیلی بزرگی قرار دارد که دمای دیوارهایش ۲۷°C است. این صفحات با هم و با اتاق مبادله گرما دارند ولی در این تحلیل صرفاً سطوح روبه روی هم مورد نظرند. انتقال گرمای خالص به هر صفحه و به اتاق را پیدا کنید.

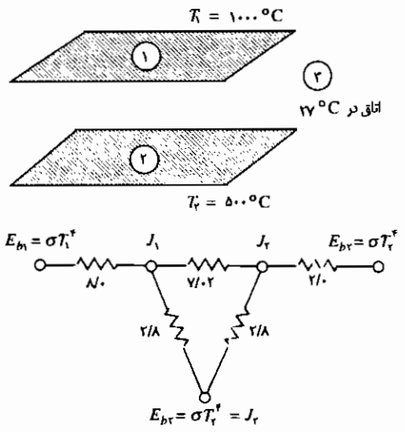
حل :

این مسأله سه - جسمی است، دو صفحه و اتاق، و شبکه تابشی آن در شکل ۸-۲۷ نشان داده شده است. با توجه به داده‌های مسأله:

$T_1 = 1000°C = 1273\,K$ $\quad A_1 = A_2 = 0/5\,m^2$

$T_2 = 500°C = 773\,K$ $\quad \varepsilon_1 = 0/2$

$T_3 = 27°C = 300\,K$ $\quad \varepsilon_2 = 0/5$



شکل مثال ۸-۶ (الف) طرح واره. (ب) شبکه.

از آنجا که مساحت اتاق A_3 خیلی بزرگ است، مقاومت $\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}$ را می‌توان صفر گرفت و داریم $E_{b3} = J_3$. ضریب شکل در مثال ۸-۲ داده شده است:

$$F_{12} = 0/285 = F_{21}$$
$$F_{13} = 1 - F_{12} = 0/715$$
$$F_{23} = 1 - F_{21} = 0/715$$

مقاومت‌های این شبکه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{1-0/2}{(0/2)(0/5)} = 8/0 \qquad \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} = \frac{1-0/5}{(0/5)(0/5)} = 2/0$$

$$\frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{1}{(0/5)(0/285)} = 7/018 \qquad \frac{1}{A_1 F_{13}} = \frac{1}{(0/5)(0/715)} = 2/797$$

$$\frac{1}{A_2 A_{23}} = \frac{1}{(0/5)(0/715)} = 2/797$$

وقتی مقاومت $\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}$ را برابر صفر بگیریم، شبکه‌ای مطابق شکل بالا خواهیم داشت. برای محاسبه جریان گرما در هر سطح باید رادیوسیتی‌های J_1 و J_2 را تعیین کنیم. با صفر قرار دادن مجموع شدت جریان گرمای وارد به گره‌های J_1 و J_2، شبکه حل می‌شود:

(الف) گره J_1 :
$$\frac{E_{b1} - J_1}{8/0} + \frac{J_2 - J_1}{7/018} + \frac{E_{b3} - J_1}{2/797} = 0$$

(ب) گره J_2 :
$$\frac{J_1 - J_2}{7/018} + \frac{E_{b3} - J_2}{2/797} + \frac{E_{b2} - J_2}{2/0} = 0$$

اکنون :

$$E_{b1} = \sigma T_1^4 = 148/87\ \frac{kW}{m^2}\ \left[47190\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

$$E_{b2} = \sigma T_2^4 = 20/241\ \frac{kW}{m^2}\ \left[6416\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

$$E_{b3} = \sigma T_3^4 = 0/45912\ \frac{kW}{m^2}\ \left[145/6\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

با جای‌گزینی مقادیر E_{b1}، E_{b2} و E_{b3} در معادلات (الف) و (ب) دو معادله و دو مجهول J_1 و J_2 خواهیم داشت که می‌توان آنها را هم‌زمان حل کرد و داریم:

$$J_1 = 33/469\ \frac{kW}{m^2} \qquad J_2 = 15/054\ \frac{kW}{m^2}$$

کل اتلاف گرما از صفحه ۱ برابر است با:

$$q_1 = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{۱۴۸/۸۷ - ۳۳/۴۶۹}{۸/۰} = ۱۴/۴۲۵ \text{ kW}$$

و کل اتلاف گرما از صفحه ۲ برابر است با:

$$q_2 = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{۲۰/۲۴۱ - ۱۵/۰۵۴}{۲/۰} = ۲/۵۹۴ \text{ kW}$$

کل گرمای دریافتی توسط اتاق برابر است با:

$$q_3 = \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} + \frac{J_2 - J_3}{\frac{1}{A_2 F_{23}}}$$

$$= \frac{۳۳/۴۶۹ - ۰/۴۵۹۲}{۲/۷۹۷} + \frac{۱۵/۰۵۴ - ۰/۴۵۹۲}{۲/۷۹۷}$$

$$= ۱۷/۰۲۰ \text{ kW} \left[۵۸۰۷۰ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

از نظر تعادل باید:

$$q_3 = q_1 + q_2$$

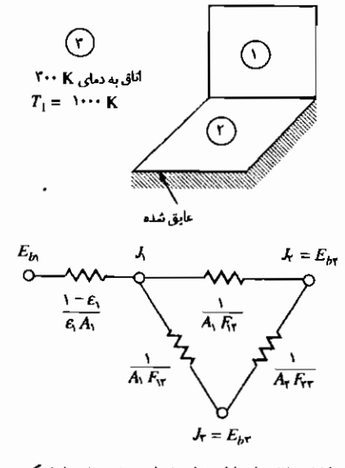
زیرا اتاق باید انرژی خالص تلف‌شده از هر دو صفحه را جذب کند.

مثال ۸-۷ سطح در توازن تابشی

دو مستطیل به ابعاد ۵۰ در ۵۰ cm و عمود بر هم با یک یال مشترک قرار دارند. یک سطح دارای $T_1 = ۱۰۰۰$ K، $\varepsilon_1 = ۰/۶$ است در حالی که سطح دیگر عایق‌شده و با اتاق بزرگ احاطه‌کنندهٔ آن به‌دمای ۳۰۰ K در توازن تابشی‌است. دمای سطح عایق‌شده و گرمای از دست‌رفته از سطح به دمای ۱۰۰۰ K را معین‌کنید.

حل:

با وجودی که این مسأله دو سطح دارد که مبادله گرما می‌کنند و یک سطح که عایق است یا تابش مجدد می‌کند می‌توان از معادله (۸-۴۱) برای محاسبه استفاده کرد زیرا یکی از سطوح مبادله گرما (اتاق) محدب نیست. شبکه تابشی در شکل زیر نشان داده شده که سطح ۳، اتاق و سطح۲، سطح عایق‌شده است. توجه کنید که $J_3 = E_{b3}$، زیرا اتاق بزرگ است و $\frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}$ به صفر نزدیک می‌شود.



شکل مثال ۸-۷ (الف) طرح واره، (ب) شبکه.

چون سطح ۲ عایق‌شده، انتقال گرمایش صفر است و $J_2 = E_{b2}$. J_2 در شبکه مزبور «شناور» و از توازن تابشی کل تعیین می‌شود. ضرایب شکل از شکل ۸-۱۴ برابرند با:

$$F_{12} = ۰/۲ = F_{21}$$

چون $F_{11} = ۰$ و $F_{22} = ۰$ داریم:

$$F_{12} + F_{13} = ۱/۰ \quad \text{و} \quad F_{13} = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸ = F_{23}$$

$$A_1 = A_2 = (۰/۵)^2 = ۰/۲۵ \text{ m}^2$$

مقاومت‌ها به‌صورت زیر است:

$$\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{۰/۴}{(۰/۶)(۰/۲۵)} = ۲/۶۶۷$$

$$\frac{1}{A_1 F_{13}} = \frac{1}{A_2 F_{23}} = \frac{1}{(۰/۲۵)(۰/۸)} = ۵/۰$$

$$\frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{1}{(۰/۲۵)(۰/۲)} = ۲۰/۰$$

هم‌چنین داریم:

$$E_{b1} = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-8})(۱۰۰۰)^4 = ۵/۶۶۹ \times ۱۰^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$J_3 = E_{b3} = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-8})(۳۰۰)^4 = ۴۵۹/۲ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

مدار کلی، مداری سری - موازی است و انتقال گرما برابر است با:

$$q = \frac{E_{b1} - E_{b3}}{R_{\text{معادل}}}$$

داریم:

$$R_{\text{معادل}} = ۲/۶۶۷ + \frac{1}{\frac{1}{۵} + \frac{1}{۲۰ + ۵}} = ۶/۸۳۳$$

و:

$$q = \frac{۵۶۶۹۰ - ۴۵۹/۲}{۶/۸۳۳} = ۸/۲۲۹ \text{ kW} \left[۲۸۰۸۶ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

این انتقال گرما را چنین نیز می‌توان نوشت:

$$q = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}}$$

با جای‌گزینی این مقادیر داریم:

$$J_1 = ۳۴۷۴۵ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

مقدار J_2 از متناسب قرار دادن مقاومت‌های بین J_1 و J_2 تعیین می‌شود، بنابراین:

$$\frac{J_1 - J_2}{۲۰} = \frac{J_1 - J_3}{۲۰ + ۵}$$

و:

$$J_2 = ۷۳۱۶ = E_{b2} = \sigma T_2^4$$

بالاخره، دمای سطح عایق‌شده را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$T_2 = \left(\frac{۷۳۱۶}{۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-8}}\right)^{\frac{1}{4}} = ۵۵۹/۴ \text{ K} \qquad [۶۱۹^\circ\text{F}]$$

اظهار نظر: باز هم توجه کنید که از رابطه $J = E_b$ در دو حالت این مسأله استفاده کردیم اما با دلایل متفاوت. $J_2 = E_{b2}$ زیرا سطح ۲ عایق‌شده و شدت جریان صفر از مقاومت سطحی می‌گذرد، در حالی که $J_3 = E_{b3}$ زیرا مقاومت سطحی برای سطح ۳ به علت $A_3 \to \infty$ به صفر نزدیک می‌شود.

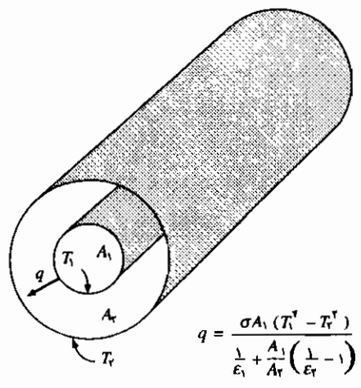
۸-۷ صفحات موازی نامحدود

در دو صفحه موازی و نامحدود، A_1 و A_2 مساوی و ضریب شکل در تابش برابر واحد است زیرا تمام تابش خروجی از یکی از صفحات، به دیگری می‌رسد. شبکه مربوطه در شکل ۸-۲۶ نشان داده شده است و جریان گرمای واحد سطح را می‌توان با قرار دادن $A_1 = A_2$ و $F_{12} = ۱/۰$ از معادله (۸-۴۰) به‌دست آورد. بنابراین:

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - ۱} \qquad (۴۲\text{-}۸)$$

وقتی دو استوانه هم‌مرکز بلند مطابق شکل ۸-۲۹ مبادله گرما می‌کنند می‌توانیم باز هم از معادلهٔ (۸-۴۰) استفاده کنیم. با بازنویسی این معادله و با توجه به اینکه $F_{12} = ۱/۰$ است، داریم:

$$q = \frac{\sigma A_1(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - ۱\right)} \qquad (۴۳\text{-}۸)$$



شکل ۸-۲۹ مبادله تابشی بین دو سطح استوانه‌ای.

برای دو جسم استوانه‌ای می‌توان به‌جای نسبت دو سطح $\frac{A_1}{A_2}$، نسبت دو قطر $\frac{d_1}{d_2}$ را قرار داد.

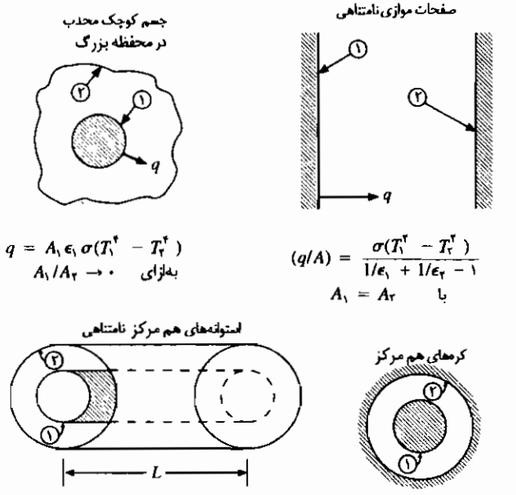
شیئی محدب در محفظه بزرگ

اهمیت ویژه معادلهٔ (۸-۴۳) در کاربرد آن برای حالت حدی جسم محدبی است که به‌طور کامل توسط سطحی مقعر و خیلی بزرگ احاطه شده است. در این حال $\frac{A_1}{A_2} \to ۰$ و به رابطهٔ سادهٔ زیر می‌رسیم:

$$q = \sigma A_1 \varepsilon_1(T_1^4 - T_2^4) \qquad (۴۳\text{-}۸\text{الف})$$

از این معادله برای محاسبه اتلاف انرژی تابشی از جسم گرم در اتاق بزرگ، استفاده می‌شود.

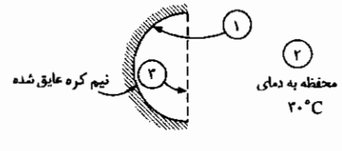
بعضی از موارد انتقال گرمای تابشی برای مسائل دوجسمی ساده در شکل ۸-۳۰ خلاصه شده‌اند. در این شکل، فرض می‌شود که هر دو سطح خاکستری و پخشنده هستند.



شکل ۸-۳۰ انتقال گرمای تابشی بین سطوح دوجسمی، خاکستری ساده. در تمام موارد $F_{12} = ۱/۰$.

مثال ۸-۸ نیم کرهٔ باز در اتاق بزرگ

دمای ثابت نیم‌کره به قطر ۳۰ cm شکل زیر ۵۰۰°C و پشت نیم‌کره عایق و ضریب گسیل سطح آن ۰/۴ است. قسمت باز این نیم‌کره با محفظه‌ای بزرگ به دمای ۳۰°C مبادلهٔ انرژی تابشی می‌کند. مبادلهٔ تابشی خالص را حساب کنید.



شکل مثال ۸-۸.

حل :

این شیء کاملاً توسط محفظه‌ای احاطه شده است ولی سطح داخلی کره، محدب نیست یعنی خودش را می‌بیند و از این‌رو مجاز نیستیم از معادله (۸-۴۳الف) استفاده کنیم. سطح داخل کره را ۱ و محفظه را به عنوان سطح ۲ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین سطح موهومی ۳ را درنظر می‌گیریم که قسمت باز را می‌پوشاند. در واقع مسأله‌ای دوسطحی داریم (سطح ۱ و ۲) و از این‌رو می‌توان از معادلهٔ (۸-۴۰) برای محاسبهٔ مقدار انتقال گرما استفاده کرد. بنابراین:

$$E_{b1} = \sigma T_1^4 = \sigma(773)^4 = 20241 \ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b2} = \sigma T_2^4 = \sigma(303)^4 = 478 \ \frac{W}{m^2}$$

$$A_1 = 2\pi r^2 = (2)\pi(0/15)^2 = 0/1414 \ m^2$$

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{0/6}{(0/4)(0/1414)} = 10/61$$

$$A_2 \to \infty$$

لذا :

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} \to 0$$

می‌بینیم که تمام تابش خروجی از سطح ۱ بالاخره به محفظهٔ ۲ خواهد رسید و به سطح موهومی ۳ نیز برخورد می‌کند؛ یعنی $F_{13} = F_{12}$. هم چنین ملاحظه می‌شود که :

$$A_1 F_{13} = A_3 F_{31}$$

ولی $F_{31} = 1/0$ و در نتیجه:

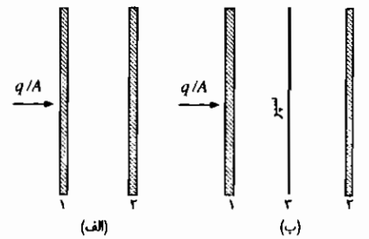
$$F_{13} = F_{12} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} = 0/5$$

پس $\frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{1}{(0/1414)(0/5)} = 14/14$ و می‌توانیم مقدار انتقال گرما را با جای‌گزینی این مقادیر در معادلهٔ (۸-۴۰) حساب کنیم:

$$q = \frac{20241 - 478}{10/61 + 14/14 + 0} = 799 \ W$$

❑ ۸-۸ سپرهای تابشی

یک روش کاهش دادن انتقال گرمای تابشی بین دو سطح خاص، استفاده از مواد خیلی بازتابنده است. روش دیگر استفاده از سپرهای تابشی بین سطوح مبادله کننده گرما است. این سپرها گرمایی به سیستم کل نداده، از آن گرمایی نمی‌گیرند؛ آنها تنها مقاومت دیگری را در مسیر جریان گرما ایجاد می‌کنند تا در انتقال گرمای کل تأخیر ایجاد شود. دو صفحه نامحدود و موازی شکل (۸-۳۱ الف) را درنظر بگیرید. نشان دادیم که مبادلهٔ گرما بین این صفحات را می‌توان از معادلهٔ (۸-۴۲) حساب کرد. حال همین دو صفحه را با سپری تابشی در بین آنها، مطابق شکل (۸-۳۱ ب) در نظر بگیرید. مقدار انتقال گرما در این حالت جدید را پیدا و با انتقال گرمای حالت بدون سپر مقایسه می‌کنیم.



شکل ۸-۳۱ تابش بین صفحات نامحدود موازی با سپر تابشی و بدون آن.

چون این سپر، گرمایی به سیستم نداده یا از آن نمی‌گیرد انتقال گرما بین صفحه ۱ و سپر باید دقیقاً همانی باشد که بین سپر و صفحه ۲ موجود است و این برابر انتقال گرمای کل است.

بنابراین:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad (۸-۴۴)$$

تنها مجهول معادلهٔ (۸-۴۴) دمای سپر T_3 است. انتقال گرما با به‌دست آوردن این دما به سادگی حساب می‌شود. اگر ضرایب گسیل سه سطح مساوی باشد، یعنی $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ به رابطهٔ ساده زیر می‌رسیم:

$$T_3^4 = \frac{1}{2}(T_1^4 + T_2^4) \qquad (۸-۴۵)$$

و انتقال گرما برابر است با:

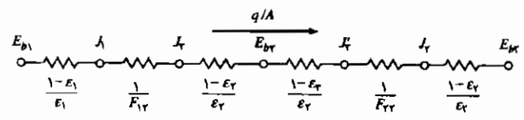
$$\frac{q}{A} = \frac{\frac{1}{2}\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1}$$

ولی چون $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ پس این جریان گرما تنها نصف مقدار حالت بدون سپر است. شبکه تابشی وضعیت شکل (۸-۳۱ ب) در شکل ۸-۳۲ داده شده است.

با بررسی شکل ۸-۳۲ به این نتیجه می‌رسیم که با وارد کردن سه سطح جلوی انتقال گرمای تابشی بیش‌تر از حالت دو سطحی گرفته می‌شود که مقابل هم قرار دارند؛ یک مقاومت فضایی بیش‌تر و دو مقاومت سطحی بیش‌تر برای سپر. هرچه ضریب بازتاب سپر بیش‌تر باشد، یعنی هر چه ضریب گسیل آن کم‌تر باشد، مقاومت‌های سطح وارد شده بیش‌تر است. حتی برای سپر سیاه با $\varepsilon = 1$ و مقاومت سطحی صفر، باز هم یک مقاومت فضایی اضافی وجود دارد که در شبکه وارد می‌شود. در نتیجه، ورود هر سطحی که مسیر تابش را سد می‌کند همواره موجب کاهش آهنگ انتقال گرما می‌شود و این ربطی به خواص گسیلی سطح ندارد.

مسائل سپر تابشی چند تایی را می‌توان مثل بالا بحث کرد.

انتقال گرمای کل در حالتی که ضرایب گسیل تمام سطوح متفاوتند را می‌توان خیلی ساده با استفاده از شبکه سری که دارای تعداد مناسبی المان است، مشابه شکل ۸-۳۲ حساب کرد. اگر ضرایب



شکل ۸-۳۲ شبکه تابشی برای دو صفحه موازی که توسط یک سپر تابشی از هم جدا شده‌اند.

گسیل تمام سطوح برابر باشند می‌توان رابطهٔ نسبتاً ساده‌ای برای انتقال گرما به‌دست آورد و در این حالت سطوح را می‌توان به صورت صفحات موازی نامحدود در نظر گرفت. فرض کنیم تعداد سپرها n باشد. شبکه‌ای تابشی برای سیستم در نظر می‌گیریم. تمام «مقاومت‌های سطحی» برابرند زیرا ضرایب گسیل برابرند. برای هر سپر دو مقاومت و برای هر سطح انتقال گرما یکی وجود خواهد داشت. $n + 1$ «مقاومت فضایی» وجود دارد که تماماً برابر واحدند زیرا ضرایب شکل تابشی صفحات موازی و نامحدود برابر واحدند. بنابراین مقاومت کل این شبکه برابر است با:

$$R(\text{سپر } n) = (2n+2)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + (n+1)(1) = (n+1)\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$$

مقاومت در حالت بدون سپر برابر است با:

$$R(\text{بدون سپر}) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

توجه داشته باشید که مقاومت در حالت باسپر $n + 1$ برابر وقتی است که سپری وجود ندارد.

بنابراین:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{باسپر}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}} \qquad (۸-۴۶)$$

به شرطی که دماهای سطوح انتقال گرمای دو حالت یکی باشد. روش شبکه - تابشی را می‌توان در مورد مسائل سیستم‌های استوانه‌ای سپردار نیز به کار برد. در این حالات باید از روابط صحیح سطوح در فرمول‌بندی اجزای مقاومت استفاده کرد.

توجه داشته باشید که تحلیل‌های فوق در مورد صفحات موازی نامحدود بر مبنای واحد سطح انجام گرفته‌اند زیرا تمام مساحت‌ها برابرند.

مثال ۸-۹ کاهش انتقال گرما با سپر صفحه موازی

دو صفحه موازی خیلی بزرگ به ضرایب گسیل ۰/۳ و ۰/۸ مبادله گرما می‌کنند. اگر یک سپر تابشی آلومینیمی صیقل یافته ($\varepsilon = 0/04$) بین آنها قرار گیرد درصد کاهش انتقال گرما را بیابید.

حل :

انتقال گرما در حالت بدون سپر چنین محاسبه می‌شود:

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = 0/279\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

شبکه تابشی برای بدون سپر در شکل ۸-۳۲ نشان داده شده است. مقاومت‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{1-0/3}{0/3} = 2/333$$

$$\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} = \frac{1-0/04}{0/04} = 24/0$$

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{1-0/8}{0/8} = 0/25$$

مقاومت کل برابر است با:

$$2/333 + (2)(24/0) + (2)(1) + 0/25 = 52/583$$

و مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{52/583} = 0/01902\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

بنابراین انتقال گرما ۹۳/۲ درصد **کاهش** می‌یابد.

مثال ۸-۱۰ سپر استوانه‌ای باز در اتاق بزرگ

دو استوانه هم‌مرکز مثال ۸-۳ دارای $T_1 = 1000 K$، $\varepsilon_1 = 0/8$ و $\varepsilon_2 = 0/2$ در اتاق بزرگی به دمای ۳۰۰ K قرار دارند. استوانه بیرونی در توازن تابشی است. دمای استوانه بیرونی و اتلاف گرمای کل از استوانه داخلی را حساب کنید.

حل :

شبکه این مسأله در شکل زیر نشان داده شده است. اتاق با سطح ۳ مشخص شده و چون اتاق خیلی بزرگ است، $J_3 = E_{b3}$. در این مسأله باید داخل و خارج سطح ۲ را در نظر گرفته، برای آنها پانویس‌های i و o را در نظر بگیریم . ضرایب شکل را می‌توان از مثال ۸-۳ چنین به‌دست آورد:

$$F_{12} = 0/8253 \qquad F_{13} = 0/1747$$

$$F_{23i} = (2)(0/1294) = 0/2588 \qquad F_{23o} = 1/0$$

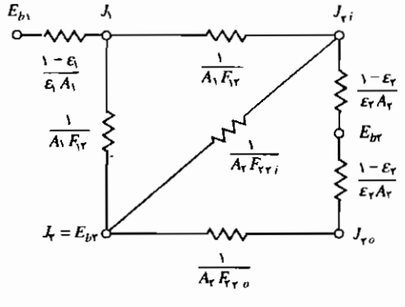
و هم چنین:

$$A_1 = \pi(0/1)(0/2) = 0/06283 \ m^2$$

$$A_2 = \pi(0/2)(0/2) = 0/12566 \ m^2$$

$$E_{b1} = (5/669 \times 10^{-8})(1000)^4 = 5/669 \times 10^4 \ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b3} = (5/669 \times 10^{-8})(300)^4 = 459/2 \ \frac{W}{m^2}$$



شکل مثال ۸-۱۰.

و مقاومت‌ها را می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = ۳/۹۷۹ \qquad \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} = ۳۱/۸۳$$

$$\frac{1}{A_1 F_{12}} = ۱۹/۲۸ \qquad \frac{1}{A_2 F_{23i}} = ۳۰/۷۵$$

$$\frac{1}{A_2 F_{23o}} = ۷/۹۵۸ \qquad \frac{1}{A_1 F_{13}} = ۹۱/۱$$

این شبکه را می‌توان به صورت مدار موازی - سری حل کرد و انتقال گرما را به‌دست آورد ولی به هر حال به رادیوسیتی‌ها نیاز داریم واز این‌رو باید برای به‌دست آوردن J_1، J_{2i} و J_{2o} سه معادله گرهی بنویسیم. حاصل جمع جریان‌های وارده به هر گره را برابر صفر قرار می‌دهیم:

گره J_1:
$$\frac{E_{b1}-J_1}{۳/۹۷۹} + \frac{E_{b3}-J_1}{۹۱/۱} + \frac{J_{2i}-J_1}{۱۹/۲۸} = ۰$$

گره J_{2i}
$$\frac{J_1-J_{2i}}{۱۹/۲۸} + \frac{E_{b3}-J_{2i}}{۳۰/۷۵} + \frac{J_{2o}-J_{2i}}{(۲)(۳۱/۸۳)} = ۰$$

گره J_{2o}
$$\frac{E_{b3}-J_{2o}}{۷/۹۵۸} + \frac{J_{2i}-J_{2o}}{(۲)(۳۱/۸۳)} = ۰$$

پس از حل معادلات فوق داریم:

$$J_1 = ۴۹۷۳۲ \frac{W}{m^2}$$

$$J_{2i} = ۲۶۴۴۴ \frac{W}{m^2}$$

$$J_{2o} = ۳۴۴۶ \frac{W}{m^2}$$

بنابراین مقدار انتقال گرما چنین حساب می‌شود:

$$q = \frac{E_{b1}-J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{۵۶۶۹۰ - ۴۹۷۳۲}{۳/۹۷۹} = ۱۷۴۹ \text{ W } \left[۵۹۶۸ \frac{Btu}{h}\right]$$

با توجه به شبکه داریم:

$$E_{b2} = \frac{J_{2i}+J_{2o}}{۲} = \frac{۲۶۴۴۴ + ۳۳۴۶}{۲} = ۱۴۸۹۵ \frac{W}{m^2}$$

و:

$$T_2 = \left(\frac{۱۴۸۹۵}{۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸}}\right)^{\frac{1}{۴}} = ۷۱۶ \text{ K } [۸۲۹^\circ F]$$

چنان‌چه استوانه بیرونی موجود نباشد تا مثل «سپر» عمل کند مقدار انتقال گرما از استوانه ۱ را می‌شد از معادله (۸-۴۳ الف) چنین حساب کرد:

$$q = \varepsilon_1 A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

$$= (۰/۸)(۰/۰۶۲۸۳)(۵۶۶۹۰ - ۴۵۹/۲) = ۲۸۲۶W \left[۹۶۴۴ \frac{Btu}{h}\right]$$

❑ ۸-۹ تابش گاز

مبادلهٔ تابش بین گاز وسطح انتقال گرما خیلی پیچیده‌تر از حالات بخش‌های قبلی است. گازها در اغلب موارد برخلاف اکثر اجسام صلب نسبت به تابش شفافند. آنها معمولاً عمل جذب و گسیل تابش را فقط در باندهای طول‌موج باریک و معینی انجام می‌دهند. بعضی از گازها، مثل N_2، O_2 و سایر گازهایی که دارای ساختار ملکولی قرینه غیرقطبی‌اند، اساساً در دماهای پایین، شفافند در حالی که Co_2، H_2O و گازهای هیدروکربنی مختلف، تا حدود زیادی تابش می‌کنند.

جذب تابش در لایه‌های گاز را می‌توان با در نظر گرفتن سیستم شکل ۸-۳۳ به‌طور تحلیلی و به این صورت توضیح داد. پرتو تک‌فام تابشی با شدت I_λ بر لایه گازی به ضخامت dx برخورد می‌کند. فرض می‌شود کاهش شدت ناشی از جذب در لایه‌های گاز متناسب با ضخامت گاز لایه و شدت تابش در آن نقطه باشد. بنابراین:

$$dI_\lambda = - a_\lambda I_\lambda \, dx \qquad (۴۷-۸)$$

که ثابت نسبت a_λ **به ضریب جذب تک‌فام** موسوم است. از این معادله انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{I_{\lambda_0}}^{I_{\lambda_x}} \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = \int_0^x - a_\lambda \, dx$$

یا:

$$\frac{I_{\lambda_x}}{I_{\lambda_0}} = e^{-a_\lambda x} \qquad (۴۸-۸)$$

معادلهٔ (۸-۴۸) به قانون بیر Beer موسوم است و فرمول واپاشی نَمایی را نشان می‌دهد که با آن آشنا هستیم و در بسیاری از انواع تحلیل‌های تابش مربوط به مسأله جذب تجربه شده است. طبق تعاریف بخش ۸-۳، ضریب گسیل تک‌فام چنین به‌دست می‌آید:

$$\tau_\lambda = e^{-a_\lambda x} \qquad (۴۹-۸)$$

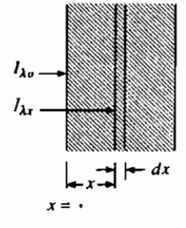
چنان‌چه گاز یادشده غیربازتابی باشد، داریم:

$$\tau_\lambda + \alpha_\lambda = ۱$$

و:

$$\alpha_\lambda = ۱ - e^{-a_\lambda x} \qquad (۵۰-۸)$$

همان‌طور که در بالا گفتیم، گازها اغلب فقط در باندهای طول‌موج باریک جاذب هستند. مثلاً ضریب جذب بخار آب بین ۱/۴ و ۱/۵μm حدود ۰/۷ و بین ۱/۶ و ۱/۸μm حدود ۰/۸ و بین ۲/۶ و ۲/۸μm حدود ۱/۰ و بین ۵/۵ و ۷/۰μm حدود ۱/۰ است. همان‌طور که در معادله (۸-۵۰) دیدیم، ضریب جذب نیز تابعی از ضخامت لایه گاز است و به دما نیز بستگی دارد.



شکل ۸-۳۳ جذب در لایه گاز.

محاسبهٔ خواص تابش - گاز خیلی پیچیده است و برای کسب اطلاع بیش‌تر باید به مراجع ۲۳ تا ۲۵ رجوع کرد. هتل Hottel [۲۳] برای محاسبات مهندسی، روش ساده‌ای ارائه کرده است که می‌توان آن را در محاسبه قابلیت گسیل گازهای بخار آب و دی‌اکسیدکربن به کار برد. برای ارزیابی مبادلهٔ تابشی بین این گازها و محفظه‌ها نیز روش‌هایی در این مرجع آمده است.

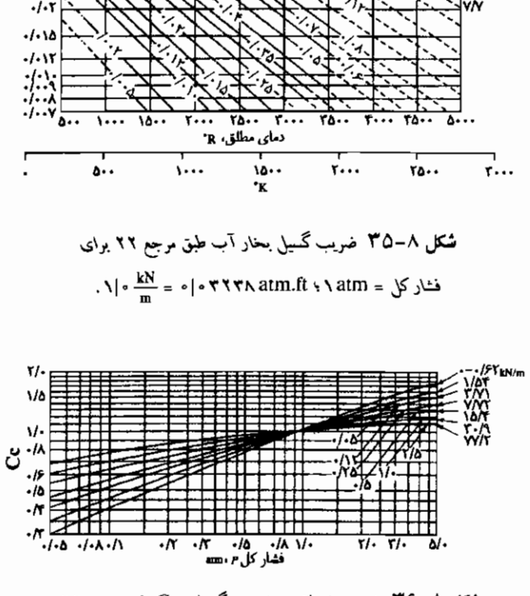
طول پرتو متوسط

در معادلات (۸-۴۸) و (۸-۵۰) تغییر شدت و ضریب جذب لایه گاز به ضخامت x بیان می‌شود. این مقادیر در آزمایشگاه با تابشی اندازه‌گیری می‌شود که مستقیماً از لایه عبور می‌کند. مسأله عملی گازی میان دو صفحه موازی بزرگ را در نظر بگیرید که به‌صورت پخشنده، تابش گسیل می‌دارند. می‌بینیم که انرژی تابشی تراگسیل‌شده در گاز چندین فاصله را طی می‌کند؛ انرژی تراگسیل شدهٔ عمود بر سطح مسافتی برابر با فاصله دو صفحه می‌پیماید؛ انرژی گسیل‌شده تحت زوایای کوچک در فاصله‌ای طولانی‌تر در گازجذب می‌شود؛ و الی آخر. هتل و اگبرت Egbert [۲۹] با هم‌بستگی دقیقی از چندین منبع داده‌های تجربی توانستند قابلیت گسیل دی‌اکسیدکربن و بخار آب را مطابق شکل‌های ۸-۳۴ و ۸-۳۵ عرضه کنند. در این اشکال L_e بعد مشخصه سیستم و به طول پرتو متوسط موسوم است. این طول‌ها طبق هتل [۲۲] و اکرت و دریک Drake [۲۵] در جدول ۸-۳ ارائه شده‌اند. چنان‌چه برای شکل هندسی خاصی طول پرتو متوسط معلوم نباشد می‌توان آن را از فرمول زیر با تقریبی قابل قبول به‌دست آورد:

$$L_e = ۳/۶ \frac{V}{A} \qquad (۵۱-۸)$$

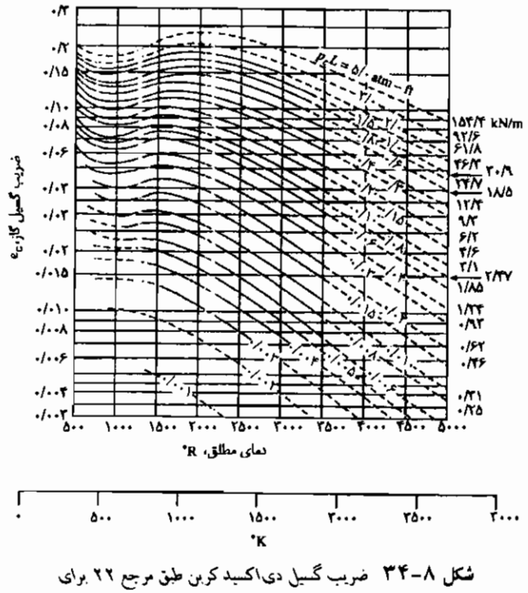
که V حجم کل گاز و A مساحت سطح کل است. فشار کل مخلوط در شکل‌های ۸-۳۴ و ۸-۳۵ برابر ۱ atm و p_c و p_w به ترتیب فشارهای جزئی دی اکسید کربن و بخار آب را نشان می‌دهد. وقتی فشار کل متفاوت با ۱atm باشد ضرایب اصلاحی را می‌توان از اشکال ۸-۳۶ و ۸-۳۷ به‌دست آورد. وقتی دی‌اکسیدکربن و بخار آب هردو موجود باشند باید مقدار اصلاحی دیگری $\Delta\varepsilon$ که از شکل ۸-۳۸ به‌دست می‌آید را از کل قابلیت گسیل‌های دو جزء ترکیب کسر کرد؛ در نتیجه کل قابلیت گسیل گاز ε_g مخلوط چنین بیان می‌شود:

$$\varepsilon_g = C_c \varepsilon_c + C_w \varepsilon_w - \Delta\varepsilon \qquad (۵۲-۸)$$



شکل ۸-۳۵ ضریب گسیل بخار آب طبق مرجع ۲۲ برای فشار کل = ۱ atm = ۰/۰۳۲۳۸ atm.ft = ۰/۱ $\frac{kN}{m}$.

شکل ۸-۳۶ ضریب اصلاحی ضریب گسیل Co_2 طبق مرجع ۲۲.



شکل ۸-۳۴ ضریب گسیل دی‌اکسید کربن طبق مرجع ۲۲ برای فشار کلی = ۱ atm = ۰/۰۳۲۳۸ atm.ft = ۰/۱ $\frac{kN}{m}$.

☑جدول ۸-۳ طول معادل متوسط L_e برای تابش از کل حجم گاز، طبق مراجع ۲۲ و ۲۵

حجم گاز	بعد مشخصه	L_e
حجم بین دو صفحه نامحدود	L فاصله جداکننده	$1/8\ L$
استوانه مدور با ارتفاع = قطر، تابش به مرکزپایه	D قطر	$0/71\ D$
نیم‌کره، تابش به جزء در مرکز پایه	R شعاع	R
کره، تابش به کل سطح	D قطر	$0/65\ D$
استوانه مدور نامحدود، تابش به سطح خمیده محدب	D قطر	$0/95\ D$
استوانه مدور با ارتفاع = قطر، تابش به کل پایه	D قطر	$0/60\ D$
استوانه مدور، ارتفاع نیمه بی‌نهایت، تابش به کل پایه	D قطر	$0/65\ D$
مکعب، تابش به هر وجه	L یال	$0/60\ L$
حجم احاطه کنندهٔ کلاف لوله	D قطر لوله،	
نامحدود، تابش به لوله‌ای تنها	S فاصله بین مرکز لوله‌ها	
آرایش مثلث متساوی‌الاضلاع:		
$S = 2\ D$		$3/0(S - D)$
$S = 3D$		$3/8(S - D)$
آرایش مربعی		$3/5(S - D)$

مبادله گرما بین حجم گاز و محفظه سیاه

اکنون حجم گازی به دمای یکنواخت T_g را درنظر بگیرید که در سطحی سیاه به دمای T_w محصور شده است. به دلیل ساختار باندیِ گاز، جذب انرژی گسیل‌شده توسط دیوار در دمای T_w با انرژیِ گسیل‌شده توسط گاز در دمای T_g متفاوت است. بنابراین انتقال گرمای خالص از گاز به محفظه چنین است :

انرژی که گاز از محفظه جذب می‌کند − انرژی گسیل‌شده توسط گاز $= \frac{q}{A}$

$$= \varepsilon_g(T_g)\,\sigma\,T_g^4 - \alpha_g(T_w)\sigma\,T_w^4 \qquad (۵۳-۸)$$

که $\varepsilon_g(T_g)$ قابلیت گسیل گاز در T_g است که مطابق بالا ارزیابی می‌شود و $\alpha_g(T_w)$ قابلیت جذب گاز برای تابش از محفظه سیاه در T_w است که تابعی از هر دمای T_w و T_g است. رابطه تجربی برای α_g برای مخلوطی از دی‌اکسید کربن و بخار آب چنین است:

$$\alpha_g(T_w) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha \qquad (۵۴-۸)$$

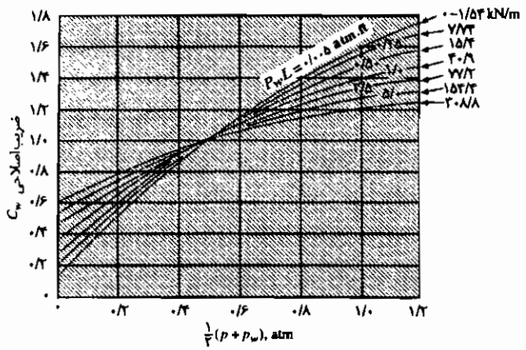
که :

$$\alpha_c = C_c\,\varepsilon'_c\left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0/65} \qquad (۵۵-۸)$$

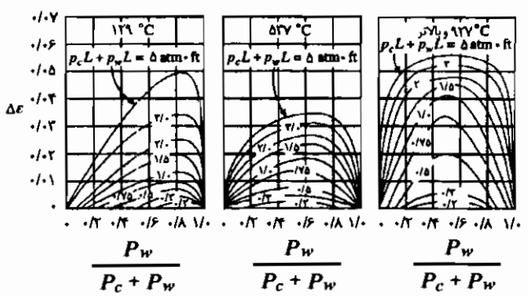
$$\alpha_w = C_w\,\varepsilon'_w\left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0/65} \qquad (۵۶-۸)$$

$$\Delta\alpha = \Delta\varepsilon \quad \text{در } T_w \qquad (۵۷-۸)$$

مقادیر ε'_c و ε'_w از اشکال ۸-۳۴ و ۸-۳۵ بامختص T_w ولی به ازای طول پرتوهای فشاری ارزیابی می‌شود که به ترتیب برابر $p_cL_e\left(\frac{T_w}{T_g}\right)$ و $p_wL_e\left(\frac{T_w}{T_g}\right)$ است.



شکل ۸-۳۷ ضریب اصلاحی ضریب گسیل H_2O طبق مرجع ۲۲.



شکل ۸-۳۸ ضریب اصلاحی وقتی CO_2 و H_2O در محفظه موجود باشد، طبق مرجع ۲۲: $\frac{kN}{m}$ ۳۰/۸۸۱ = ۰/۱atm.ft.

معادلهٔ (۸-۵۳) برای مبادله گرما بین حجم گاز و محفظه سیاه در دمای یکنواخت نوشته شد. اکنون حالت پیچیده‌تری را در نظر بگیرید که در آن حجم گاز در دو **صفحهٔ** موازی سیاه به دماهای متفاوت T_1 و T_2 محصور شده است. در این حالت باید برای هر **صفحه** یک معادله موازنهٔ انرژی بنویسیم. انرژی خالص **دریافت شده** توسط **صفحه** ۱ برابر است با:

$$q_1 = G_1A_1 - E_{b1}A_1 \qquad (۵۸-۸)$$

به همین ترتیب، برای **صفحه** ۲ داریم:

$$q_2 = G_2A_2 - E_{b2}A_2 \qquad (۵۹-۸)$$

تابش‌دهی G_1 و G_2 را باید بر حسب انرژی کلی ارزیابی کنیم که به هر سطح می‌رسد. برای سطح ۱:

تابش‌دهی روی سطح ۱ = تابش‌دهی از گاز + تابش‌دهی از سطح ۲ که از طریق گاز تراگسیل‌شده است.

یا:

$$G_1A_1 = A_gF_{g1}\,\varepsilon_g(T_g)E_{b_g} + A_2F_{21}\,\tau_g(T_2)E_{b2} \qquad (۶۰-۸)$$

ضریب تراگسیل برای تابش از T_2 از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau_g(T_2) = 1 - \alpha_g(T_2)$$

که α_g مثل قبل ارزیابی می‌شود.

تابش‌دهی روی سطح ۲، به روشی مشابه، برابر است با:

$$G_2A_2 = A_gF_{g2}\,\varepsilon_g(T_g)E_{b_g} + A_1F_{12}\,\tau_g(T_1)E_{b1} \qquad (۶۱-۸)$$

چنان‌چه مساحت‌های گاز را برای سیستم صفحه − موازی به صورت $A_g = A_1 = A_2$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $F_{g1} = F_{g2} = 1/0$ می‌شود. هم‌چنین، $F_{12} = F_{21} = 1/0$ است. با تعیین G_1 و G_2 انتقال گرما به هر سطح را می‌توان از معادلات (۸-۵۸) و (۸-۵۹) حساب کرد.

مبادله گرما بین حجم گاز و محفظه خاکستری

تا اینجا در محاسبات تابش − گاز صرفاً سطوح سیاه را بررسی کردیم که با گاز مبادله گرما می‌کنند. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، دیواره‌های محفظه کثیف و دود گرفته‌اند. ضریب گسیل دیواره خیلی بالا است و محاسبه انتقال گرما با معادلهٔ (۸-۵۳) ممکن است تقریباً قابل قبول باشد. تحلیل محفظه‌های خاکستری خیلی پیچیده است زیرا باید در پدیده‌های بازتاب چندگانه، مشخصات جذب − باند گاز را به حساب آورد. هاتل [۲۲] نشان داده است که در محاسبات مهندسی، مقدار انتقال گرمای خالص به محفظه خاکستری به ضریب گسیل ε_w را می‌توان با ضرب معادلهٔ (۸-۵۳) در ضریبی، به طور تقریبی به‌دست آورد. به طوری که:

$$\frac{q_{\text{خاکستری}}}{q_{\text{سیاه}}} = \frac{\varepsilon_w + 1}{2} \qquad \text{برای } \varepsilon_w > 0/8 \qquad (۶۲-۸)$$

برای محاسبه مقدار انتقال گرما وقتی که $\varepsilon_w < 0/8$ است باید از روش های خیلی مشکل‌تر استفاده کرد.

مثال ۸-۱۱ تابش گاز در کوره

دیوارهای داخلی کوره‌ای مکعبی به ضلع ۰/۵ m تماماً سیاه‌اند. گاز داخل کوره دارای ۲۰ درصد حجم اکسید کربن و ۸۰ درصد ازت در فشار ۱ atm و دمای ۱۵۰۰ K است. دمای دیوارهای کوره ۳۰۰°C است. مقدار بار سرمایی مورد نیاز برای رساندن دیوارها به دمایی خاص را حساب کنید.

حل :

برای این محاسبه از معادله (۸-۵۳) استفاده می‌کنیم:

(الف)
$$\frac{q}{A} = \varepsilon_g(T_g)\,\sigma\,T_g^4 - \alpha_g(T_w)\sigma\,T_w^4$$

که:

$$\sigma T_g^4 = (5/669\times10^{-8})(1500)^4 = 287\ \frac{kW}{m^2}\left[90980\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

$$\sigma T_w^4 = (5/669\times10^{-8})(573)^4 = 6/11\ \frac{kW}{m^2}\left[1937\ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

طول پرتو معادل از جدول ۸-۲ برابر است با:

$$L_e = (0/6)(0/5) = 0/3\,m\ [0/984\,ft]$$

و فشار جزئی CO_2 برابر 0/2 atm است و یا:

$$p_c = (0/2)(1/0132\times10^5) = 20/26\ kPa\left[2/94\ \frac{lb}{in^2}\ abs\right]$$

بنابراین $p_cL_e = 6/08\ \frac{kN}{m}$ و به ازای دمای ۱۵۰۰ K به شکل ۸-۳۴ مراجعه کرده، داریم:

$$\varepsilon_c = 0/072 = \varepsilon_g(T_g)$$

چون فشار کل ۱ atm است نیازی به ضریب اصلاحی نداریم. برای ارزیابی $\alpha_g(T_w)$ دمای ۵۷۳ K و طول پرتو − فشار زیر را به کار می‌بریم:

$$p_cL_e\frac{T_w}{T_g} = 6/08\ \frac{573}{1500} = 2/32\ \frac{kN}{m}$$

از شکل ۸-۳۴، $\varepsilon'_c = 0/065$؛ $\varepsilon'_w = 1/0$ و از معادله (۸-۵۵) استفاده کرده، $C_c = 1/0$ داریم:

$$\alpha_g(T_w) = \alpha_c = (0/065)\left(\frac{1500}{573}\right)^{0/65} = 0/121$$

اکنون با استفاده از معادله (الف) داریم:

$$\frac{q}{A} = (0/072)(287) - (0/121)(6/11) = 19/92\ \frac{kW}{m^2}$$

شش وجه داخلی وجود دارد و بنابراین مقدار انتقال گرمای کل برابر است با:

$$q = (19/92)(1/5) = 29/88\ kW\left[102000\ \frac{Btu}{h}\right]$$

مثال ۸-۱۲ مبادله تابشی با گاز بین صفحات سیاه

فاصلهٔ دو صفحه سیاه موازی 0/7 m و دمای آنها ۲۰۰ و ۵۰۰°C است. در بین این صفحات مخلوط گازی مرکب از ۲۰ درصد حجمی CO_2 و ۱۵ درصد بخار آب و ۶۵ درصد N_2 در فشار کل ۳ atm قرار دارد. دمای گاز ۱۰۰۰°C است. مبادله گرما با هر صفحه را بیابید.

حل :

در این مسأله باید از معادله (۸-۵۸) و (۸-۵۹) استفاده کنیم که نیاز به ارزیابی تعدادی خواص فیزیکی دارد. با قرار دادن:

$$T_g = 1000°C = 1273\,K \qquad T_1 = 200°C = 473\,K$$

$$T_2 = 500°C = 773\,K$$

داریم:

$$\sigma\,T_g^4 = E_{b_g} = 148/9\ \frac{kW}{m^2}$$

$$\sigma\,T_1^4 = E_{b_1} = 2/84\ \frac{kW}{m^2}$$

$$\sigma\,T_2^4 = E_{g_2} = 20/24\ \frac{kW}{m^2}$$

با استفاده از جدول ۸-۲، طول پرتو متوسط را چنین حساب می‌کنیم:

$$L_e = (1/8)(0/7) = 1/26\,\text{m}$$

فشارهای جزئی CO_2 و H_2O در این مخلوط در فشار ۳ atm چنین است:

$$p_c = (0/20)(3)(1/0132 \times 10^5) = 60/8\ \text{kPa}\ \left[8/82\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\ \text{abs}\right]$$

$$p_w = (0/15)(3)(1/0132 \times 10^5) = 45/6\ \text{kPa}\ \left[6/61\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\ \text{abs}\right]$$

$$p_c L_e = (60/8)(1/26) = 76/6\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 2/48\ \text{atm.ft}$$

بنابراین:

$$p_w L_e = (45/6)(1/26) = 57/5\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 1/87\ \text{atm.ft}$$

$$p_c L_e + p_w L_e = 134/1\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 4/35\ \text{atm.ft}$$

هم‌چنین،

$$\left(\frac{1}{2}\right)(p + p_w) = (0/5)(3 + 0/45) = 1/725\ \text{atm}$$

و:

$$\frac{p_w}{p_c + p_w} = \frac{0/45}{0/6 + 0/45} = 0/429$$

با مراجعه به نمودارهای محاسباتی مختلف داریم:

$$\varepsilon_w = 0/22 \qquad C_w \approx 1/4$$

$$\varepsilon_c = 0/17 \qquad C_c = 1/1 \qquad \Delta_\varepsilon = 0/055$$

بنابراین از معادلهٔ (۸-۵۲) داریم:

$$\varepsilon_g(T_g) = (1/1)(0/17) + (1/4)(0/22) - 0/055 = 0/44$$

اکنون باید مقادیر α_g را در T_1 و T_2 تعیین کنیم. در $T = T_1 = 473\ \text{K}$ داریم:

$$p_c L_e \left(\frac{T_1}{T_g}\right) = 76/6\ \frac{473}{1273} = 28/5\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$p_w L_e \left(\frac{T_1}{T_g}\right) = 57/5\ \frac{473}{1273} = 21/4\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 0/69\ \text{atm.ft}$$

از نمودارهای محاسباتی داریم:

$$\varepsilon'_w = 0/26 \qquad C_w \approx 1/5$$

$$\varepsilon'_c = 0/13 \qquad C_c = 1/15 \qquad \Delta_\varepsilon = \Delta\alpha = 0/02$$

حال از معادلات (۸-۵۵) و (۸-۵۶) داریم:

$$\alpha_c = (1/15)(0/13)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0/65} = 0/285$$

$$\alpha_w = (1/5)(0/26)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0/65} = 0/608$$

و:

$$\alpha_g(T_1) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha = 0/285 + 0/608 - 0/02 = 0/874$$

$$\tau_g(T_1) = 1 - \alpha_g(T_1) = 0/126$$

در $T = T_2 = 773\ \text{K}$ داریم:

$$p_c L_e \frac{T_2}{T_g} = 76/6\ \frac{773}{1273} = 46/5\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 1/51\ \text{atm.ft}$$

$$p_w L_e \frac{T_2}{T_g} = 57/5\ \frac{773}{1273} = 34/9\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 1/13\ \text{atm.ft}$$

از نمودارهای محاسباتی داریم:

$$\varepsilon'_w = 0/24 \qquad C_w \approx 1/45$$

$$\varepsilon'_c = 0/17 \qquad C_c = 1/13 \qquad \Delta\varepsilon = \Delta\alpha = 0/028$$

$$\alpha_c = (1/13)(0/17)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0/65} = 0/266$$

$$\alpha_w = (1/45)(0/24)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0/65} = 0/436$$

بنابراین:

$$\alpha_g(T_2) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha = 0/266 + 0/436 - 0/028 = 0/674$$

و:

$$\tau_g(T_2) = 1 - \alpha_g(T_2) = 0/326$$

تمام مساحت‌ها در سیستم صفحه - موازی برابر و تمام ضرایب شکل مساوی یک است، بنابراین معادلهٔ (۸-۶۰) چنین می‌شود:

$$G_1 = \varepsilon_g(T_g)E_{b_g} + \tau_g(T_2)E_{b_2}$$

$$= (0/44)(148/9) + (0/326)(20/24) = 72/1\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}\ \left[22860\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^2}\right]$$

به طریق مشابه:

$$G_2 = \varepsilon_g E_{b_g} + \tau_g(T_1)E_{b_1}$$

$$= (0/44)(148/9) + (0/126)(2/84) = 65/9\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

هر دو سطح سیاهند. بنابراین گرمای **دریافت‌شده** توسط **هر** سطح برابر است با:

$$\frac{q_1}{A} = G_1 - E_{b_1} = 72/1 - 2/84 = 69/3\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{q_2}{A} = G_2 - E_{b_2} = 65/9 - 20/24 = 45/7\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

انرژی خالص تلف‌شده توسط این گاز برابر مجموع این دو عدد، یا $115\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ سطح صفحه است.

۸-۱۰ شبکه تابشی برای محیط جاذب و تراگسیلنده

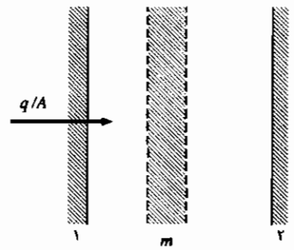
در بحث‌هایی که گذشت روش‌های محاسبه انتقال گرمای تابشی بین سطوحی که بین آنها محیطی کاملاً شفاف است را نشان دادیم. استفاده از روش شبکه تابشی در این نوع مسائل مزیت زیادی دارد.

در بسیاری از مسائل عملی، انتقال گرمای تابشی از محیطی مادی صورت می‌گیرد که هم جاذب و هم تراگسیل است. مواد شیشه‌ای مختلف نمونه‌ای از این قسم محیط‌اند؛ گازها نمونه‌های دیگری‌اند. تا اینجا بعضی از پیچیدگی‌های موجود در تابش گاز را دیده‌ایم. اکنون روش شبکه - تابشی را در تحلیل سیستم‌های جاذب و تراگسیلنده بررسی و بسیاری از مشکلاتِ موجود در مورد گازها را در نظر داریم.

در آغاز، حالت ساده شامل دو سطح غیر تراگسیل را در نظر می‌گیریم که فقط یکدیگر را می‌بینند نه چیز دیگری را، به علاوه بین

این دو سطح را محیط مادی جاذب و تراگسیلنده‌ای قرار می‌دهیم در عمل می‌توان دو صفحه بزرگ را در نظر گرفت که با گازی جاذب یا ورقه‌ای شفاف شیشه‌ای یا پلاستیکی از هم جدا شده‌اند. طرح این حالت در شکل ۸-۳۹ نشان داده شده است. محیط شفاف با زیرنویس m مشخص شده است. فرض می‌کنیم که این محیط غیر بازتابنده است و از همانی کیرشهف استفاده شود، به طوری که:

$$\alpha_m + \tau_m = 1 = \varepsilon_m + \tau_m \qquad (8\text{-}63)$$



شکل ۸-۳۹ سیستم تابشی شامل یک محیط هادی تراگسیل بین دو صفحه.

فرض محیط مادی غیر بازتابنده فقط در مورد گازها معتبر است و در مورد صفحات شیشه‌ای یا پلاستیکی ضرورتاً درست نیست و بسیاری از مواد شیشه‌ای معمولاً ضریب بازتابی از مرتبه ۰/۱ دارند. به علاوه، معمولاً خواص تراگسیلی شیشه‌ها محدود به باند طول‌موج باریک بین حدود ۰/۲ تا $4\,\mu m$ است. بنابراین تحلیلی که خواهد آمد بسیار آرمانی است و اساساً نقطه شروع حل مسائلی است که تراگسیل تابش آنها را باید بررسی کرد. سایر پیچیدگی‌های گازها را بعداً در این بحث ذکر می‌کنیم. وقتی بخواهیم بازتاب و تراگسیل هر دو را به حساب آوریم، باید از فنون تحلیلی بخش ۸-۱۲ استفاده کنیم.

به بحث برمی‌گردیم، توجه کردید که محیط مادی می‌تواند تابش را از سطحی به سطح دیگر گسیل و تراگسیل کند. وظیفه ما تعیین اجزای شبکه جهت استفاده در توضیح این دو نوع فرآیند مبادله است. انرژی تراگسیل‌شده را می‌توان به صورت زیر تحلیل کرد. انرژی خروجی از سطح ۱ که از این محیط مادی تراگسیل‌شده و به سطح ۲ می‌رسد برابر است با:

$$J_1 A_1 F_{12} \tau_m$$

و انرژی خروجی از سطح ۲ که به سطح ۱ می‌رسد برابر است با:

$$J_2 A_2 F_{21} \tau_m$$

بنابراین مبادله خالص در این فرآیند تراگسیل برابر است با:

$$q_{1-2,\text{تراگسیل‌شده}} = A_1 F_{12} \tau_m (J_1 - J_2) = A_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

$$q_{1-2,\text{تراگسیل‌شده}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}(1 - \varepsilon_m)}} \qquad (8\text{-}64)$$

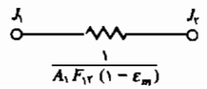
و جزء شبکه توضیح دهنده این فرآیند در شکل ۸-۴۰ نشان داده شده است.

حال فرآیند مبادله بین سطح ۱ و محیط مادی تراگسیلنده را در نظر می‌گیریم. چون فرض کرده‌ایم که محیط مادی غیر بازتابنده باشد، انرژی خروجی از محیط (و نه انرژی تراگسیل‌شده که هم‌اکنون بررسی شد) دقیقاً آن انرژی‌ای است که به وسیله این محیط مادی گسیل می‌شود:

$$J_m = \varepsilon_m E_{bm}$$

و بخشی از انرژی خروجی از محیط مادی که به سطح ۱ می‌رسد برابر است:

$$A_m F_{m1} J_m = A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{bm}$$



شکل ۸-۴۰ جزء شبکه برای تابش تراگسیل‌شده در محیط مادی.

و بخشی از انرژی خروجی از سطح ۱ که به محیط مادی شفاف می‌رسد برابر است با:

$$J_1 A_1 F_{1m} \alpha_m = J_1 A_1 F_{1m} \varepsilon_m$$

در اینجا توجه داشته باشیم که جذب در محیط مادی بدین معنی است که تابش فرودی به محیط مادی «رسیده است». از روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت که مبادله انرژی خالص بین محیط مادی و سطح ۱ برابر اختلاف مقداری است که توسط محیط مادی به طرف سطح ۱ گسیل‌شده و مقدار انرژی جذب شده‌ای که از سطح ۱ فرستاده می‌شود. بنابراین:

$$q_{m-1,\text{خالص}} = A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{bm} - J_1 A_1 F_{1m} \varepsilon_m$$

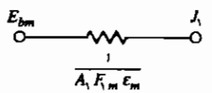
با استفاده از رابطهٔ تقابل:

$$A_1 F_{1m} = A_m F_{m1}$$

داریم:

$$q_{m-1,\text{خالص}} = \frac{E_{bm} - J_1}{\frac{1}{A_1 F_{1m} \varepsilon_m}} \qquad (8\text{-}65)$$

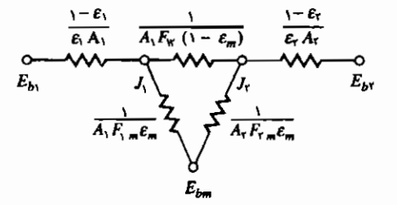
جزء شبکه‌ای شکل ۸-۴۱ این فرآیند مبادلهٔ گرما را نشان می‌دهد. شبکه کل مربوط به وضعیت فیزیکی شکل ۸-۳۹ در شکل ۸-۴۲ نشان داده شده است.



شکل ۸-۴۱ جزء شبکه برای مبادله تابش بین محیط مادی و سطح.

چنان‌چه دمای محیط مادی شفاف برابر مقداری ثابت باشد، پتانسیل E_{bm} طبق فرمول زیر مقداری ثابت است:

$$E_{bm} = \sigma T_m^{\ ۴}$$



شکل ۸-۴۲ شبکه تابشی کل برای سیستم شکل ۸-۳۹.

به بیان دیگر اگر انرژی خالصی به محیط مادی داده نشود، E_{bm} یک گره شناور شده و پتانسیل آن به‌وسیله سایر اجزای شبکه تعیین می‌شود.در حقیقت، ضرایب شکل تابش $F_{۱-۲}$، $F_{۱-m}$ و $F_{۲-m}$ برای این مثال برابر واحدند و بنابراین رابطهٔ جریان گرما را می‌توان تا حدودی ساده کرد؛ گرچه این ضرایب شکل در مقاومت‌های شبکه برای عمومیت دادن به تحلیل منظور شده‌اند.

مشکل بزرگ مبادله گرما بین سطوح خاکستری از طریق گاز جاذب در عمل، تعیین ضریب تراگسیل و ضریب گسیل گاز است. این خواص تابعی از نه تنها دمای گاز بلکه ضخامت لایه گاز نیز هستند؛ یعنی لایه‌های نازک گاز، تابش بیش‌تری از لایه‌های ضخیم تراگسیل می‌کنند. در مسائل عملی معمول، اغلب بیش از دو سطح انتقال گرما، مانند مثال سادهٔ شده فوق، وجود دارد. در نتیجه ضرایب تراگسیل بین سطوح انتقال گرمای مختلف می‌توانند، بسته به جهت گیری هندسی آنها، کاملاً متفاوت باشند. چون دمای گاز تغییر می‌کند، خواص تراگسیلی و گسیلی بسته به محل‌شان در گاز تغییر می‌کنند. یک راه بررسی این وضعیت، تقسیم بدنه گاز به لایه‌ها و ایجاد شبکه تابشی مطابق با آن و مجاز داشتن پتانسیل‌های گره‌های مختلف به «شناور» شدن و در نتیجه رسیدن به توزیع دما - گاز است. حتی در این طریق نیز باید بالاخره از روش تکراری استفاده کرد زیرا خواص تابشی گاز توابعی از«پتانسیل‌های شناور» مجهولند. طبیعتاً، اگر دمای گاز یکنواخت باشد، این حل خیلی ساده‌تر می‌شود.

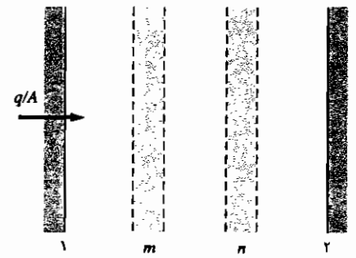
راه حل پیچیده مسأله تابش - گاز را ارائه نخواهیم کرد زیرا کوشش زیاد مورد نیاز برای چنین راه حلی بیش از حد بحث حاضر ما است؛ گر چه خوب است سیستم تراگسیل دو لایه را تحلیل کنیم که می‌توان برای نشان دادن طرح عمومی استدلال بسیاری از مسائل پیچیده به کار برد.

وضعیت فیزیکی شکل ۸-۴۳ را در نظر بگیرید. دو سطح تابنده و جاذب با دو لایه واسطهٔ تراگسیلنده و جاذب از هم جدا شده‌اند. این دو لایه می‌توانند در این تحلیل دو ورقه شفاف، مثل شیشه، و یا دو بخش گازی تقسیم شده باشند. دو لایه تراگسیلنده و جاذب را با زیرنویس‌های m و n مشخص می‌کنیم. مبادلهٔ انرژی بین سطح ۱ و m چنین به‌دست می‌آید:

$$q_{۱-m} = A_۱F_{۱m}\varepsilon_m J_۱ - A_mF_{m۱}\varepsilon_m E_{bm} = \frac{J_۱ - E_{bm}}{\frac{۱}{A_۱F_{۱m}\varepsilon_m}} \qquad (۶۶-۸)$$

و انرژی مبادله شده بین سطح ۲ و n برابر است با:

$$q_{۲-n} = A_۱F_{۲n}\varepsilon_n J_۲ - A_nF_{n۲}\varepsilon_n E_{bn} = \frac{J_۲ - E_{bn}}{\frac{۱}{A_۲F_{۲n}\varepsilon_n}} \qquad (۶۷-۸)$$



شکل ۸-۴۳ سیستم تابشی شامل دو لایه گسیلنده در بین دو صفحه.

بخشی از انرژی خروجی از سطح ۱ که به سطح ۲ می‌رسد برابر است با:

$$q_{۱-۲} = A_۱F_{۱۲}J_۱\tau_m\tau_n = A_۱F_{۱۲}J_۱(۱ - \varepsilon_m)(۱ - \varepsilon_n)$$

و بخشی از انرژی خروجی از سطح ۲ که به سطح ۱ می‌رسد برابر است با:

$$q_{۲-۱} = A_۲F_{۲۱}J_۲\tau_n\tau_m = A_۲F_{۱۲}J_۲(۱ - \varepsilon_n)(۱ - \varepsilon_m)$$

بنابراین مبادلهٔ انرژی خالص تراگسیل‌شده بین سطح ۱ و ۲ برابر است با:

$$q_{۱-۲\text{ تراگسیل‌شده}} = A_۱F_{۱۲}(۱ - \varepsilon_m)(۱ - \varepsilon_n)(J_۱ - J_۲)$$

$$= \frac{J_۱ - J_۲}{\frac{۱}{A_۱F_{۱۲}(۱ - \varepsilon_m)(۱ - \varepsilon_n)}} \qquad (۶۸-۸)$$

و جزء شبکه‌ای نمایشگر این تراگسیل در شکل ۸-۴۴ آمده است. بخشی از انرژی خروجی از سطح ۱ که جذب در n می‌شود برابر است با:

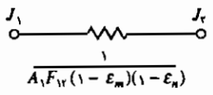
$$q_{۱-n} = A_۱F_{۱n}J_۱\tau_m\varepsilon_n = A_۱F_{۱n}J_۱(۱ - \varepsilon_m)\varepsilon_n$$

هم‌چنین:

$$q_{n-۱} = A_nF_{n۱}J_n\tau_m = A_nF_{n۱}\varepsilon_nE_{bn}(۱ - \varepsilon_m)$$

زیرا:

$$J_n = \varepsilon_n E_{bn}$$



شکل ۸-۴۴ جزء شبکه برای تابش گسیل‌شده بین صفحات.

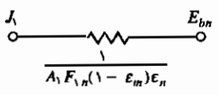
بنابراین مبادله انرژی بین سطح ۱ و n برابر است با:

$$q_{۱-n\text{ خالص}} = A_۱F_{۱n}(۱ - \varepsilon_m)\varepsilon_n(J_۱ - E_{bn})$$

$$= \frac{J_۱ - E_{bn}}{\frac{۱}{A_۱F_{۱n}(۱ - \varepsilon_{in})\varepsilon_n}} \qquad (۶۹-۸)$$

و جزء شبکه‌ای این حالت در شکل ۸-۴۵ مشخص است. به طریقی مشابه، مبادله خالص بین سطح ۲ و m برابر است با:

$$q_{۲-m\text{ خالص}} = \frac{J_۲ - E_{bm}}{\frac{۱}{A_۲F_{۲m}(۱ - \varepsilon_n)\varepsilon_m}} \qquad (۷۰-۸)$$



شکل ۸-۴۵ جزء شبکه برای تابش گسیل‌شده برای محیط n به صفحه ۱.

بخشی از انرژی خروجی از m که جذب در n می‌شود برابر است با:

$$q_{m-n} = J_mA_mF_{mn}\alpha_n = A_mF_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_nE_{bn}$$

و :

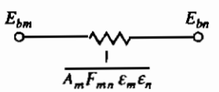
$$q_{n-m} = A_nF_{nm}\varepsilon_n\varepsilon_mE_{bn}$$

بنابراین مبادله انرژی خالص بین m و n برابر است با:

$$q_{m-n\text{ خالص}} = A_mF_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n(E_{bm} - E_{bn})$$

$$= \frac{E_{bm} - E_{bn}}{\frac{۱}{A_mF_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n}} \qquad (۷۱-۸)$$

و جزء شبکه‌ای انتقال انرژی در شکل ۸-۴۶ مشخص است.

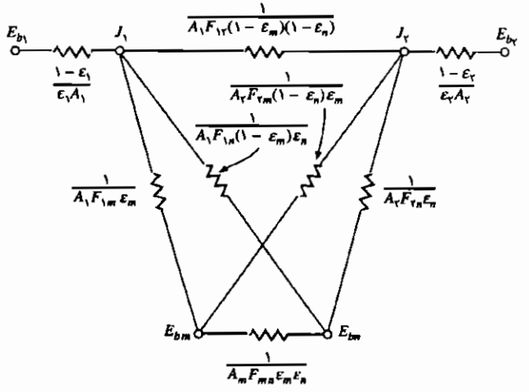


شکل ۸-۴۶ جزء شبکه برای مبادله تابش بین دو لایه شفاف.

شبکه نهایی برای کل فرآیند انتقال گرما در شکل ۸-۴۷ نشان داده شده است و در آن مقاومت‌های سطحی اضافه شده‌اند.

چنان‌چه دماهای دو لایه گسیلنده m و n معلوم باشد، به‌دست آوردن جواب شبکه نسبتاً ساده است زیرا برای مشخص کردن کمیت‌های مختلف جریان -گرما تنها دو پتانسیل مجهول $J_۱$ و $J_۲$ را باید تعیین کرد. در این مورد، دو لایه تراگسیلنده مقدار معینی انرژی، بسته به دمایی که دارند، جذب کرده یا از دست می‌دهند.

وقتی انرژی خالصی به لایه‌های تراگسیل نرسد، باید گره‌های E_{bm} و E_{bn} این تحلیل «شناور» باقی بمانند؛ و برای این سیستم خاص، چهار معادله گرهی برای حل مسأله لازم است.



شکل ۸-۴۷ شبکه تابشی کل برای سیستم شکل ۸-۴۳.

مثال ۸-۱۳ شبکه برای تابش گاز بین صفحات موازی

دو صفحه موازی بزرگ به $T_۱ = ۸۰۰\text{ K}$، $T_۲ = ۴۰۰\text{ K}$، $\varepsilon_۱ = ۰/۳$ و $\varepsilon_۲ = ۰/۷$ است و به وسیله گازی به $\varepsilon_g = ۰/۲$ و $\tau_g = ۰/۸$ از هم جدا شده‌اند. آهنگ انتقال گرما بین دو صفحه و دمای گاز را با استفاده از شبکه تابشی حساب کنید. این حالت را با انتقال گرمای بدون وجود گاز مقایسه کنید.

حل :

برای این مسأله از شبکه شکل ۸-۴۲ استفاده می‌کنیم. تمام ضرایب شکل برای صفحات بزرگ برابر یک است و مقاومت‌های مختلف را می‌توان بر پایه مساحت - واحد چنین حساب کرد:

$$\frac{۱ - \varepsilon_۱}{\varepsilon_۱} = \frac{۰/۷}{۰/۳} = ۲/۳۳۳ \qquad \frac{۱}{F_{۱۲}(۱ - \varepsilon_g)} = \frac{۱}{۱ - ۰/۲} = ۱/۲۵$$

$$\frac{۱ - \varepsilon_۲}{\varepsilon_۲} = \frac{۰/۳}{۰/۷} = ۰/۴۲۸۶ \qquad \frac{۱}{F_{۱g}\varepsilon_g} = \frac{۱}{F_{۲g}\varepsilon_g} = \frac{۱}{۰/۲} = ۵/۰$$

$$E_{b۱} = \sigma T_۱^{\ ۴} = ۲۳۲۲۰\ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲} \qquad E_{b۲} = \sigma T_۲^{\ ۴} = ۱۴۵۱\ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲}$$

مقاومت معادل "مثلث" مرکزی برابر است با:

$$R = \frac{۱}{\frac{۱}{۱/۲۵} + \frac{۱}{۵/۰ + ۵/۰}} = ۱/۱۱۱۱$$

بنابراین مقدار گرمای کل برابر است با:

$$\frac{q}{A} = \frac{E_{b۱} - E_{b۲}}{\sum R} = \frac{۲۳۲۰۰ - ۱۴۵۱}{۲/۳۳۳ + ۱/۱۱۱ + ۰/۴۲۸۶} = ۵۶۱۶\ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲}$$

مقدار انتقال گرما در حالت بدون گاز از معادلهٔ (۸-۴۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{q}{A} = \frac{۲۳۲۰۰ - ۱۴۵۱}{\frac{۱}{۰/۳} + \frac{۱}{۰/۷} - ۱} = ۵۷۸۱ \frac{W}{m^۲}$$

رادیوسیتی‌ها را می‌توان از فرمول زیر حساب کرد:

$$\frac{q}{A} = (E_{b۱} - J_۱)\left(\frac{\varepsilon_۱}{۱ - \varepsilon_۱}\right) = (J_۲ - E_{b۲})\left(\frac{\varepsilon_۲}{۱ - \varepsilon_۲}\right) = ۵۶۱۶ \frac{W}{m^۲}$$

که از آن $J_۱ = ۱۰۰۹۶ \frac{W}{m^۲}$ و $J_۲ = ۳۸۵۸ \frac{W}{m^۲}$ به‌دست می‌آید. برای این شبکه E_{bg} برابر متوسط این مقادیر است.

$$E_{bg} = \frac{۱}{۲}(۱۰۰۹۶ + ۳۸۵۸) = ۶۹۷۷ = \sigma T_g^۴$$

بنابراین دمای گاز برابر است با:

$$T_g = ۵۹۲/۳ \text{K}$$

❑ ۸-۱۱ مبادله تابش با سطوح آینه‌ای

در تمام بحث‌های گذشته مبادله تابش بین سطح پخشنده بررسی شد. در حقیقت، ضرایب شکل تابشی که با معادلهٔ (۸-۲۱) تعریف می‌شود فقط برای تابش پخشنده ارزش دارد زیرا در به‌دست آوردن این رابطه فرض شد که تابش هیچ جهت مرجحی نداشته باشد. در این بخش، تحلیل را بسط می‌دهیم تا بعضی از اشکال هندسی ساده با سطوح بازتاب آینه‌ای را در برگیرد. هیچ سطح واقعی، کاملاً پخشنده یا کاملاً آینه‌ای نیست. گر چه، فرض می‌کنیم که تمام سطوح مورد بررسی به طور پخشنده تابش ***گسیل می‌کنند*** ولی جزئی آینه‌ای و جزئی پخشنده ***بازتاب می‌کنند*** بنابراین ضریب بازتاب را برابر مجموع جزء آینه‌ای و جزء پخشنده می‌گیریم:

$$\rho = \rho_s + \rho_D \tag{۷۲-۸}$$

باز هم فرض می‌شود که همانی کیرشهف اعمال می‌شود به طوری که:

$$\varepsilon = \alpha = ۱ - \rho \tag{۷۳-۸}$$

گرمای خالص تلف‌شده از یک سطح برابر اختلاف انرژی گسیل‌شده و جذب شده است:

$$q = A(\varepsilon E_b - \alpha G) \tag{۷۴-۸}$$

رادیوسیتی پخشنده J_D را به عنوان کل انرژی پخشنده‌ای تعریف می‌کنیم که از واحد سطح در واحد زمان خارج می‌شود، یا:

$$J_D = \varepsilon E_b + \rho_D G \tag{۷۵-۸}$$

تابش‌دهی G را از معادلهٔ (۸-۷۵) به‌دست آورده، در معادلهٔ (۸-۷۴) قرار می‌دهیم و داریم:

$$q = \frac{\varepsilon A}{\rho_D}[E_b(\varepsilon + \rho_D) - J_D]$$

یا به صورت دیگر:

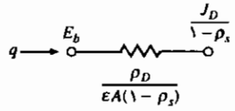
$$q = \frac{E_b - \frac{J_D}{۱ - \rho_s}}{\frac{\rho_D}{\varepsilon A(۱ - \rho_s)}} \tag{۷۶-۸}$$

که $\varepsilon + \rho_D - ۱ = \rho_s$ شده است. به سادگی ملاحظه می‌کنید که معادلهٔ (۸-۷۶) را می‌توان با جزء شبکه‌ای شکل ۸-۴۸ نشان داد. بررسی سریع نشان می‌دهد که وقتی سطح تنها به طریق پخشنده بازتاب می‌کند، یعنی برای $\rho_s = ۰$، این جزء شبکه‌ای به صورت شکل ۸-۲۴ در می‌آید.

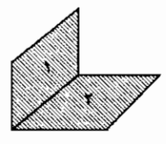
اکنون مبادلهٔ تابش بین دو سطح آینه‌ای - پخشنده را حساب می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم که سطوح مثل شکل ۸-۴۹ قرار گرفته‌اند. در این آرایش هر تابش پخشنده خروجی از سطح ۱ که توسط ۲ به طور آینه‌ای بازتاب می‌شود مستقیماً به صفحه ۱ بازتاب نمی‌شود. این نکته مهمی است، زیرا درحذف این بازتاب‌ها تنها مبادلهٔ پخشنده **مستقیم** بین دو سطح را در نظر می‌گیریم. در پاراگراف‌های بعد نشان خواهیم داد که چگونه باید بازتاب آینه‌ای را تحلیل کرد. برای سطوح شکل ۸-۴۹ مبادلات **پخشنده** چنین به‌دست می‌آید:

$$q_{۱\to۲} = J_{۱D} A_۱ F_{۱۲}(۱ - \rho_{۲s}) \tag{۷۷-۸}$$

$$q_{۲\to۱} = J_{۲D} A_۲ F_{۲۱}(۱ - \rho_{۱s}) \tag{۷۸-۸}$$



شکل ۸-۴۸ جزء شبکه نشان دهنده معادلهٔ (۸-۷۶).



شکل ۸-۴۹.

معادلهٔ (۸-۷۷) تابش پخشنده‌ای را بیان می‌کند که از ۱ خارج می‌شود و به ۲ می‌رسد و ممکن است در رادیوسیتی پخشندهٔ سطح ۲ سهیم باشد ضریب $\rho_s - ۱$ کسر جذب شده به اضافه کسری که به طور پخشنده بازتاب شده را نشان می‌دهد. شمول این ضریب بسیار مهم است زیرا ما تنها مبادله پخشنده مستقیم را بررسی می‌کنیم و بنابراین باید سهم بازتاب آینه‌ای را در حال حاضر در نظر نگیریم. مبادله خالص از تفاضل معادلات (۸-۷۷) و (۸-۷۸) به‌دست می‌آید، طبق مرجع ۲۱:

$$q_{۱۲} = \frac{\frac{J_{۱D}}{۱ - \rho_{۱s}} - \frac{J_{۲D}}{۱ - \rho_{۲s}}}{\frac{۱}{A_۱ F_{۱۲}(۱ - \rho_{۱s})(۱ - \rho_{۲s})}} \tag{۷۹-۸}$$

جزء شبکه بیانگر معادلهٔ (۸-۷۹) در شکل ۸-۵۰ نشان داده شده است.

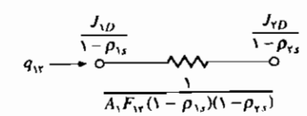
برای تحلیل بازتاب‌های آینه‌ای از روش مراجع ۱۲ و ۱۳ استفاده می‌کنیم. محفظه‌ای با چهار سطح بلند شکل(۸-۵۱) را درنظر بگیرید. سطوح ۱، ۲ و ۴ به طور پخشنده بازتاب می‌کنند در حالی که سطح ۳ هم به صورت آینه‌ای و هم پخشنده بازتاب می‌کند. خط چین‌ها تصاویر آینه‌ای سطوح ۱، ۲ و ۴ را در سطح ۳ نشان می‌دهند. (بازتاب آینه‌ای، تصویر آینه‌ای می‌سازد.) نام‌گذاری (۳) ۲ تصویر آینه‌ای سطح ۲ در آینه ۳ را نشان می‌دهد.

حال تابشی را درنظر بگیرید که از ۲ خارج می‌شود و به ۱ می‌رسد. تابش پخشنده زیر وجود دارد:

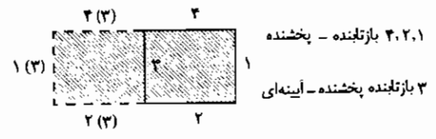
$$(q_{۲\to۱})_{\text{پخشنده مستقیم}} = J_۲ A_۲ F_{۲۱} \tag{۸۰-۸}$$

بخشی از تابش پخشنده از ۲ به صورت آینه‌ای در ۳ بازتاب شده، به ۱ می‌خورد. این تابش آینه‌ای بازتاب شده، مثل انرژی پخشنده آمده از سطح تصویر (۳)۲ عمل می‌کند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$(q_{۲\to۱})_{\text{بازتاب شده آینه‌ای}} = J_۲ A_{۲(۳)} F_{۲(۳)۱} \rho_{۳s} \tag{۸۱-۸}$$



شکل ۸-۵۰ جزء شبکه نشان دهنده معادلهٔ (۸-۷۹).



شکل ۸-۵۱ سیستم با یک سطح آینه‌ای - پخشنده.

ضریب شکل در تابش $F_{۲(۳)۱}$ ضریب بین سطح (۳)۲ و سطح ۱ است. در معادله فوق ضریب بازتاب $\rho_{۳s}$ را قرار می‌دهیم زیرا فقط این کسر از تابش است که به ۱ می‌رسد. البته $A_{۲(۳)} = A_۲$ است. حال داریم:

$$q_{۲\to۱} = J_۲ A_۲ (F_{۲۱} + \rho_{۳s} F_{۲(۳)۱}) \tag{۸۲-۸}$$

با استدلالی مشابه داریم:

$$q_{۱\to۲} = J_۱ A_۱ (F_{۱۲} + \rho_{۳s} F_{۱(۳)۲}) \tag{۸۳-۸}$$

با ترکیب معادلات (۸-۸۲) و (۸-۸۳) و استفاده از رابطه تقابل $A_۱ F_{۱۲} = A_۲ F_{۲۱}$ داریم:

$$q_{۱۲} = \frac{J_۱ - J_۲}{\frac{۱}{A_۱(F_{۱۲} + \rho_{۳s} F_{۱(۳)۲})}} \tag{۸۴-۸}$$

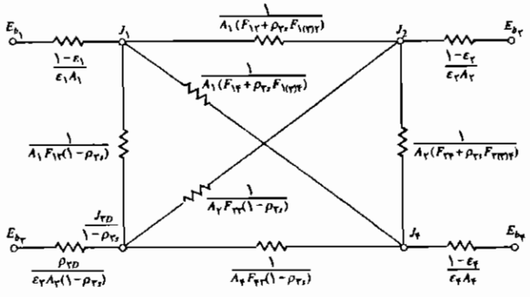
جزء شبکه‌ای که معادله (۸-۸۴) نمایش‌گر آنست در شکل ۸-۵۲ نشان داده شده است.

برای تابش بین سایر سطوح شکل ۸-۵۱ می‌توان اجزای شبکه‌ای مشابهی به‌دست آورد و شبکه کامل نهایی مطابق شکل ۸-۵۳ است. باید توجه کرد که اجزایی که به $J_{۳D}$ وصل می‌شود همان اجزای ساده شده شکل ۸-۵۰ هستند زیرا: $\rho_{۱s} = \rho_{۲s} = \rho_{۴s} = ۰$ نکته جالبی را می‌توان برای حالت $\rho_{۳D} = ۰$ در این شبکه مشاهده کرد. در این حالت سطح ۳ کاملاً آینه‌ای است و:

$$J_{۳D} = \varepsilon_۳ E_{b۳}$$

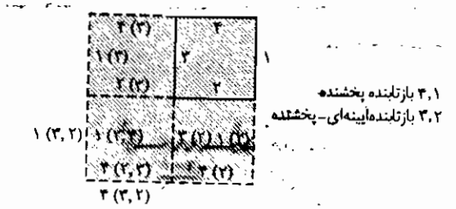
بنابراین وقتی سطح ۳ کاملاً بازتابندهٔ آینه‌ای است تنها سه مجهول $J_۱$، $J_۲$ و $J_۴$ داریم.

شکل ۸-۵۲ جزء شبکه برای معادلهٔ (۸-۸۴).



شکل ۸-۵۳ شبکه تابشی کامل برای سیستم شکل ۸-۵۱.

اکنون مسأله را یک گام مشکل‌تر کرده و حالتی را در نظر می‌گیریم که محفظه مطابق شکل ۸-۵۴ دو سطح آینه‌ای - پخشنده دارد. در این حالت مطابق شکل تصاویر چندتایی تشکیل می‌شود. سطح (۲ و ۳)۱ نمایش‌گر تصویر ۱ پس از آن است که نخست در ۳ سپس در ۲ دیده شود. به عبارت دیگر این سطح، تصویر سطح (۳)۱ در آیینه ۲ می‌باشد. سطح (۳ و ۲)۱ در همان محل تصویر سطح (۲)۱ در آیینه ۳ قرار دارد.



شکل ۸-۵۴ سیستم با دو سطح آینه‌ای - پخشنده.

این مسأله پیچیده است زیرا باید بازتاب آیینه‌ای چند تایی را در نظر بگیریم. مبادله بین سطح ۱ و ۴ را در نظر بگیرید. انرژی پخشنده‌ای که از ۱ خارج می‌شود می‌تواند به پنج طریق به ۴ برسد:

مستقیم: $J_1 A_1 F_{14}$

بازتاب فقط در ۲: $J_1 A_1 F_{1(2)4} \rho_{2s}$

بازتاب فقط در ۳: $J_1 A_1 F_{1(3)4} \rho_{3s}$

بازتاب نخست در ۲ و سپس در ۳: (۸-۸۵)

$$J_1 A_1 \rho_{2s} \rho_{3s} F_{1(2,3)4}$$

بازتاب نخست در ۳ و سپس در ۲:

$$J_1 A_1 \rho_{2s} \rho_{3s} F_{1(3,2)4}$$

آخرین ضریب شکل، $F_{1(2,3)4}$ برابر صفر است زیرا سطح (۲ و ۳)۱ وقتی در آیینهٔ ۲ نگاه می‌کند نمی‌تواند سطح ۴ را ببیند. از طرف دیگر، $F_{1(2,3)4}$ برابر صفر نیست زیرا سطح (۳ و ۲)۱ وقتی در آیینهٔ ۳ نگاه می‌کند می‌تواند سطح ۴ را ببیند. مجموع سه عبارت فوق چنین است:

$$q_{1\to 4} = J_1 A_1 (F_{14} + \rho_{2s} F_{1(2)4} + \rho_{3s} F_{1(3)4} + \rho_{3s}\rho_{2s} F_{1(2,3)4}) \quad (۸-۸۶)$$

به طریقی مشابه:

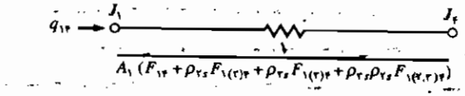
$$q_{4\to 1} = J_4 A_4 (F_{41} + \rho_{2s} F_{4(2)1} + \rho_{3s} F_{4(3)1} + \rho_{3s}\rho_{2s} F_{4(3,2)1}) \quad (۸-۸۷)$$

با منها کردن این دو معادله و کاربرد روابط تقابل معمول، جزء شبکه شکل ۸-۵۵ به‌دست می‌آید.

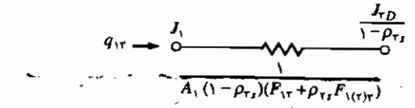
اینک مبادلهٔ پخشنده بین سطح ۱ و ۳ را در نظر بگیرید. بخشی از انرژی خروجی از ۱ و سهیم در رادیوسیتی پخشنده سطح ۳ برابر است با:

$$q_{1\to 3} = J_1 A_1 F_{13}(1-\rho_{3s}) + J_1 A_1 \rho_{2s} F_{1(2)3}(1-\rho_{3s}) \quad (۸-۸۸)$$

اولین جمله از عبارت فوق مبادله مستقیم ودومین جمله مبادله پس از یک بازتاب آیینه‌ای در آیینه ۲ را نشان می‌دهد. مانند گذشته برای آنکه بازتاب آیینه‌ای از ۳ را در نظر نگیریم، ضریب $\rho_{3s} - 1$ را آورده‌ایم. البته، این بازتاب در سایر جملات در نظر گرفته شده است.



شکل ۸-۵۵ جزء شبکه نشان دهندهٔ مبادلهٔ بین سطوح ۱ و ۴ شکل ۸-۵۴.



شکل ۸-۵۶ جزء شبکه نشان دهنده مبادله بین سطوح ۱ و ۳ شکل ۸-۵۴.

انرژی پخشنده‌ای که از ۳ به ۱ می‌رود برابر است با:

$$q_{3\to 1} = J_{3D} A_3 F_{31} + J_{3D} A_3 \rho_{2s} F_{3(2)1} \quad (۸-۸۹)$$

اولین جمله تابش مستقیم و دومین جمله تابشی است که در آیینه ۲ به طریق آیینه‌ای بازتاب می‌شود. با ترکیب معادلات (۸-۸۸) و (۸-۸۹) جزء شبکه شکل ۸-۵۶ را خواهیم داشت.

دو جزء فوق مخصوص محفظه شکل ۸-۵۴ است و سایر اجزا را می‌توان با تشابه کشید. بنابراین شبکه کامل تنهایی به‌صورت شکل ۸-۵۷ است.

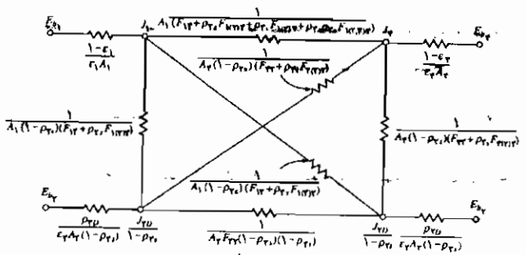
چنانچه هر دو سطح ۲ و ۳ بازتابنده‌های آیینه‌ای خالص باشند، یعنی:

$$\rho_{2D} = \rho_{3D} = 0$$

داریم:

$$J_{2D} = \varepsilon_2 E_{b2} \qquad J_{3D} = \varepsilon_3 E_{b3}$$

و این شبکه در این شرایط فقط شامل دو مجهول J_1 و J_4 است.

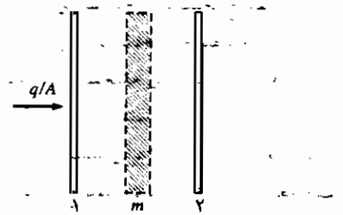


شکل ۸-۵۷ شبکه تابشی کامل برای سیستم شکل ۸-۵۴.

می‌توان با نصب سطوح آیینه‌ای در روبه‌روی یکدیگر محاسبه را پیچیده‌تر کرد. در این حالت بی‌نهایت تصویر به‌وجود می‌آید و باید یک جواب به صورت سری به‌دست آورد؛ گرچه، سری‌های این مسائل معمولاً نسبتاً سریع همگرا می‌شود. خواننده می‌تواند برای کسب اطلاع بیش‌تر در مورد این جنبه از مبادلهٔ تابش بین سطوح آیینه‌ای مرجع ۱۳ را بخواند.

❑ ۸-۱۲ مبادله تابش با محیط‌های تراگسیلنده، بازتابنده و جاذب

اینک مطالب بخش‌های ۸-۱۰ و ۸-۱۱ را به طور ساده بسط داده، محیطی مادی را تحلیل می‌کنیم که بازتاب، تراگسیل و جذب آن همگی مهم هستند. مانند بخش ۸-۱۰ سیستمی شامل دو صفحهٔ موازی پخشنده را در نظر می‌گیریم که محیطی مادی در میان آن قرار گرفته و تابش را جذب، تراگسیل و بازتاب می‌کند. برای عمومیت دادن به مسأله، فرض می‌کنیم که سطح مخیط مادی تراگسیلنده، هم بازتاب آیینه‌ای دارد هم بازتاب پخشنده. این سیستم در شکل ۸-۵۸ نشان داده شده است.



شکل ۸-۵۸ سیستم فیزیکی برای تحلیل لایه‌ای تراگسیلنده و بازتابنده.

برای محیط مادی تراگسیلنده m داریم:

$$\alpha_m + \rho_{mD} + \rho_{ms} + \tau_m = 1 \quad (۸-۹۰)$$

هم چنین:

$$\varepsilon_m = \alpha_m$$

رادیوسیتی پخشنده سطحی خاص از محیط مادی چنین تعریف می‌شود:

$$J_{mD} = \varepsilon_m E_{bm} + \rho_{mD} G \quad (۸-۹۱)$$

که G تابش‌دهی روی این سطح خاص است. توجه داشته باشید که J_{mD} دیگر نشان دهنده انرژی پخشندهٔ کلی نیست که از سطح خارج می‌شود. در اینجا این پارامتر فقط بازتاب گسیلی و پخشنده را نشان می‌دهد. انرژی تراگسیل‌شده را با جملاتی دیگر تحلیل می‌کنیم مانند گذشته، مبادلهٔ گرما چنین است:

$$q = A(\varepsilon E_b - \alpha G) \quad (۸-۹۲)$$

با به‌دست آوردن G از معادله (۸-۹۱) و استفاده از معادلهٔ (۸-۹۰) داریم:

$$q = \frac{E_{bm} - \dfrac{J_{mD}}{1-\tau_m-\rho_{ms}}}{\dfrac{\rho_{mD}}{\varepsilon_m A_m (1-\tau_m-\rho_{ms})}} \quad (۸-۹۳)$$

جزء شبکه نمایندهٔ معادلهٔ (۸-۹۳) در شکل ۸-۵۹ نشان داده شده است. این جزء درست شبیه جزء شکل ۸-۴۸ است با این تفاوت که در اینجا باید ضریب تراگسیل را به‌حساب آوریم.

مبادلهٔ گرمای تراگسیل‌شده بین سطوح ۱ و ۲ به صورت بخش ۸-۱۰ است؛ یعنی:

$$q = \frac{J_1 - J_2}{\dfrac{1}{A_1 F_{12} \tau_m}} \quad (۸-۹۴)$$

مبادلهٔ گرما بین سطح ۱ و m به طریق زیر حساب می‌شود. بخشی از انرژی خروجی از سطح ۱ که به m می‌رسد و در رادیوسیتی پخشنده m سهیم است برابر است با:

$$q_{1\to m} = J_1 A_1 F_{1m}(1 - \tau_m - \rho_{ms}) \quad (۸-۹۵)$$

انرژی پخشنده خروجی از m که به ۱ می‌رسد برابر است با:

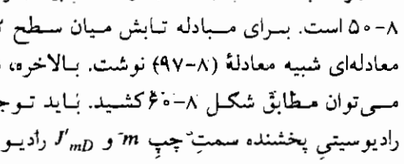
$$q_{m\to 1} = J_{mD} A_m F_{m1} \quad (۸-۹۶)$$

با کم کردن (۸-۹۶) از (۸-۹۵) و استفاده از رابطه تقابل:

$$A_1 F_{1m} = A_m F_{m1}$$

داریم:

$$q_{1m} = \frac{J_1 - \dfrac{J_{mD}}{1-t_m-\rho_{ms}}}{\dfrac{1}{A_1 F_{1m}(1-\tau_m-\rho_{ms})}} \quad (۸-۹۷)$$



شکل ۸-۵۹ جزء شبکه نشان دهنده معادلهٔ (۸-۹۳).

جزء شبکه معادلهٔ (۸-۹۷) درست شبیه جزء شبکه شکل ۸-۵۰ است. برای مبادله تابش میان سطح ۲ و m می‌توان معادله‌ای شبیه معادلهٔ (۸-۹۷) نوشت. بالاخره، شبکه کامل را می‌توان مطابق شکل ۸-۶۰ کشید. باید توجه کرد که J_{mD} رادیوسیتی پخشنده سمت چپ m و J'_{mD} رادیوسیتی پخشندهٔ سمت راست m را نشان می‌دهد.

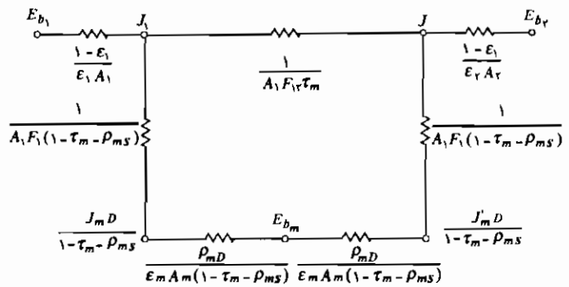
چنان‌چه دمای m ثابت باشد، باید J_1 و J_2 را با حل معادلات گرهی شبکه به‌دست آورد. از طرف دیگر، اگر انرژی‌ای به m منتقل نشود، E_{bm} گرهی شناور شده، این شبکه به آرایش سادهٔ موازی - سری تبدیل می‌شود. دمای m در این حالت را باید با حل شبکه برای E_{bm} به‌دست آورد.

تحلیل را اندکی بسط داده، بین تراگسیل آیینه‌ای و پخشنده تمیز قائل می‌شویم. تراگسیل آیینه‌ای وقتی است که تابش برخوردی «مستقیم به داخل» ماده می‌رود، در حالی که در تراگسیل پخشنده، تابش برخوردی در عبور از ماده متفرق می‌شود و در نتیجه از سمت دیگر در جهت‌های نامنظمی پدیدار می‌شود. مثل مورد انرژی بازتاب شده، فرض می‌کنیم که بتوان ضریب گسیل را با دو مؤلفه

آیینه‌ای و پخشنده نشان داد:

$$\tau = \tau_s + \tau_D \qquad (۹۸-۸)$$

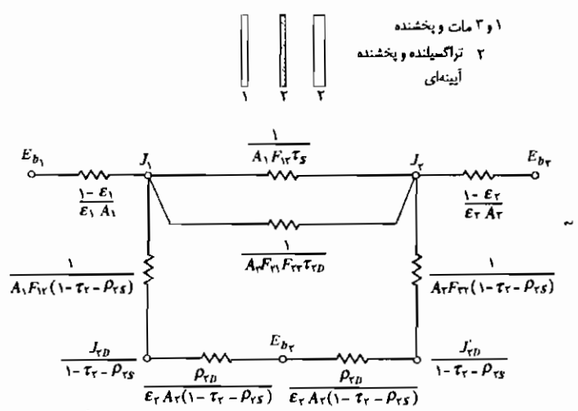
باز هم رادیوسیتی پخشنده با معادله (۸-۹۱) تعریف می‌شود و مبادله انرژی خالص با سطح تراگسیلنده از معادلهٔ (۸-۹۳) به‌دست می‌آید. گر چه مبادله انرژی تراگسیل‌شده با سایر سطوح را باید اندکی متفاوت تحلیل کرد.



شکل ۸-۶۰ شبکه تابشی کامل برای سیستم شکل ۸-۵۸.

مثلاً آرایش شکل ۸-۶۱ را درنظر بگیرید. دو سطح مات پخشنده با صفحه‌ای تراگسیلنده و بازتابنده آیینه‌ای - پخشنده از هم جدا شده‌اند. در این مثال فرض می‌شود که سطح صفحات بی‌نهایت باشد. مبادلهٔ تراگسیل‌شده - ***آیینه‌ای*** بین سطوح ۱ و ۳ را می‌توان فوراً چنین حساب کرد:

$$(q_{13})_{\text{تراگسیل‌شده - آیینه‌ای}} = \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{A_1 F_{13}\tau_{2s}}} \qquad (۹۹-۸)$$



شکل ۸-۶۱ شبکه تابشی برای صفحات موازی نامحدود که با صفحه‌ای تراگسیلنده آیینه‌ای - پخشنده از هم جدا شده‌اند.

مبادلهٔ تراگسیل‌شده پخشنده بین ۱ و ۳ اندکی پیچیده‌تر است. انرژی خروجی از ۱ که به صورت پخشنده از طریق ۲ تراگسیل می‌شود برابر است با:

$$J_1 A_1 F_{12}\tau_{2D}$$

بخشی از انرژی تراگسیل‌شده در ۲ که به ۳ می‌رسد برابر است با:

$$(q_{23})_{\text{تراگسیل‌شده - پخشنده}} = J_1 A_1 F_{12}\tau_{2D}F_{23} \qquad (۱۰۰-۸)$$

به همین ترتیب، مقدار انرژی خروجی از ۳ که به صورت پخشنده به ۱ تراگسیل می‌شود برابر است با:

$$(q_{31})_{\text{تراگسیل‌شده - پخشنده}} = J_3 A_3 F_{32}\tau_{2D}F_{21} \qquad (۱۰۱-۸)$$

اینک با استفاده از روابط تقابل، $A_1F_{12} = A_2F_{21}$ و $A_2F_{23} = A_3F_{32}$ و پس از کسر معادلهٔ (۸-۱۰۱) از معادلهٔ (۸-۱۰۰) داریم:

$$(q_{13})_{\text{تراگسیل‌شده - پخشنده خالص}} = \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{A_1 F_{21} F_{23}\tau_{2D}}} \qquad (۱۰۲-۸)$$

مثال ۸-۱۴ سیستم تراگسیل و بازتابنده برای سوراخ در کوره

کوره‌ای به دمای ۱۰۰۰°C دارای سوراخ کوچکی در بغل است که با پنجره‌ای کوارتزی به خواص زیر پوشانده شده است:

$0 < \lambda < 4\mu m$	$\tau = 0/9$	$\varepsilon = 0/1$	$\rho = 0$
$4 < \lambda < \infty$	$\tau = 0$	$\varepsilon = 0/8$	$\rho = 0/2$

داخل این کوره را می‌توان به صورت جسمی سیاه در نظر گرفت. تابش از دست رفته از پنجره کوارتزی به اتاقی به دمای ۳۰°C را حساب کنید. رفتار سطح، پخشنده فرض می‌شود.

حل :

نمودار این مسأله در صفحهٔ بعد نشان داده شده است. چون اتاق بزرگ است می‌توان آن را نیز به صورت جسمی سیاه در نظر گرفت. برای تحلیل این مسأله، انتقال گرمای هر نوار طول‌موج را پیدا و سپس آنها را برای به‌دست آوردن انتقال گرمای کل باهم جمع می‌کنیم. شبکه هر نوار تعدیلی از شکل ۸-۶۰ است که در زیر برای کوره سیاه و اتاق نشان داده شده است. محاسبه را به ازای واحد سطح انجام می‌دهیم؛ بنابراین:

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1/0$$
$$F_{12} = 1/0 \qquad F_{13} = 1/0 \qquad F_{32} = 1/0$$

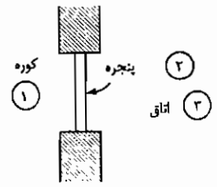
توان‌های گسیل کل عبارتند از:

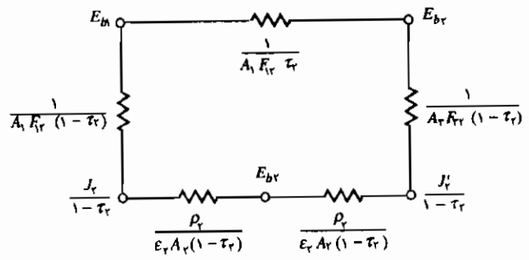
$$E_{b1} = (5/669 \times 10^{-8})(1273)^4 = 1/4887 \times 10^5 \ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b3} = (5/669 \times 10^{-8})(303)^4 = 477/8 \ \frac{W}{m^2}$$

مقادیر زیر را برای تعیین کسری از تابش در هر نوار طول‌موج حساب می‌کنیم:

$$\lambda T_1 = (4)(1273) = 5092 \ \mu m.K$$
$$\lambda T_3 = (4)(303) = 1212 \ \mu m.K$$





شکل مثال ۸-۱۴.

با مراجعه به جدول ۸-۱ داریم:

$$E_{b1}(0 - 4\mu m) = 0/6450 E_{b1} = 96021 \ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b2}(0 - 4\mu m) = 0/00235 E_{b2} = 1/123 \ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b1}(4 - \infty) = (1 - 0/6450) E_{b1} = 52849 \ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b2}(4 - \infty) = (1 - 0/00235) E_{b2} = 476/7 \ \frac{W}{m^2}$$

اکنون این اعداد را برای دو نوار طول‌موج، به ازای واحد سطح، در شبکه به کار می‌بریم.

نوار $0 < \lambda < 4\mu m$:

$$\frac{1}{F_{12}\tau_2} = \frac{1}{0/9} \qquad \frac{1}{F_{32}(1-\tau_2)} = \frac{1}{0/1} = \frac{1}{F_{12}(1-\tau_2)}$$

$$\frac{\rho_2}{\varepsilon_2(1-\tau_2)} = 0$$

بنابراین مقدار انتقال گرمای خالص از این شبکه برابر است با:

$$q = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{R_{\text{معادل}}} = \frac{96021 - 1/123}{1/05276} = 91219 \ \frac{W}{m^2} \qquad 0 < \lambda < 4\mu m$$

نوار $4\mu m < \lambda < +\infty$:

$$\frac{1}{F_{12}\tau_2} = \infty \qquad \frac{1}{F_{32}(1-\tau_2)} = \frac{1}{F_{12}(1-\tau_2)} = 1/0$$

$$\frac{\rho_2}{\varepsilon_2(1-\tau_2)} = \frac{0/2}{0/8} = 0/25$$

مقدار انتقال گرمای خالص از این شبکه برابر است با:

$$q = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{1 + 0/25 + 0/25 + 1} = \frac{52849 - 476/7}{2/5} = 20949 \ \frac{W}{m^2}$$

$4 < \lambda < \infty$

بنابراین اتلاف گرمای کل برابر است با:

$$q_{\text{کل}} = 91219 + 20949 = 112168 \ \frac{W}{m^2} \quad \left[35560 \ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

انتقال گرما در حالت بدون پنجره برابر تفاوت توان‌های گسیل جسم سیاه است:

$$q - E_{b1} - E_{b2} = 1/4887 \times 10^5 - 477/8$$
$$= 1/4839 \times 10^5 \ \frac{W}{m^2} \quad \left[47040 \ \frac{Btu}{h.ft^2}\right]$$

❑ ۸-۱۳ فرمول‌بندی راه‌حل عددی

روش شبکه‌ای در تحلیل مسائل تابش وسیله‌ای مؤثر برای تجسم مبادله تابشی بین سطوح است. در مسائل ساده‌ای که سطوح خیلی زیادی ندارند با روش شبکه‌ای خیلی آسان به جواب می‌رسیم. اگر سطوح انتقال گرما زیاد باشد بهتر است روش معادلات گرهی را دنبال کنیم. در این روش تنها سطوح مات، خاکستری و پخشنده را بررسی می‌کنیم. برای کسب اطلاع در مورد سطوح تراگسیلنده و آیینه‌ای می‌توانید به مرجع ۱۰ مراجعه کنید. موازنه انرژی تابیده روی سطح مات خاص را می‌توان چنین نوشت:

انرژی جذب شده − انرژی گسیل‌شده = گرمای خالص از دست رفته از سطح

یا با فرض جسم − خاکستری و به ازای واحد سطح:

$$\frac{q}{A} = \varepsilon E_b - \alpha G$$

سطح iام را بررسی می‌کنیم. تابش‌دهی کل برابر جمع تابش‌دهی‌های G_i از j سطح دیگراست. بنابراین به‌ازای $\varepsilon = \alpha$ داریم:

$$\frac{q_i}{A_i} = \varepsilon_i\left(E_{bi} - \sum_j G_j\right) \qquad (۱۰۳-۸)$$

ولی تابش‌دهی‌ها را می‌توان چنین بیان کرد:

$$A_j J_j F_{ji} = G_j A_i \qquad (۱۰۴-۸)$$

با توجه به رابطهٔ تقابل داریم:

$$A_j F_{ji} = A_i F_{ij}$$

معادلات را ترکیب کرده، داریم:

$$\frac{q_i}{A_i} = \varepsilon_i\left(E_{bi} - \sum_j F_{ij} J_j\right) \qquad (۱۰۵-۸)$$

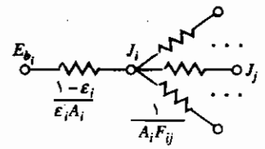
سپس انتقال گرمای هر سطح بر حسب رادیوسیتی‌ها J_j حساب می‌شود. این سنجه‌ها را می‌توان با توجه به بیان انتقال گرما چنین به‌دست آورد:

$$\frac{q_i}{A_i} = J_i - G_i = J_i - \sum_j F_{ij} J_j \qquad (۱۰۶-۸)$$

با ترکیب معادلات (۸-۱۰۵) و (۸-۱۰۶) داریم:

$$J_i - (1 - \varepsilon_i)\sum_j F_{ij} J_j = \varepsilon_i E_{bi} \qquad (۱۰۷-۸)$$

توجه داشته باشید که جمع در معادلات بالا باید برای **تمام** سطوح داخل محفظه انجام شود.



$$\frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\ (E_{b_i}-J_i)+\sum_j F_{ij}(J_j-J_i)=0$$

شکل ۸-۶۲ موازنه شبکه تابشی روی گره J_i.

بنابراین جمع برای محفظه سه سطحی، با $i = ۱$، چنین است:

$$\sum_j F_{ij}J_j = F_{۱۱}J_۱ + F_{۱۲}J_۲ + F_{۱۳}J_۳$$

البته اگر سطح ۱ محدب باشد، $F_{۱۱} = ۰$ و مسأله ساده‌تر می‌شود.

معادلات گرهی برای رادیوسیتی‌ها را می‌توان از گره‌های موجود در فرمول‌بندی شبکه‌ای که در شکل ۸-۶۲ نشان داده شده است نیز به‌دست آورد. موازنه انرژی در هر گره J_i چنین است:

$$\frac{\varepsilon_i}{۱-\varepsilon_i}(E_{bi}-J_i)+\sum_j F_{ij}(J_j-J_i)=۰ \qquad (۱۰۸\text{-}۸)$$

مجدداً، برای هر J_i یک معادله به‌دست می‌آید که کاملاً هم‌ارز معادلهٔ (۸-۱۰۷) است. پس از نوشتن معادلات می‌توان آنها را به شکل ماتریس بیان کرد:

$$[A][J] = [C] \qquad (۱۰۹\text{-}۸)$$

که:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱i} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} \quad [J]=\begin{bmatrix} J_۱ \\ J_۲ \\ \cdot \\ \cdot \\ J_i \end{bmatrix} \quad [C]=\begin{bmatrix} C_۱ \\ C_۲ \\ \cdot \\ \cdot \\ C_i \end{bmatrix}$$

رادیوسیتی‌ها را می‌توان با معکوس کردن $[A]$ به‌دست آورد به طوری که:

$$[J] = [A]^{-۱}[C]$$

$[A]^{-۱}$ چنین نوشته می‌شود:

$$[A]^{-۱}=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱i} \\ b_{۲۱} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i۱} & b_{i۲} & \cdots & b_{ii} \end{bmatrix}$$

بنابراین رادیوسیتی‌های مجهول چنین هستند:

$$J_۱ = b_{۱۱}C_۱ + b_{۱۲}C_۲ + \ldots + b_{۱i}C_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$J_i = b_{i۱}C_۱ + b_{i۲}C_۲ + \ldots + b_{ii}C_i$$

برای به‌دست آوردن ماتریس معکوس و انجام محاسبات نهایی J_i می‌توان از برنامه‌های فرعی استاندارد کامپیوتری استفاده کرد. پس آهنگ انتقال گرمای هر سطح iام به مساحت A_i چنین حساب می‌شود:

$$\frac{q_i}{A_i} = \frac{\varepsilon_i}{۱-\varepsilon_i}(E_{bi} - J_i) \qquad (۱۱۰\text{-}۸)$$

در فرمول‌بندی معادلات **گرهی** باید به نتیجه حاصل از معادلهٔ (۸-۱۱۰) برای سطح **عایق‌شده‌ای** توجه کرد که انتقال گرمایی برای آن وجود ندارد. بنابراین معادله (۸-۱۱۰) باید چنین باشد:

$$E_{bi} = J_i \quad \text{برای سطح عایق‌شده} \qquad (۱۱۱\text{-}۸)$$

عملاً برای حل دستگاه معادلات J_iها روش تکرار گوس - سایدل مؤثرترین روش عددی است. در روش گوس - سایدل باید معادلات فوق برای J_iها به شکل صریح باشند. با حل معادلهٔ (۸-۱۰۷) و به‌دست‌آوردن J_i و خارج کردن جمله F_{ii} داریم:

$$J_i = (۱-\varepsilon_i)\sum_{j\neq i} F_{ij}J_j + (۱-\varepsilon_i)F_{ii}J_i + \varepsilon_i E_{bi}$$

$$J_i = \frac{۱}{۱-F_{ii}(۱-\varepsilon_i)}\left[(۱-\varepsilon_i)\sum_{j\neq i} F_{ij}J_j + \varepsilon_i E_{bi}\right] \qquad (۱۱۲\text{-}۸)$$

برای سطح در تعادل تابشی، $\frac{q_i}{A_i} = ۰$ و $J_i = E_{bi}$ را می‌توان در معادلهٔ (۸-۱۱۲) قرار داد و داریم:

$$J_i = \frac{۱}{۱-F_{ii}}\sum_{j\neq i} F_{ij}J_j \qquad \text{برای } \frac{q_i}{A_i} = ۰ \qquad (۱۱۳\text{-}۸)$$

چنان‌چه لازم شود که شار گرمایی $\frac{q_i}{A_i}$ در یکی از سطوح iام را در فرمول‌بندی مسأله در نظر بگیریم، می‌توانیم E_{bi} را از معادله (۸-۱۱۰) چنین به‌دست آوریم:

$$E_{bi} = J_i + \frac{۱-\varepsilon_i}{\varepsilon_i}\frac{q_i}{A_i} \qquad (۱۱۴\text{-}۸)$$

با جانشینی این مقدار در معادله (۸-۱۰۷) مقدار J_i چنین به‌دست می‌آید:

$$J_i = \frac{۱}{۱-F_{ii}}\left(\sum_{j\neq i} F_{ij}J_j + \frac{q_i}{A_i}\right) \qquad (۱۱۵\text{-}۸)$$

در بسیاری از حالات در حل تابش، باید هدایت و جابه‌جایی در سطح iام را به حساب آوریم. بنابراین برای حالت پایدار، موازنه انرژی مناسب چنین است:

گرمای جابه‌جایی به داخل سطح + گرمای هدایتی به‌داخل سطح = گرمای تابشی تلف‌شده از سطح

یا

$$\text{تابشی و } q_i = q_{\text{جابه‌جایی}} + q_{\text{هدایتی}} \qquad (۱۱۶\text{-}۸)$$

این موازنه انرژی را می‌توان همراه معادلهٔ (۸-۱۱۵) به‌کار برد و معادله گرهی صحیح را برای J_i به‌دست آورد.

گر چه ممکن است فرمول‌بندی بالا در نگاه اول اندکی پیچیده به‌نظر آید ولی می‌توان آن را با کامپیوتر، با معکوس کردن ماتریس یا تکرار، حل کرد. در بسیاری از مسائل عملی تابش، تعداد معادلات کم است و می‌توان برای حل آن از ماشین حساب‌های قابل برنامه‌ریزی استفاده کرد. در بسیاری از موارد، خواص سطح را که (ε_i) تا بهتر از حدود چند درصد نمی‌دانیم و بنابراین نیازی نیست راه‌حل تکراری را تا حدود دقت غیر عاقلانه‌ای اجرا کنیم.

به‌طور خلاصه، روش محاسباتی راه حل عددی انتقال گرمای تابشی بین سطوح پخشنده و خاکستری را یادآوری می‌کنیم.

۱- F_{ij} و ε_i تمام سطوح را به‌دست آورید.

۲- E_{bi} تمام سطوح با دمای مشخص را به‌دست آورید.

۳- معادلات گرهی J_i را با استفاده از معادلات زیر بنویسید:

الف - معادلهٔ (۸-۱۱۲) برای سطوح با T_i مشخص.

ب - معادلهٔ (۸-۱۱۳) برای سطوح در توازن تابشی $(J_i = E_{bi})$.

پ - معادله (۸-۱۱۵) برای سطوح با q_i مشخص.

۴- معادلات را برای به‌دست آوردن J_iها حل کنید. چنان‌چه از تکرار گوس - سایدل استفاده می‌کنید به ترتیب زیر عمل کنید:

الف - مقدار اولیه‌ای برای J_iها فرض کنید. در ماشین‌های محاسباتی بزرگ مقادیر اولیه را می‌توان صفر گرفت. برای مقادیر اولیه در کامپیوترهای کوچک یا طرح محاسباتی خلاصه باید بهترین حدس را در نظر گرفت.

ب - دوباره تمام J_iها را طبق معادلات مرحله ۳ به‌دست آورید، همواره برای محاسبه از جدیدترین مقادیر استفاده کنید.

پ - وقتی به دقت قابل قبول δ رسیدید به طوری که:

$$J_i^{n+۱} - J_i^n \leq \delta$$

محاسبه را متوقف کنید. n تعداد تکرار را مشخص می‌کند.

۵- q_iها و T_iها را چنین حساب کنید:

الف - q_i را از معادلهٔ (۸-۱۱۰) برای سطوح خاکستری و از معادله (۸-۱۰۶) برای سطوح سیاه با T_i مشخص.

ب - T_i را از معادله $J_i = E_{bi} = \sigma T_i^۴$ برای سطوح در توازن تابشی

پ - T_i را با استفاده از E_{bi} حاصل از معادلهٔ (۸-۱۱۴) برای سطوح با q_i مشخص.

البته چنان‌چه بخواهیم مستقیماً از معکوس‌کردن ماتریس روی روش تکراری استفاده کنیم، معادلات بالا به شکل زیر در می‌آیند:

$$J_i[۱-F_{ii}(۱-\varepsilon_i)] - (۱-\varepsilon_i)\sum_{j\neq i} F_{ij}J_j = \varepsilon_i E_{bi} \qquad (۱۱۲\text{-}۸\text{الف})$$

$$J_i\ (۱-F_{ii}) - \sum_{j\neq i} F_{ij}J_j = ۰ \qquad (۱۱۳\text{-}۸\text{الف})$$

$$J_i\ (۱-F_{ii}) - \sum F_{ij}J_j = \frac{q_i}{A_i} \qquad (۱۱۵\text{-}۸\text{الف})$$

محاسبهٔ دماها و انتقال گرماهای سطح، مانند مرحلهٔ ۵ است.

سطوح عایق‌شده و سطوح وسیع

در کاربرد روش شبکه‌ای دیدیم که سطح عایق‌شده طوری عمل می‌کند که گویی کاملاً بازتابنده با $\varepsilon \to ۰$ است و در نتیجه $J = E_b$. توجه دارید که اگر در معادله (۸-۱۱۲ الف) مقدار $\varepsilon = ۰$ را قرار دهیم به معادله (۸-۱۱۳ الف) می‌رسیم. وقتی دستگاه معادلات را برای Jها حل کنیم دمای سطح عایق‌شده از $\left(\frac{J}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \left(\frac{E_b}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{۴}} = T$ به دست می‌آید. وقتی سطحی وسیع در مقایسه با سایر سطوح سیستم داشته باشیم، مثل جسم سیاه با $\varepsilon \to ۱/۰$ عمل می‌کند زیرا مقاومت سطحی آن کوچک است. اگر چنین سطح بزرگی مقعر باشد، مثل آن عمل می‌کند که $F_{ii} \to ۱/۰$ و تمام $F_{ij} \to ۰$.

مثال ۸-۱۵ راه حل عددی برای محفظه

از ترکیب شکل مثال ۸-۵ برای مبادلهٔ تابشی با محفظه‌ای بزرگ استفاده می‌شود. سطح ۲ با $\varepsilon = ۰/۵$ پخشنده است و سطح ۱ کاملاً عایق‌شده است. $T_۱ = ۱۰۰۰\ \text{K}$ و $T_۳ = ۳۰۰\ \text{K}$. گرمای داده شده به اتاق بزرگ را به ازای واحد طول سطح ۲ با استفاده از فرمول‌بندی عددی حساب کنید. دمای سطح عایق‌شده را نیز حساب کنید.

حل:

به ازای واحد طول داریم:

$$E_{b۲} = \sigma T_۲^۴ = ۵/۶۶۹ \times ۱۰^۴ \qquad E_{b۳} = \sigma T_۳^۴ = ۴۵۹$$

$$A_۱ = (۴)(۰/۲) = ۰/۸\ \frac{\text{m}^۲}{\text{m}} \qquad A_۲ = \frac{\pi(۰/۶۰)}{۲} = ۰/۹۴\frac{\text{m}^۲}{\text{m}}$$

از فرمول‌بندی عددی استفاده می‌کنیم. از مثال ۸-۵ با استفاده از نام‌گذاری شکل مربوطه داریم $F_{۱۱} = ۰/۳۱۴$، $F_{۱۲} = ۰/۴۲۵$، $F_{۱۳} = ۲۶۱$، $F_{۲۱} = ۰/۵$، $F_{۲۲} = ۰$، $F_{۲۳} = ۰/۵$، $F_{۳۱} \to ۰$، $F_{۳۲} \to ۰$، $F_{۳۳} \to ۱/۰$ اکنون معادلات را می‌نویسیم. سطح ۱ عایق است و در نتیجه از معادله (۸-۱۱۳ الف) استفاده می‌کنیم:

$$J_۱(۱ - ۰/۳۱۴) - ۰/۴۲۵J_۲ - ۰/۲۶۱J_۳ = ۰$$

دمای سطح ۲ ثابت است و از این‌رو از معادلهٔ (۸-۱۱۲ الف) استفاده می‌کنیم:

$$J_۲(۱ - ۰) - (۱ - ۰/۵)[۰/۵J_۱ + ۰/۵J_۳] = (۰/۵)(۵۶۶۹۰)$$

چون سطح ۳ خیلی بزرگ است:

$$J_۳ = E_{b۳} = ۴۵۹\ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲}$$

با آرایش مجدد این معادلات داریم:

$$۰/۶۸۶\ J_۱ - ۰/۴۲۵J_۲ = ۱۱۹/۸$$

$$-۰/۲۵J_۱ + J_۲ = ۲۸۴۶۰$$

که جواب‌های زیر را داریم:

$$J_1 = ۲۱۰۷۰ \frac{W}{m^۲}$$

$$J_۲ = ۳۳۷۲۷ \frac{W}{m^۲}$$

بنابراین، مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$q = \frac{E_{b۲} - J_۲}{\frac{۱ - \varepsilon_۲}{\varepsilon_۲ A_۲}} = \frac{۵۶۶۹۰ - ۳۳۷۲۷}{\frac{۱ - ۰/۵)}{(۰/۵)(۴)(۰/۲)}} = ۱۸۳۷۰ \frac{W}{m}_{\text{طول}}$$

چون سطح ۱ عایق‌شده $J_1 = E_{b1}$، می‌توانیم دما را چنین حساب کنیم:

$$T_1 = \left(\frac{۲۱۰۷۰}{۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸}}\right)^{\frac{۱}{۴}} = ۷۸۱ \text{ K}$$

برای این مسأله استفاده از روش شبکه‌ای ممکن است ساده‌تر باشد زیرا فقط یک مدار سادهٔ سری - موازی دارد.

مثال ۸-۱۶ راه حل‌های عددی برای صفحات موازی

دو سطح مربعی به ضلع ۱ متر به فاصله ۱ متر از هم‌دیگر قرار گرفته‌اند و $T_1 = ۱۰۰۰ \text{ K}$، $T_۲ = ۴۰۰ \text{ K}$، $\varepsilon_1 = ۰/۸$ و $\varepsilon_۲ = ۰/۵$ است. این سیستم را به طریق عددی حل کنید وقتی که (الف) اطراف صفحات را اتاق بزرگی به دمای ۳۰۰ K احاطه کرده باشد و (ب) دیواری دوباره تابنده **سطوح** را به سطح بیرونی کاملاً عایق متصل کرده باشد. بخش (الف) این مسأله اصولاً مثل مسأله‌ای است که با روش شبکه‌ای در مثال ۸-۶ حل شد.

حل:

با مراجعه به شکل ۸-۱۲ داریم:

$$F_{۱۲} = ۰/۲ \qquad F_{۲۱} = ۰/۲ \qquad F_{۱۱} = ۰ = F_{۲۲}$$
$$F_{۱۳} = ۰/۸ \qquad F_{۲۳} = ۰/۸$$
$$A_1 = A_۲ = ۱ \text{ m}^۲$$

(سطح ۳، سطحِ محیطِ اطراف یاسطح عایق‌شده است). برای قسمت (الف)

$$E_{b1} = \sigma T_1^{۴} = ۵۶/۶۹ \frac{kW}{m^۲} \left\{۱۷۹۷۰ \frac{Btu}{h.ft^۲}\right\}$$

$$E_{b۲} = \sigma T_۲^{۴} = ۱/۴۵۱ \frac{kW}{m^۲}$$

$$E_{b۳} = \sigma T_۳^{۴} = ۰/۴۵۹ \frac{kW}{m^۲}$$

چون $A_۳ \to \infty$، باید $F_{۳۱}$ و $F_{۳۲}$ به صفر نزدیک شوند زیرا $A_1 F_{13} = A_۳ F_{۳1}$ و $A_۲ F_{۲۳} = A_۳ F_{۳۲}$ معادلات گرهی به شکل معادله (۸-۱۰۷) نوشته می‌شود:

سطح ۱: $$J_1 - (۱ - \varepsilon_1)(F_{11} J_1 + F_{12} J_۲ + F_{13} J_۳) = \varepsilon_1 E_{b1}$$

سطح ۲: (الف) $$J_۲ - (۱ - \varepsilon_۲)(F_{۲1} J_1 + F_{۲۲} J_۲ + F_{۲۳} J_۳) = \varepsilon_۲ E_{b۲}$$

سطح ۳: $$J_۳ - (۱ - \varepsilon_۳)(F_{۳1} J_1 + F_{۳۲} J_۲ + F_{۳۳} J_۳) = \varepsilon_۳ E_{b۳}$$

چون $F_{۳1}$ و $F_{۳۲}$ به صفر نزدیک می‌شوند باید $F_{۳۳}$ برابر ۱ باشد.

با جای‌گزینی مقادیر عددی جملات مختلف داریم:

$$J_1 - (۱ - ۰/۸)[(۰)J_1 + (۰/۲)J_۲ + (۰/۸)J_۳] = (۰/۸)(۵۶/۶۹)$$

$$J_۲ - (۱ - ۰/۵)[(۰/۲)J_1 + (۰)J_۲ + (۰/۸)J_۳] = (۰/۵)(۱/۴۵۱) \qquad \text{(ب)}$$

$$J_۳ - (۱ - \varepsilon_۳)[(۰)J_1 + (۰)J_۲ + (۱/۰)J_۳] = \varepsilon_۳ (۰/۴۵۹)$$

از معادلهٔ سوم $\frac{kW}{m^۲.K}$ $۰/۴۵۹ = J_۳$ به‌دست می‌آید. چون اتاق خیلی بزرگ است مثل جسم سیاه عمل می‌کند. ولی ***انتقال گرمای اتاق برابر صفر نیست.***

بالاخره، معادلات فوق را می‌توان به صورت فشرده زیر نوشت:

$$J_1 - ۰/۰۴ J_۲ - ۰/۱۶ J_۳ = ۴۵/۳۵۲$$

$$-۰/۱ J_1 + J_۲ - ۰/۴ J_۳ = ۰/۷۲۵۵ \qquad \text{(پ)}$$

$$J_۳ = ۰/۴۵۹$$

البته، در این دستگاه تنها دو مجهول J_1 و $J_۲$ باقی می‌ماند.

برای قسمت (ب)، $A_۳$ دیوار احاطه کننده برابر $۴/۰ \text{ m}^۲$ است و $J_۳ = E_{b۳}$ قرار می‌دهیم زیرا سطح ۳ عایق است. با توجه به تقابل داریم:

$$A_1 F_{۱۳} = A_۳ F_{۳1} \qquad F_{۳1} = \frac{(۱/۰)(۰/۸)}{۴/۰} = ۰/۲$$

$$A_۲ F_{۲۳} = A_۳ F_{۳۳} \qquad F_{۳۳} = \frac{(۱/۰)(۰/۸)}{۴/۰} = ۰/۲$$

اما چون $F_{۳1} + F_{۳۳} + F_{۳۲} = ۱/۰$ است داریم $F_{۳۲} = ۰/۶$.

باز هم از دستگاه معادلات (الف) استفاده می‌شود. بنابراین مقادیر عددی را جای‌گزین می‌کنیم و با ($J_۳ = E_{b۳}$) داریم:

$$J_1 - (۱ - ۰/۸)[(۰)J_1 + (۰/۲)J_۲ + (۰/۸)J_۳] = (۰/۸)(۵۶/۶۹)$$

$$J_۲ - (۱ - ۰/۵)[(۰/۲)J_1 + (۰)J_۲ + (۰/۸)J_۳] = (۰/۵)(۱/۴۵۱) \qquad \text{(ت)}$$

$$J_۳ - (۱ - \varepsilon_۳)[(۰/۲)J_1 + (۰/۲)J_۲ + (۰/۶)J_۳] = \varepsilon_۳ J_۳$$

توجه کنید که معادلهٔ سوم از دستگاه (ت) را می‌توان چنین نوشت:

$$J_۳(۱ - \varepsilon_۳) - (۱ - \varepsilon_۳)[(۰/۲)J_1 + (۰/۲)J_۲ + (۰/۶)J_۳] = ۰$$

بنابراین جملهٔ $۱ - \varepsilon_۳$ حذف می‌شود و دستگاه معادلات نهایی چنین به‌دست می‌آید:

$$J_1 - ۰/۰۴ J_۲ - ۰/۱۶ J_۳ = ۴۵/۳۵۲$$

$$-۰/۱ J_1 + J_۲ - ۰/۴ J_۳ = ۰/۷۲۵۵ \qquad \text{(ث)}$$

$$-۰/۲ J_1 - ۰/۲ J_۲ + ۰/۴ J_۳ = ۰$$

برای به‌دست آوردن مقدار انتقال گرما نخست دستگاه معادلات را حل می‌کنیم تا رادیوسیتی‌ها به‌دست آید. برای دستگاه (پ):

$$J_1 = ۴۵/۶۴۴ \frac{kW}{m^۲} \left[۱۴۴۷۰ \frac{Btu}{h.ft^۲}\right]$$

$$J_۲ = ۵/۴۷۴ \frac{kW}{m^۲}$$

$$J_۳ = ۰/۴۵۹ \frac{kW}{m^۲}$$

مقدار انتقال گرما از معادلهٔ (۸-۱۱۰) به‌دست می‌آید:

$$q_1 = \frac{A_1 \varepsilon_1}{۱ - \varepsilon_1}(E_{b1} - J_1) = \frac{(۱/۰)(۰/۸)}{۱ - ۰/۸}(۵۶/۶۹ - ۴۵/۶۴۴)$$

$$= ۴۴/۱۸۴ \text{kW} \left[۱۵۰۷۶۰ \frac{Btu}{h}\right]$$

$$q_۲ = \frac{A_۲ \varepsilon_۲}{۱ - \varepsilon_۲}(E_{b۲} - J_۲) = \frac{(۱/۰)(۰/۵)}{۱ - ۰/۵}(۱/۴۵۱ - ۵/۴۷۴)$$

$$= -۴/۰۲۳ \text{kW} \left[-۱۳۷۳۰ \frac{Btu}{h}\right]$$

گرمای خالص **جذب شده** به وسیله اتاق برابر مجموع جبری q_1 و $q_۲$ است و یا:

$$q_{۳,\text{جذب‌شده}} = ۴۴/۱۸۴ - ۴/۰۲۳ = ۴۰/۱۶۱ \text{ kW} \left[۱۳۷۰۳۰ \frac{Btu}{h}\right]$$

برای قسمت (ب)، جواب‌های دستگاه (ث) چنین است:

$$J_1 = ۵۱/۹۵۶ \frac{kW}{m^۲} \qquad J_۲ = ۲۰/۳۹۰ \frac{kW}{m^۲} \qquad J_۳ = ۳۶/۱۷۳ \frac{kW}{m^۲}$$

مقادیر انتقال گرما چنین است:

$$q_1 = \frac{A_1 \varepsilon_1}{۱ - \varepsilon_1}(E_{b1} - J_1) = \frac{(۱/۰)(۱/۸)}{۱ - ۰/۸}(۵۶/۶۹ - ۵۱/۹۶۵)$$

$$= ۱۸/۹۳۶ \text{ kW}$$

$$q_۲ = \frac{A_۲ \varepsilon_۲}{۱ - \varepsilon_۲}(E_{b۲} - J_۲) = \frac{(۱/۰)(۰/۵)}{۱ - ۰/۵}(۱/۴۵۱ - ۲۰/۳۹۰)$$

$$= -۱۸/۹۳۶ \text{ kW}$$

البته، باید این انتقال گرما از نظر مقدار، با علامت مخالف، مساوی هم باشند زیرا دیوار عایق گرمایی مبادله نمی‌کند. دمای دیوار عایق از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$J_۳ = E_{b۳} = \sigma T_۳^{۴} = ۳۶/۱۷۳ \frac{kW}{m^۲}$$

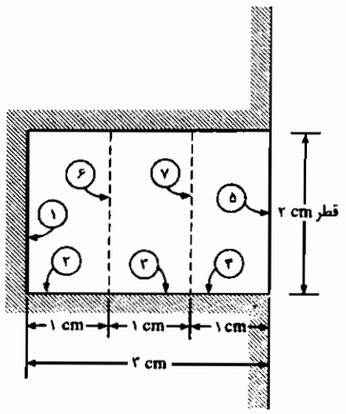
و:

$$T_۳ = ۸۹۴ \text{ K} \quad [۶۲۱°\text{C} \text{ و } ۱۱۵۰°\text{F}]$$

مثال ۸-۱۷ تابش از سوراخ با رادیوسیتی متغیر

برای تشریح بیش‌تر فرمول‌بندی تابش برای راه حل عددی، سوراخ مدوری به قطر ۲cm و عمق ۳cm، مطابق شکل در نظر می‌گیریم. این سوراخ در بلوک فلزی بزرگی به دمای ۱۰۰۰°C و ضریب گسیل سطحی ۰/۶ ماشین‌کاری شده است. دمای اتاق بزرگ احاطه کنندهٔ آن ۲۰°C است. روش ساده برای این مسأله فرض یکنواختی رادیوسیتی‌ها روی کل سطح داخلی گرمادیده است. در حقیقت، رادیوسیتی روی این سطح تغییر می‌کند و ما در تحلیل خود آن را به اجزای ۱ (کف سوراخ)، ۲، ۳ و ۴ (جوانب سوراخ) تقسیم می‌کنیم.

اتاق بزرگ مثل جسم سیاهِ به دمای ۲۰°C عمل می‌کند، بنابراین در این تحلیل می‌توانیم فرض کنیم که سوراخ با سطح سیاه موهومی ۵ به دمای ۲۰°C پوشانده شده است. حال از راه‌حل عددی برای یافتن رادیوسیتی‌ها استفاده کرده، آهنگ‌های انتقال گرما را حساب می‌کنیم. پس از آن برای همین وضعیت هندسی، حالت سطح عایق را بررسی می‌کنیم.



شکل مثال ۸-۱۷.

همه ضرایب شکل را می‌توان به کمک شکل ۸-۱۳ و سطوح ۶ و ۷ دیسک موهومی به‌دست آورد.

داریم:

$$E_{b1} = \sigma T_1^{۴} = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(۱۲۷۳)^{۴} = ۱/۴۸۸۷۴ \times ۱۰^{۵} \frac{W}{m^۲}$$
$$= E_{b۳} = E_{b۴} = E_{b۲}$$

$$E_{b۵} = \sigma T_۵^{۴} = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(۲۹۳)^{۴} = ۴۱۷/۸ \frac{W}{m^۲}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_۲ = \varepsilon_۳ = \varepsilon_۴ = ۰/۶ \qquad \varepsilon_۵ = ۱/۰$$

$$A_1 = A_۵ = \pi(۱)^{۲} = \pi \text{ cm}^۲ = A_۶ = A_۷$$

$$A_۲ = A_۳ = A_۴ = \pi(۲)(۱) = ۲\pi$$

$$F_{11} = F_{۵۵} = ۰ \qquad F_{16} = ۰/۳۷ \qquad F_{17} = ۰/۱۷۵ \qquad F_{15} = ۰/۱$$

$$F_{12} = ۱ - F_{16} = ۰/۰۶۳ = F_{۵۲}$$

$$F_{13} = F_{16} - F_{17} = ۰/۱۹۵ = F_{۵۳}$$

$$F_{14} = F_{17} - F_{15} = ۰/۰۷۵ = F_{۵۴}$$

$$F_{۲1} = F_{۲۶} = F_{16} \frac{A_1}{A_۲} = ۰/۳۱۵ = F_{۲۵} = F_{۲۶} = F_{۲۷}$$

$$F_{۲۲} = ۱ - F_{۲1} - F_{۲۶} = ۰/۳۷ = F_{۲۳} = F_{۲۴}$$

$$F_{۳1} = F_{13} \frac{A_1}{A_۳} = ۰/۰۹۷۵$$

$$F_{۳۲} = F_{۳۶} - F_{۳1} = ۰/۲۱۷۵ = F_{۳۴} = F_{۳۳} = F_{۳۵}$$

$$F_{۲۷} = F_{۲۶} - F_{۲۳} = F_{۲1} - F_{۲۳} = ۰/۰۹۷۵ = F_{۲۴}$$

$$F_{۴1} = F_{14} \frac{A_1}{A_۴} = ۰/۰۳۷۵ = F_{۴۵}$$

$$F_{۴۲} = F_{۴۶} - F_{۴1} = ۰/۰۶ = F_{۴۴}$$

حال معادلات رادیوسیتی‌ها را به شکل معادله (۸-۱۱۲) می‌نویسیم و می‌دانیم که $F_{11} = ۰$ و $J_۵ = E_{b۵}$ است:

$$J_1 = (۱ - \varepsilon_1)(F_{12} J_۲ + F_{13} J_۳ + F_{14} J_۴ + F_{15} E_{b۵}) + \varepsilon_1 E_{b1}$$

$$J_۲ = \frac{۱}{۱ - F_{۲۲}(۱ - \varepsilon_۲)}[(۱ - \varepsilon_۲)(F_{۲1} J_1 + F_{۲۳} J_۳ + F_{۲۴} J_۴ + F_{۲۵} E_{b۵}) + \varepsilon_۲ E_{b۲}]$$

$$J_۳ = \frac{۱}{۱ - F_{۳۳}(۱ - \varepsilon_۳)} [(۱ - \varepsilon_۳)(F_{۳۱} J_۱ + F_{۳۲} J_۲ + F_{۳۴} J_۴ + F_{۳۵} E_{b۵}) + \varepsilon_۳ E_{b۳}]$$

$$J_۴ = \frac{۱}{۱ - F_{۴۴}(۱ - \varepsilon_۴)} [(۱ - \varepsilon_۴)(F_{۴۱} J_۱ + F_{۴۲} J_۲ + F_{۴۳} J_۳ + F_{۴۵} E_{b۵}) + \varepsilon_۴ E_{b۴}]$$

با جای‌گزینی همه مقادیر عددی داریم:

$$J_۱ = ۰/۲۵۲ J_۲ + ۰/۰۷۸ J_۳ + ۰/۰۳ J_۴ + ۸۹۳۴۱$$
$$J_۲ = ۰/۱۴۷۹ J_۱ + ۰/۱۰۲۱ J_۳ + ۰/۰۲۸۱۷ J_۴ + ۱۰۴۸۴۸$$
$$J_۳ = ۰/۰۴۵۷۷ J_۱ + ۰/۱۰۲۱ J_۲ + ۰/۱۰۲۱ J_۴ + ۱۰۴۸۵۹$$
$$J_۴ = ۰/۰۱۷۶۱ J_۱ + ۰/۰۲۸۱۷ J_۲ + ۰/۱۰۲۱ J_۳ + ۱۰۴۹۰۲$$

می‌توان این معادلات را حل کرد و داریم:

$$J_۱ = ۱/۴۰۰۳ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$
$$J_۲ = ۱/۴۳۲۶ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$
$$J_۳ = ۱/۳۸۷۲ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$
$$J_۴ = ۱/۲۵۵۷ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$

مقدار انتقال گرماها را می‌توان از معادله (۸-۱۱۰) حساب کرد:

$$q_i = \frac{\varepsilon_i A_i}{۱ - \varepsilon_i} (E_{bi} - J_i)$$

$$q_۱ = \frac{(۰/۶)(\pi \times ۱۰^{-۴})}{۱ - ۰/۶} (۱/۴۸۸۷ - ۱/۴۰۰۳)(۱۰^۵) = ۴/۱۶۵۸ \text{ W}$$

$$q_۲ = \frac{(۰/۶)(۲\pi \times ۱۰^{-۴})}{۱ - ۰/۶} (۱/۴۸۸۷ - ۱/۴۳۲۶)(۱۰^۵) = ۵/۲۸۷۳ \text{ W}$$

$$q_۳ = \frac{(۰/۶)(۲\pi \times ۱۰^{-۴})}{۱ - ۰/۶} (۱/۴۸۸۷ - ۱/۳۸۷۲)(۱۰^۵) = ۹/۵۶۶۱ \text{ W}$$

$$q_۴ = \frac{(۰/۶)(۲\pi \times ۱۰^{-۴})}{۱ - ۰/۶} (۱/۴۸۸۷ - ۱/۲۵۵۷)(۱۰^۵) = ۲۱/۹۵۹ \text{ W}$$

انتقال گرمای کل برابر مجموع این چهار مقدار است و یا:

$$q_{\text{کل}} = ۴۰/۹۷۹ \text{ W} \left[۱۳۹/۸ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

مقایسه این انتقال گرما با مقدار حاصل از فرض رادیوسیتی یکنواخت روی سطح جالب است. در نتیجه یک مسأله دو - جسمی خواهیم داشت که:

$$A_۱ = \pi + ۳(۲\pi) = ۷\pi \text{ cm}^۲ \qquad A_۵ = \pi \qquad F_{۵۱} = ۱/۰$$
$$\varepsilon_۱ = ۰/۶ \qquad \varepsilon_۵ = ۱/۰$$

سپس با تعویض نام‌گذاری‌ها می‌توان انتقال گرما را از معادلهٔ (۸-۴۳) حساب کرد:

$$q = \frac{(E_{b۱} - E_{b۵}) A_۵}{\frac{۱}{\varepsilon_۵} + \left(\frac{A_۵}{A_۱}\right)\left(\frac{۱}{\varepsilon_۱} - ۱\right)}$$

$$= \frac{(\pi \times ۱۰^{-۴})(۱/۴۸۸۷ \times ۱۰^۵ - ۴۱۷/۸)}{۱ + \left(\frac{۱}{۷}\right)\left(\frac{۱}{۰/۶} - ۱\right)}$$

$$= ۴۲/۵۸۱ \text{ W} \left[۱۴۵/۳ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

بنابراین، با فرض سادهٔ یکنواختی رادیوسیتی، مقدار انتقال گرما ۳/۹ درصد بیش از مقدار حاصل از تقسیم سطح گرم به چهار قسمت به‌دست می‌آید. این امر نشان می‌دهد که فرض یکنواختی رادیوسیتی در محاسبات مهندسی فرض خوبی است.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که باز هم سطح ۱ در دمای ۱۰۰۰°C با $\varepsilon = ۰/۶$ تابش می‌کند ولی دیوارهای جانبی ۲، ۳، ۴ عایق‌شده‌اند. باز هم تابش به اتاق بزرگ به دمای ۲۰°C است. معادلهٔ گرهی برای $J_۱$ مثل قبل است ولی معادلات $J_۲$، $J_۳$، $J_۴$ را باید به شکل معادله (۸-۱۱۳) نوشت. با نوشتن این معادلات و جای‌گزینی مقادیر عددی داریم:

$$J_۱ = ۰/۲۵۲ J_۲ + ۰/۰۷۸ J_۳ + ۰/۰۳ J_۴ + ۸۹۳۴۱$$
$$J_۲ = ۰/۵ J_۱ + ۰/۳۴۵۲ J_۳ + ۰/۰۹۵۲۴ J_۴ + ۲۴۸۶۹$$
$$J_۳ = ۰/۱۵۴۸ J_۱ + ۰/۳۴۵۲ J_۲ + ۰/۳۴۵۲ J_۴ + ۶۴۶۶$$
$$J_۴ = ۰/۰۵۹۵۲ J_۱ + ۰/۰۹۵۲ J_۲ + ۰/۳۴۵۲ J_۳ + ۲۰۸۹$$

با حل این معادلات داریم:

$$J_۱ = ۱/۱۵۳۲ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲} \left[۳۶۵۶۰ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^۲}\right]$$
$$J_۲ = ۰/۸۱۰۱۹ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$
$$J_۳ = ۰/۵۷۸۸۵ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$
$$J_۴ = ۰/۳۴۷۶۷ \times ۱۰^۵ \frac{W}{m^۲}$$

انتقال گرما در سطح ۱ برابر است با:

$$q_۱ = \frac{\varepsilon_۱ A_۱}{۱ - \varepsilon_۱} (E_{b۱} - J_۱)$$

$$= \frac{(۰/۶)(\pi \times ۱۰^{-۴})}{۱ - ۰/۶} (۱/۴۸۸۷ - ۱/۱۵۳۲)(۱۰^۵)$$

$$= ۱۵/۸۱ \text{ W} \left[۵۳/۹۵ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

دمای اجزای سطح عایق‌شده چنین حساب می‌شود:

$$J_i = E_{bi} = \sigma T_i^۴$$

$$T_۲ = ۱۰۹۳ \text{ K} = ۸۲۰°\text{C} \ [۱۵۰۸°\text{F}]$$

$$T_۳ = ۱۰۰۵ \text{ K} = ۷۳۲°\text{C} \ [۱۳۵۰°\text{F}]$$

$$T_۴ = ۸۹۵ \text{ K} = ۶۱۲°\text{C} \ [۱۱۳۴°\text{F}]$$

مقایسه انتقال گرمای حاصل در بالا با انتقال گرمای حاصل از فرض یکنواختی دما و رادیوسیتی سطوح ۲، ۳ و ۴ جالب است. برای این حالت از معادلهٔ (۸-۴۱) استفاده می‌کنیم:

$$q = \frac{A_۱(E_{b۱} - E_{b۵})}{\frac{A_۱ + A_۲ + ۲A_۱ F_{۱۵}}{A_۵ - A_۱(F_{۱۵})^۲} + \left(\frac{۱}{\varepsilon_۱} - ۱\right) + \frac{A_۱}{A_۵}\left(\frac{۱}{\varepsilon_۵} - ۱\right)}$$

و:

$$q = \frac{(\pi \times ۱۰^{-۴})(۱/۴۸۸۷ \times ۱۰^۵ - ۴۱۷/۸)}{\frac{\pi + \pi - ۲\pi(۰/۱)}{\pi - \pi(۰/۱)^۲} + \frac{۱}{۰/۶} - ۱} = ۱۸/۷۶۹ \text{ W} \left[۶۴/۰۴ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

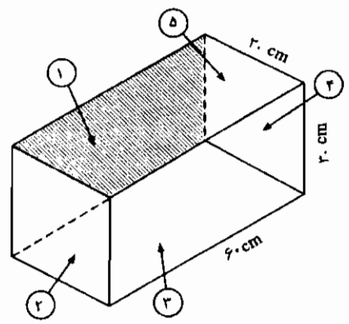
در این حالت، انتقال گرمای کلی از سطح ۱ (کف سوراخ) با فرض یکنواختی رادیوسیتی در سطح عایق ۱۸/۷ درصد بیش‌تر است.

مثال ۸-۱۸ گرهکن با شار گرمایی ثابت و سپرهای احاطه کننده

در شکل زیر، یک گرم‌کن برقی را در سطح ۱ نصب کرده‌اند و شار گرمایی ثابت $۱۰۰ \frac{\text{kW}}{\text{m}^۲}$ در این سطح تولید می‌شود. چهار سطح احاطه کننده آن با سطح ۱ و اتاق بزرگ به دمای ۲۰°C در توازن تابشی هستند. خواص سطوح $\varepsilon_۱ = ۰/۸$ و $\varepsilon_۲ = \varepsilon_۳ = \varepsilon_۴ = \varepsilon_۵ = ۰/۴$ هستند. دمای تمام سطوح را معین کنید. پشت سطح ۱ عایق است. محاسبه را با فرض یکنواختی و برابری دمای سطوح ۲، ۳، ۴ و ۵ تکرار کنید.

حل:

در حقیقت سطوح ۲، ۳، ۴ و ۵ هر کدام دارای دو سطح، داخلی و خارجی هستند. بنابراین علاوه بر اتاق، نه سطح داریم و در نتیجه با مسأله ده - جسمی روبه‌رو هستیم. البته با توجه به تقارن ملاحظه می‌کنیم که $T_۲ = T_۴$ و $T_۳ = T_۵$، ولی



شکل مثال ۸-۱۸.

برای این مسأله از فرمول‌بندی عددی عمومی استفاده می‌کنیم. اتاق بزرگ را با سطح ۶ مشخص می‌کنیم که با $\varepsilon_۶ = ۱/۰$ رفتار می‌کند. بنابراین، مثل این است که سوراخ یاد شده را با سطحی سیاه به دمای ۲۰°C پوشانده باشیم. ضرایب شکل سطوح داخلی را از اشکال ۸-۱۲ و ۸-۱۴ به‌دست می‌آوریم:

$$F_{۱۶} = F_{۶۱} = ۰/۲۸۵ \qquad F_{۱۳} = F_{۱۵} = ۰/۲۴ = F_{۳۱} = F_{۵۱}$$
$$F_{۱۲} = F_{۱۲} = ۰/۱۱۵ \qquad F_{۲۴} = F_{۴۲} = ۰/۰۶۸$$
$$F_{۳۵} = F_{۵۳} = ۰/۲۸۵ \qquad F_{۳۴} = F_{۵۲} = F_{۴۳} = ۰/۱۱۵$$
$$F_{۲۵} = F_{۴۳} = F_{۲۵} = F_{۴۳} = F_{۲۱} = F_{۴۱} = F_{۲۶} = F_{۴۶} = ۰/۲۳$$
$$F_{۱۱} = F_{۲۲} = F_{۳۳} = F_{۴۴} = F_{۵۵} = ۰$$

برای سطوح خارجی داریم:

$$F'_{۲۶} = F'_{۳۶} = F'_{۴۶} = F'_{۵۶} = ۱/۰$$

که پریم (′) نشان دهنده سطح خارجی است. برای رادیوسیتی‌های سطوح خارجی نیز از پریم استفاده می‌کنیم. برای اتاق:

$$J_۶ = E_{b۶} = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(۲۹۳)^۴ = ۴۱۷/۸ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲}$$

برای سطح ۱ در حالت شار گرمایی ثابت، معادلهٔ (۸-۱۱۵ الف) را به‌کار برده، می‌نویسیم:

$$J_۱ - (F_{۱۲} J_۲ + F_{۱۳} J_۳ + F_{۱۴} J_۴ + F_{۱۵} J_۵ + F_{۱۶} J_۶) = ۱/۰ \times ۱۰^۵ \quad \text{(الف)}$$

به دلیل توازن تابشی داریم:

$$(J_۲ - E_{b۲}) \frac{\varepsilon_۲ A_۲}{۱ - \varepsilon_۲} = (E_{b۲} - J'_۲) \frac{\varepsilon_۲ A_۲}{۱ - \varepsilon_۲}$$

و:

$$E_{b۲} = \frac{J_۲ + J'_۲}{۲} \quad \text{(ب)}$$

که پریم مشخص کننده رادیوسیتی خارجی است. برای سطوح ۳، ۴ و ۵ روابط مشابهی به کار می‌رود. بنابراین می‌توان برای سطح *داخلی* ۲ از معادله (۸-۱۱۲ الف) استفاده کرد:

$$J_۲ - (۱ - \varepsilon_۲)(F_{۲۱} J_۱ + F_{۲۳} J_۳ + F_{۲۴} J_۴ + F_{۲۵} J_۵ + F_{۲۶} J_۶) = \frac{\varepsilon_۲}{۲}(J_۲ + J'_۲) \quad \text{(پ)}$$

و برای سطح خارجی ۲:

$$J'_۲ - (۱ - \varepsilon_۲)(F_{۲۶} J_۶) = \frac{\varepsilon_۲}{۲}(J_۲ + J'_۲) \quad \text{(ت)}$$

برای سطوح ۳، ۴ و ۵ نیز معادلاتی شبیه (پ) و (ت) نوشته می‌شود و با جای‌گزینی ضرایب شکل و ضرایب گسیل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$J_۱ - ۰/۱۱۵ J_۲ - ۰/۲۴ J_۳ - ۰/۱۱۵ J_۴ - ۰/۲۴ J_۵ = ۱/۰۰۱۲ \times ۱۰^۵$$
$$-۰/۱۳۸ J_۱ + ۰/۸ J_۲ - ۰/۲ J'_۲ - ۰/۱۳۸ J_۳ - ۰/۰۴۰۸ J_۴ - ۰/۱۳۸ J_۵ = ۵۷/۶۶$$
$$۰/۲ J_۲ - ۰/۸ J'_۲ = -۲۵۰/۶۸$$
$$-۰/۱۳۸ J_۱ - ۰/۰۶۹ J_۲ + ۰/۸ J_۳ - ۰/۲ J'_۳ - ۰/۰۶۹ J_۴ - ۰/۰۵ J_۵ = ۶۰/۱۶$$
$$۰/۲ J_۳ - ۰/۸ J'_۳ = -۲۵۰/۶۸$$
$$-۰/۱۳۸ J_۱ - ۰/۰۴۰۸ J_۲ - ۰/۱۳۸ J_۳ + ۰/۸ J_۴ - ۰/۲ J'_۴ - ۰/۱۳۸ J_۵ = ۵۷/۶۶$$
$$۰/۲ J_۴ - ۰/۸ J'_۴ = -۲۵۰/۶۸$$
$$-۰/۱۴۴ J_۱ - ۰/۰۶۹ J_۲ - ۰/۰۵۷ J_۳ - ۰/۰۶۹ J_۴ + ۰/۸ J_۵ - ۰/۲ J'_۵ = ۶۰/۱۶$$
$$۰/۲ J_۵ - ۰/۸ J'_۵ = -۲۵۰/۶۸$$

بنابراین نُه معادله و نُه مجهول داریم که با حل آنها Jها چنین به‌دست می‌آید:

$$J_۱ = ۱/۲۴۸۸۷ \times ۱۰^۵ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲}$$
$$J_۲ = J_۴ = ۳۷۵۴۹$$
$$J'_۲ = J'_۴ = ۹۷۰۱$$
$$J_۳ = J_۵ = ۳۳۶۰۵$$
$$J'_۳ = J'_۵ = ۸۷۱۴$$

بنابراین دماها از معادلهٔ (ب) حساب می‌شود:

$$E_{b۲} = \frac{۳۷۵۴۹ + ۹۷۰۱}{۲} = ۲۳۶۲۵ \qquad T_۲ = T_۴ = ۸۰۳/۵ \text{ K}$$

$$E_{b۳} = \frac{۳۳۶۰۵ + ۸۷۱۴}{۲} = ۲۱۱۶۰ \qquad T_۳ = T_۵ = ۷۸۱/۶ \text{ K}$$

مشاهده می‌کنیم که برای سطح ۱:

$$\frac{q}{A} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}(E_{b1} - J_1)$$

بنابراین:

$$E_{b1} = \frac{(1/0 \times 10^5)(1 - 0/8)}{0/8} + 1/24887 \times 10^5 = 1/49887 \times 10^5$$

و:

$$T_1 = 1275 \text{ K}$$

مجدداً توجه داریم که می‌توانستیم تقارن را در نظر بگیریم و $J_2 = J_3, J_2' = J_3'$ و الی آخر قرار دهیم. بدین ترتیب فقط پنج معادله با پنج مجهول داشتیم.

سطوح ۲، ۳، ۴ و ۵ به صورت یک سطح. اکنون به عقب برگشته و سطوح ۲، ۳، ۴ و ۵ را به صورت سطح ۷ در نظر می‌گیریم. بنابراین ضرایب شکل چنین است:

$$F_{16} = F_{61} = 0/285 \qquad F_{17} = 1 - 0/285 = 0/715$$

$$A_1 = 2/0 \qquad A_7 = 6/0$$

بنابراین:

$$F_{71} = (0/715)\left(\frac{2}{6}\right) = 0/23833 = F_{76}$$

$$F_{77} = 1 - (2)(0/23833) = 0/52333 \qquad F_{76}' = 1/0$$

بنابراین برای سطح ۱ از معادلهٔ (۸-۱۱۵ الف) استفاده کرده، داریم:

$$J_1 - (F_{17}J_7 + F_{16}J_6) = 1/0 \times 10^5$$

با استفاده از $E_{b7} = \frac{J_7 + J_7'}{2}$ برای سطح *داخلی* ۷ داریم:

$$J_7[1 - F_{77}(1 - \varepsilon_7)] - (1 - \varepsilon_7)(F_{71}J_1 + F_{76}J_6) = \frac{\varepsilon_7}{2}(J_7 + J_7')$$

در حالی که برای سطح *خارجی* آن داریم:

$$J_7' - (1 - \varepsilon_7)F_{76}'J_6 = \frac{\varepsilon_7}{2}(J_7 + J_7')$$

با جای‌گزینی مقادیر عددی به سه معادله زیر می‌رسیم:

$$J_1 - 0/715J_7 = 1/00012 \times 10^5$$

$$-0/143J_1 + 0/486J_7 - 0/2J_7' = 59/74$$

$$0/2J_7 - 0/8J_7' = -250/68$$

که با حل آنها داریم:

$$J_1 = 1/31054 \times 10^5 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$J_7 = 43264$$

$$J_7' = 11129$$

بنابراین دماها مثل قبل حساب می‌شود:

$$E_{b7} = \frac{43264 + 11129}{2} = 27197 \qquad T_7 = 832/2 \text{ K}$$

$$E_{b1} = \frac{(1/0 \times 10^5)(1 - 0/8)}{0/8} + 1/31054 \times 10^5 = 1/65054 \times 10^5$$

$$T_1 = 1306 \text{ K}$$

در نتیجه، تفاوت دمای حاصل از دو روش حدود ۳۰ K است.

اظهار نظر: چون دو جواب اختلاف اندکی دارند نتیجه می‌گیریم که پیچیدگی اضافه براندازه ناشی از عدم یکسانی رادیوسیتی سطوح ارزشی ندارد، به ویژه وقتی که اطمینان به ضرایب گسیل سطوح نیز نیست. *این به معنی آنست که فرض تابش‌دهی و رادیوسیتی یکنواخت گرچه دقیقاً صحیح نیست ولی جواب‌های حاصل کاملاً قانع کننده‌اند.*

مثال ۸-۱۹ راه حل عددی برای ترکیب جابه‌جایی و تابش (سیستم غیر خطی)

دمای صفحه‌ای $0/5 \text{ m} \times 0/5 \text{ m}$ برابر ۱۳۰۰ K است و در معرض محیطی جابه‌جایی و تابشی به دمای ۳۰۰ K قرار داده می‌شود. به سطح بالایی آن دو سپر تابشی به ابعاد $0/5 \text{ m} \times 0/5 \text{ m}$ مطابق شکل وصل شده است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی تمامی سطوح $50 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ و $\varepsilon_1 = 0/8$ و $\varepsilon_4 = \varepsilon_3 = 0/3 = \varepsilon_2$ است. کل گرمای تلف‌شده از سطح به دمای ۱۳۰۰ K و دمای سپرها را معین کنید.

حل:

این مثال چگونگی بررسی مسائل جابه‌جایی - تابشی را با فرمول‌بندی عددی و روش محاسباتی تکراری نشان می‌دهد. نام‌گذاری در شکل نشان داده شده است. با استفاده از شکل‌های ۸-۱۲ و ۸-۱۴ می‌توان ضرایب شکل را به‌دست آورد و داریم:

$$F_{12} = F_{13} = 0/2 \qquad F_{12} = 1 - 0/2 - 0/2 = 0/6$$

$$F_{23} = F_{32} = 0/2 \qquad F_{22R} = F_{23L} = 1/0$$

$$F_{21} = F_{12} = F_{31} = 0/2 \qquad F_{22R} = F_{23L} = 0/6$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

$$J_{2R} = J_{3L} \qquad J_{2L} = J_{3R} \qquad \text{از تقارن}$$

$$J_4 = E_{b4}$$

اکنون برای به‌دست آوردن رابطه‌ای برای J_1 از معادله (۸-۱۱۲) استفاده می‌کنیم:

$$J_1 = (1 - \varepsilon_1)[F_{12}J_{2R} + F_{13}J_{3L} + F_{14}J_4] + \varepsilon_1 E_{b1}$$

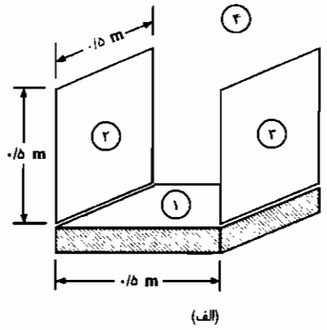
ولی $J_{2R} = J_{3L}$ و $F_{12} = F_{13}$ بنابراین:

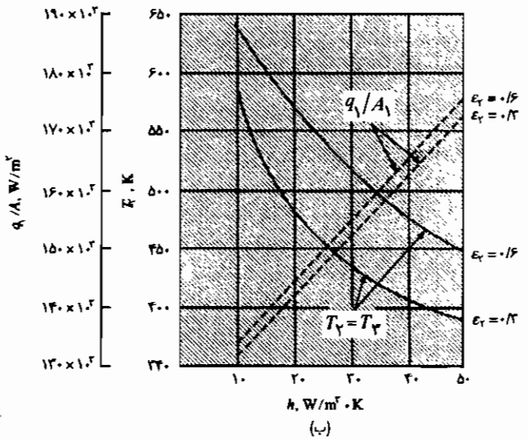
$$J_1 = (1 - \varepsilon_1)(2F_{13}J_{2R} + F_{14}J_4) + \varepsilon_1 E_{b1} \qquad \text{(الف)}$$

از معادله (۸-۱۱۵) برای توازن انرژی کلی روی سطح ۲ استفاده می‌کنیم:

$$2h(T_\infty - T_2) = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{b2} - J_{2R}) + \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{b2} - J_{2L})$$

$$= \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(2E_{b2} - J_{2R} - J_{2L}) \qquad \text{(ب)}$$





شکل مثال ۸-۱۹.

از معادله (۸-۱۱۲) برای سطح J_{2R} استفاده می‌شود:

$$J_{2R} = (1 - \varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_{3L} + F_{22R}J_4) + \varepsilon_2 E_{b2}$$

ولی $J_{2R} = J_{3L}$ بنابراین:

$$J_{2R} = \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon_2)F_{23}}[(1 - \varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{22R}J_4) + \varepsilon_2 E_{b2}] \qquad \text{(پ)}$$

معادله سطح J_{2L} چنین است:

$$J_{2L} = (1 - \varepsilon_2)(F_{22L}J_4) + \varepsilon_2 E_{b2} \qquad \text{(ت)}$$

اکنون چهار معادله با چهار مجهول داریم J_1، J_{2R}، J_{2L}، E_{b2} با $T_4 = \left(\frac{E_{b4}}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$.

چون معادلهٔ (ب) بر حسب E_b خطی نیست، برای حل این دستگاه باید از روش مخصوصی استفاده کنیم. قبل از استفاده از این روش می‌توانیم مقادیر عددی مختلف را در معادلات (الف) تا (ت) جای‌گزین کنیم و ضرایب ماتریس را به‌دست آوریم:

J_1	J_{2R}	J_{2L}	E_{b2}	C
۱	−۰/۰۸	۰	۰	۱۲۹۵۸۴
۰	−۰/۴۲۸۶	−۰/۴۲۸۶	۰/۸۵۷۱	$30000 - 100T_2$
۰/۱۶۲۷۹۱	−۱	۰	۰/۳۴۸۸۳۷	−۲۲۴/۲۶۰۵
۰	۰	۱	−۰/۳	۳۲۱/۴

در الگوریتم محاسباتی‌ای که به‌کار می‌بریم مقادیر T_2 تکرار می‌شوند تا مقدار E_{b2} حاصل از حل دستگاه معادلات با $E_{b2} = \sigma T_2^4$ سازگار شود. ترتیب مراحل چنین است:

۱- مقداری معقول برای T_2 فرض می‌کنیم.

۲- این مقدار را در معادله (ب) گذاشته ماتریس را حل می‌کنیم و (ث) تخمینی را به‌دست می‌آوریم.

۳- با توجه به مقدار فرضی برای T_2 مقدار $E_{b2}(T_2) = \sigma T_2^4$ را حساب می‌کنیم.

۴- $\Delta E_{b2} = E_{b2}(\text{ث}) - E_{b2}(T_2)$ را حساب می‌کنیم.

۵- اگر $\Delta E_{b2} > 0$، برای T_2 مقدار بزرگ‌تری فرض کرده، به مرحله ۲ باز می‌گردیم.

اگر $\Delta E_{b2} < 0$، مقدار کم‌تری برای T_2 فرض کرده، به مرحله ۲ باز می‌گردیم.

۶- عمل را ادامه می‌دهیم تا ΔE_{b2} به‌حد کافی کوچک شود. در این مرحله به جواب مطلوب ماتریس رسیده‌ایم.

پس از تکمیل دو تکرار، برای به صفر رساندن $\Delta E_{b2} = 0$ از عمل درون‌یابی یا برون‌یابی روی دو مقدار آخری ΔE_{b2} استفاده می‌شود تا به محاسبات سرعت بخشیم. نتایج تکرار چنین است:

تکرار	T_2	E_{b2}(ث)	$E_{b2}(T_2)$	ΔE_{b2}
۱	۳۰۰	۱۶۲۸۳	۴۵۹	۱۵۸۲۴
۲	۵۰۰	−۱۸۳۷۷	۳۵۴۳	−۲۱۹۲۰
۳	۳۸۴	۱۷۲۵/۷	۱۲۳۲/۶	۴۹۳/۱
۴	۳۸۶/۶	۱۲۷۵	۱۲۶۶	۹

روشن است که تقارب در این روش خیلی سریع صورت می‌گیرد و جواب نهایی عبارتست از:

$$J_1 = 1/3135 \times 10^5 \qquad J_{2R} = 22051$$

$$J_{2L} = 710 \qquad E_{b2} = 1275 \qquad T_2 = 386/6 \text{ K}$$

کل شار گرمایی تلف‌شده از سطح ۱ برابر است با:

$$\frac{q_1}{A_1} = h(T_1 - T_\infty) + (E_{b1} - J_1)\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}$$

$$= 1/72426 \times 10^5 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \qquad \text{(ث)}$$

بنابراین اتلاف گرما از سطحی به ابعاد ۰/۵ m × ۰/۵ برابر است با:

$$q_1 = (۱/۷۲۲۶ \times ۱۰^{۵})(۰/۵)^{۲} = ۴۳۰۶۵ \text{ W}$$

سایر موارد را می‌توان حساب کرد و تأثیر h و ε_2 روی این نتایج در شکل مثال نشان داده شده است.

اظهار نظر

این مثال چگونگی حل معادلات غیر خطی در ترکیبی از جابه‌جایی و تابش را روش تکراری سرراست نشان می‌دهد. با توجه به عدم اطمینان در مورد مقدار ضریب گسیل جابه‌جایی، برای به‌دست آوردن جوابی قابل قبول فقط به چند تکرار نیاز داریم.

❑ ۸-۱۴ تابش خورشیدی

تابش خورشیدی، شکلی از تابش گرمایی با پخش مخصوص طول‌موج است. شدت آن شدیداً به شرایط جو، وقت سال و زاویه فرود اشعه خورشیدی بر سطح زمین بستگی دارد. کل تابش‌دهی خورشیدی در بیرون جو وقتی زمین در فاصلهٔ متوسط خودش از خورشید قرار گرفته، $۱۳۹۵ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ است. این عدد به *ثابت خورشیدی* موسوم است و با کسب اطلاعات تجربی دقیق‌تر اصلاح می‌شود.

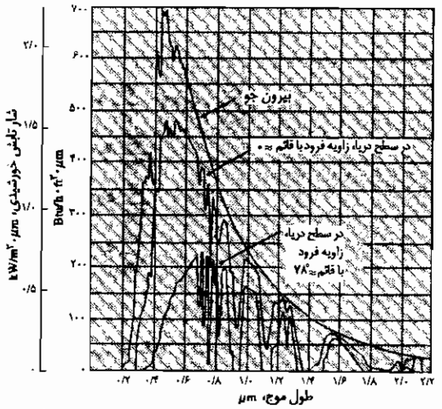
تمام انرژی یادشده در ثابت خورشیدی به دلیل جذب شدید آن توسط دی‌اکسید کربن و بخار آب جو به سطح زمین نمی‌رسد. تابش خورشیدی برخوردی بر سطح زمین نیز به مقدار گرد و خاک و سایر آلودگی‌های جوی بستگی دارد. حداکثر انرژی خورشیدی وقتی به سطح زمین می‌رسد که اشعه خورشیدی مستقیماً بر سطح فرود آیند زیرا (۱) در مقابل شار خورشیدی ورودی، سطح دید بزرگ‌تری موجود است و (۲) اشعه خورشیدی مسافت کم‌تری را در جو می‌پیماید و در نتیجه مقدار جذب شدن کم‌تر از حالت با زاویه فرود مایل است. شکل ۸-۶۳ آثار جذب جوی را در محلی در سطح دریا در روزهای صاف و در جو با گردوخاک متوسط و مقدار بخار آب متوسط نشان می‌دهد.

از شکل ۸-۶۳ کاملاً روشن است که تابش خورشیدی رسیده به سطح زمین مثل تابش حاصل از جسم سیاه ایده‌آل رفتار نمی‌کند. در حالی که در بیرون جو، پخش انرژی بیش‌تر الگوی ایده‌آل را دنبال می‌کند. برای تعیین دمای جسم سیاه معادل در تابش خورشیدی، می‌توان طول‌موج ایجادکننده حداکثر طیف (حدود ۰/۵μm، طبق شکل ۸-۶۳) و قانون جابه‌جایی وین [معادله (۸-۱۳)] را به کار برد. داریم:

$$T \approx \frac{۲۹۸۷/۶}{۰/۵} = ۵۷۹۵ \text{ K} \quad (۱۰۴۳۱^{\circ}R)$$

بنابراین دمای خورشیدی معادل در تابش گرمایی حدوداً ۵۸۰۰ K (۱۰۴۴۰۰°R) است.

اگر تمام مواد رفتار جسم - خاکستری را داشته باشند، تحلیل تابش - خورشیدی مسأله غیر عادی خاصی نخواهد بود؛ اما چون تابش خورشیدی در محدوده طول‌موج‌های کوتاه متمرکز است، برخلاف قسمت اعظم تابش گرمایی «مقید به زمین» که در طول‌موج‌های خیلی بلندتر انجام می‌شود، ماده‌ای خاص ممکن است خواص قابلیت جذب و قابلیت تراگسیل کاملاً متفاوتی را در مقابل این دو نوع تابش به نمایش گذارد. مثال کلاسیک این رفتار، گلخانه است. شیشه معمولی، تابش را در طول‌موج‌های زیر ۲μm خیلی راحت تراگسیل می‌کند؛ بنابراین قسمت زیادی از تابش خورشیدی برخورده به خود را تراگسیل می‌کند اما نسبت به تابش با طول‌موج‌های بلند، بالای ۳ یا ۴μm، اساساً مات است. عملاً



شکل ۸-۶۳ توزیع طیفی تابش خورشیدی به صورت توابعی از شرایط جوی و زاویه فرود طبق مرجع ۱۵.

تمام تابش دما - پایین گسیل‌شده توسط اشیای داخل گلخانه با طول‌موج بلند است، که در گلخانه محبوس باقی می‌ماند. بنابراین تابش خیلی بیش‌تری از شیشه اجازه ورود می‌یابد تا از آن بیرون رود، در نتیجه موجب گرمایش می‌شود. تابش خورشیدی جذب شده توسط اشیای گلخانه باید بالاخره به طریق جابه‌جایی از دیوارهای بیرونی گلخانه به محیط اطراف پراکنده شود.

بر خلاف مورد تابش دما پایین از فلز مات یا سطوح رنگ شده، رفتار مشابهی در مورد قابلیت جذب و بازتاب تابش خورشیدی، ملاحظه می‌شود. بیش‌تر اوقات ممکن است ضریب جذب کل در تابش خورشیدی کاملاً متفاوت با ضریب جذب در تابش جسم سیاه به دمای متوسط مثلاً ۲۵°C، باشد. در جدول ۸-۳ مقایسه مختصری از ضرایب جذب بعضی سطوح نمونه در تابش خورشیدی و دما - پایین ارائه شده است. تفاوت‌ها نسبتاً قابل توجه است.

منظور این نیست که این بحث مختصر تابش خورشیدی حالت جامعی داشته باشد. بلکه هدف آگاه کردن خواننده از بعضی اطلاعات مربوط به خواص (مثل مرجع ۱۴) در محاسبات تابش خورشیدی است.

☑ **جدول ۸-۴** مقایسه ضرایب جذب سطوح مختلف با تابش گرمایی خورشیدی و دماپایین. جمع‌آوری شده از مرجع ۱۴

سطح	ضریب جذب: برای تابش خورشیدی ($\lambda \sim ۰/۵\mu\text{m}$)	ضریب جذب: برای تابش دما پایین ۲۵°C ~ ($\lambda \sim ۱۰\mu\text{m}$)
آلومینیم، خیلی صیقلی شده	۰/۱۵	۰/۰۴
مس، خیلی صیقل یافته	۰/۱۸	۰/۰۳
تارشده	۰/۶۵	۰/۷۵
چدن	۰/۹۴	۰/۲۱
فولاد ضدزنگ، شماره ۳۰۱، صیقل یافته	۰/۳۷	۰/۶۰
مرمر سفید	۰/۴۶	۰/۹۵
آسفالت	۰/۹۰	۰/۹۰
آجر، قرمز	۰/۷۵	۰/۹۳
گراویه	۰/۲۹	۰/۸۵
لاک‌سیاه یک‌دست	۰/۹۶	۰/۹۵
رنگ‌های سفید، انواع مختلف رنگ‌دانه	۰/۱۲-۰/۱۶	۰/۹۰-۰/۹۵

مثال ۸-۲۰ دماهای تعادل محیط - خورشیدی

دمای تعادل تابشی صفحه‌ای را بیابید که در معرض شار خورشیدی $۷۰۰ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ و دمای محیط ۲۵°C است. این سطح با (الف) رنگ سفید یا (ب) لاک سیاه یک دست پوشانده شده است. از جابه‌جایی صرف‌نظر کنید.

حل :

در تعادل تابشی، انرژی خالص جذب شده از خورشید باید مساوی مبادله تابش طول‌موج بلند با محیط اطراف باشد و یا:

$$\text{(الف)} \quad \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{خورشیدی}} \alpha_{\text{خورشیدی}} = \alpha_{\text{دما-پایین}} \ \sigma(T^4 - T_{\text{محیط}}^4)$$

از جدول ۸-۴ برای رنگ سفید داریم:

$$\alpha_{\text{خورشیدی}} = ۰/۱۲ \qquad \alpha_{\text{دما-پایین}} = ۰/۹$$

بنابراین معادلهٔ (الف) چنین می‌شود:

$$(۷۰۰)(۰/۱۲) = (۰/۹)(۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(T^4 - ۲۹۸^4)$$

و :

$$T = ۳۱۲/۵ \text{ K} = ۳۹/۵^{\circ}\text{C} \ [۱۰۳^{\circ}\text{F}]$$

برای لاک سیاه یک‌دست داریم:

$$\alpha_{\text{خورشیدی}} = ۰/۹۶ \qquad \alpha_{\text{دما-پایین}} = ۰/۹۵$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادلهٔ (الف) داریم:

$$(۷۰۰)(۰/۹۶) = (۰/۹۵)(۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(T^4 - ۲۹۸^4)$$

و :

$$T = ۳۷۷/۸ \text{ K} = ۱۰۴/۸^{\circ}\text{C} \ [۲۲۰/۶^{\circ}\text{F}]$$

از این مثال به نتیجه‌ای می‌رسیم که از ابتدا می‌دانستیم و آن این‌که در نور خورشید، سطوح سفید سردتر از سطوح سیاهند.

مثال ۸-۲۱ اثر جابه‌جایی بردماهای تعادل خورشیدی

سطوح مثال ۸-۲۰، علاوه بر محیط تابشی در معرض محیط جابه‌جایی به دمای ۲۵°C و $h = ۱۰ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$ نیز هست. دماهای تعادل جابه‌جایی - تابش در این شرایط را حساب کنید.

حل :

انرژی خورشیدی جذب شده در این مورد باید با جمع انتقال‌های تابشی و جابه‌جایی به محیط اطراف برابر باشد، یا:

$$\text{(الف)} \quad \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{خورشیدی}} \alpha_{\text{خورشیدی}} = \alpha_{\text{دما-پایین}} \ \sigma(T^4 - T_{\text{محیط}}^4) + h(T - T_{\text{محیط}})$$

برای رنگ سفید با استفاده از همان خواص سطحی مثال ۸-۲۰ داریم:

$$(۷۰۰)(۰/۱۲) = (۰/۹)(۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(T^4 - ۲۹۸^4) + (۱۰)(T - ۲۹۸)$$

و جواب آن برابر است با:

$$T = ۳۰۳/۴ \text{ K} = ۳۰/۴^{\circ}\text{C} \ (۸۶/۷^{\circ}\text{F})$$

برای سطح سیاه تخت می‌توان خواص را در معادلهٔ (الف) گذاشت و داریم:

$$(۷۰۰)(۰/۹۶) = (۰/۹۵)(۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(T^4 - ۲۹۸^4) + (۱۰)(T - ۲۹۸)$$

که جواب آن به صورت زیر است:

$$T = ۳۳۷/۸ \text{ K} = ۶۴/۸^{\circ}\text{C} \ (۱۴۹^{\circ}\text{F})$$

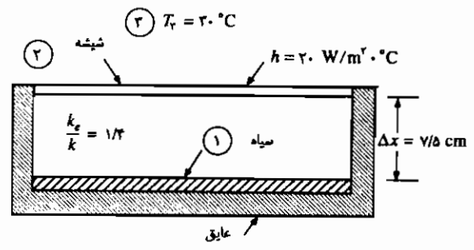
مثل مثال ۸-۲۰، سطح سیاه در نور خورشید گرم‌تر از سطح سفید است اما اتلاف جابه‌جایی شدیداً دماها را پایین می‌آورد.

خواننده توجه دارد که مقدار ضریب جابه‌جایی، $h = ۱۰ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$، تقریباً همانی است که برای جابه‌جایی آزاد از سطح گرم انتظار داشتیم و با روابط فصل ۷ محاسبه شد.

مثال ۸-۲۲ کلکتور خورشیدی صفحه - تخت

کلکتور خورشیدی صفحه - تختی مطابق شکل ساخته شده است. صفحه‌ای شیشه‌ای روی سطح سیاه عایق را می‌پوشاند. انرژی خورشیدی با آهنگ $۷۵۰ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ از شیشه تراگسیل و در سطح سیاه جذب می‌شود. سطح گرم شده، به شیشه تابش کرده، به طریق جابه‌جایی نیز در عرض فاصلهٔ هوایی گرما از دست می‌دهد که $\frac{k_e}{k} = ۱/۴$ است. سطح خارجی شیشه به طریق تابش و جابه‌جایی به محیط اطراف که دمای آن ۳۰°C و دارای $h = ۲۰ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$ است گرما از دست می‌دهد. به فرض

شیشه هیچ تابش گرمایی تراگسیل نکرده و دارای $\varepsilon = ۰/۹$ است. فرض می‌شود که سطح سیاه دارای $\varepsilon = ۱/۰$ در کل تابش است. دمای شیشه و سطح داخلی را بیابید.



شکل مثال ۸-۲۲.

حل :

این مسأله مثال جالبی از تحلیل انتقال گرمای مرکب از تابش و جابه‌جایی است. صفحه سیاه را سطح ۱، شیشه را سطح ۲ و محیط اطراف را سطح ۳ در نظر می‌گیریم. به فرض انرژی خورشیدی در شیشه جذب نمی‌شود. برای صفحه سیاه داریم:

$$J_۱ = E_{b۱}$$

انرژی جابه‌جایی و خورشیدی انتقالی به سطح ۱ برابر است با:

$$\left.\frac{q}{A}\right]_۱ = \frac{k_e}{\Delta x}(T_۲ - T_۱) + \left.\frac{q}{A}\right]_s \qquad \text{(الف)}$$

حال اگر از معادلهٔ (۸-۱۱۵) استفاده کنیم، داریم:

$$E_{b۱} - F_{۱۲}J_{۲i} = \frac{k_e}{\Delta x}(T_۲ - T_۱) + \left.\frac{q}{A}\right]_s \qquad \text{(ب)}$$

که $J_{۲i}$ رادیوسیتی داخلی شیشه است. موازنه انرژی کلی برای سطح ۲ چنین است:

$$\frac{\varepsilon_۲}{۱-\varepsilon_۲}(۲E_{b۲} - J_{۲i} - J_{۲o}) = \frac{k_e}{\Delta x}(T_۱ - T_۲) + h(T_۳ - T_۲) \qquad \text{(پ)}$$

که اینجا $J_{۲o}$ رادیوسیتی خارج شیشه است.

درسیستم کلی، انرژی خورشیدی جذب شده باید بالاخره به طریق جابه‌جایی و تابش از سطح خارجی شیشه تلف شود. بنابراین:

$$\left.\frac{q}{A}\right]_s = h(T_۲ - T_۳) + \varepsilon_۲(E_{b۲} - E_{b۳}) \qquad \text{(ت)}$$

بالاخره، تابش تلف‌شده از قسمت بیرونی شیشه را می‌توان به دو روش نوشت:

$$\left.\frac{q}{A}\right]_{\text{تلف}} = \varepsilon_۲(E_{b۲} - E_{b۳}) = (E_{b۲} - J_{۲o})\frac{\varepsilon_۲}{۱-\varepsilon_۲} \qquad \text{(ث)}$$

سطح کلکتور در مقایسه با فاصله جداکننده خیلی بزرگ است بنابراین $F_{۱۲} \approx ۱/۰$ است. اکنون چهار معادله و چهار مجهول داریم: $E_{b۱}$، $E_{b۲}$، $J_{۲i}$ و $J_{۲o}$. البته، $T_۱$ و $T_۲$ بر حسب $E_{b۱}$ و $E_{b۲}$ بیان می‌شوند. روش حل چنین است:

۱ – معادلهٔ (ت) را با تکرار حل می‌کنیم تا $E_{b۲}$ و $T_۲$ به‌دست آید.

۲ – معادلهٔ (ث) را حل می‌کنیم و $J_{۲o}$ را به‌دست می‌آوریم.

۳ – معادلهٔ (ب) را حل کرده، $J_{۲i}$ را به‌دست آورده، آن را در معادله (پ) قرار می‌دهیم (با $F_{۱۲} = ۱/۰$) تا داشته باشیم :

$$\frac{\varepsilon_۲}{۱-\varepsilon_۲}\left[۲E_{b۲} - E_{b۱} - \frac{k_e}{\Delta x}(T_۱ - T_۲) + \left.\frac{q}{A}\right]_s - J_{۲o}\right]$$
$$= \frac{k_e}{\Delta x}(T_۱ - T_۲) + h(T_۳ - T_۲) \qquad \text{(ج)}$$

۴ – معادلهٔ (چ) را با تکرار حل می‌کنیم و $T_۱$ و $E_{b۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

وقتی این روش را ادامه دهیم، با $k = ۰/۰۳ \frac{W}{m.°C}$، نتایج چنین است:

$E_{b۲} = ۶۸۲/۹۶ \frac{W}{m^۲}$ $\qquad T_۲ = ۳۳۱/۳ K$

$J_{۲o} = ۶۶۲/۴۵ \frac{W}{m^۲}$ $\qquad j_{۲i} = ۷۶۰/۹۴ \frac{W}{m^۲}$

$E_{b۱} = ۱۴۷۱/۶۸ \frac{W}{m^۲}$ $\qquad T_۱ = ۴۰۱/۴ K\ [۲۶۲/۵°F]$

و می‌بینیم که دمای داخل کلکتور نسبتاً بالا است. این نتیجه برای سطح عایق‌شده است. در حالت عادی، انرژی از سطح گرم خارج شده و بسته به آهنگ انرژی از دست‌رفته، دما پایین‌تر خواهد بود. در مرجع ۳۷ اطلاعات جامعی در زمینه کلکتورهای خورشیدی ارائه شده است.

❑ ۸-۱۵ خواص تابشی محیط

راجع به طیف تابشی خورشید توضیح داده، گفتیم که قسمت اعظم انرژی خورشیدی در ناحیه طول‌موج کوتاه متمرکز است. هم‌چنین گفتیم که در نتیجهٔ این طیف، ممکن است سطوح واقعی خواص جذب اساساً متفاوتی در برابر تابش خورشیدی نسبت به تابش «مقید به زمین» با طول‌موج بلند از خود نشان دهند.

هواشناسان و آب‌شناسان برای بیان شدت تابش خورشیدی مستقیم که بر واحد سطح افقی در واحد زمان می‌تابد از واژه خورتاب‌گیری استفاده می‌کنند که با نماد I مشخص می‌شود. خورتاب‌گیری مشابه واژه تابش‌دهی است که در تابش برخوردی از آن استفاده شد.

سایر واحدها را مورد تأکید قرار می‌دهیم ولی ذکر واحد به کار رفته در کتاب‌های هواشناسی مفید است:

$$۱\ (\text{Ly}) = ۱ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^۲}\left[۴۱/۸۶ \frac{\text{kJ}}{\text{m}^۲}\right]$$ لانگلی

شدت تابش و خورتاب‌گیری را اکثراً برحسب لانگلی بر واحد زمان بیان می‌کنند؛ مثلاً، ثابت استفان – بولتزمن چنین است:

$$\sigma = ۰/۸۲۶ \times ۱۰^{-۱۰} \frac{\text{Ly}}{\text{min.K}^۴}$$

انتقال گرمای تابشی در محیط به خواص جذب، پراکندگی و

بازتاب جو و سطوح طبیعی بستگی دارد. در جو دو نوع پدیده پراکندگی به‌وجود می‌آید. پراکندگی ملکولی به علت برهم‌کنش تابش با ملکول‌های منفرد مشاهده می‌شود. رنگ آبی آسمان از پراکندگی طول‌موج‌های بنفش (کوتاه) به وسیله ملکول‌های هوا نتیجه می‌شود. پراکندگی ذره‌ای در جو از برهم‌کنش تابش با انواع ذرات معلق در هوا به‌وجود می‌آید. گرد و خاک، مه و قطرات آب همگی انواع مهم مراکز پراکندگی ذره‌ای‌اند. فرآیند پراکندگی اساساً به قطر ذرات در مقایسه با طول‌موج تابش بستگی دارد. حداکثر پراکندگی وقتی صورت می‌گیرد که طول‌موج و قطر ذره مساوی باشد و برای طول‌موج‌های بلندتر به تدریج کاهش می‌یابد. برای طول‌موج‌های کم‌تر از قطر ذره، تابش میل به بازتاب دارد.

پدیده بازتاب در جو برای طول‌موج‌های کوچک‌تر از قطر ذره به وجود می‌آید و نسبتاً به طول‌موج در این ناحیه بستگی ندارد. برای بیان خواص بازتابی سطوح از واژه *آلبِدو*(albedo) یا ضریب بازگشت استفاده می‌کنیم که چنین تعریف می‌شود:

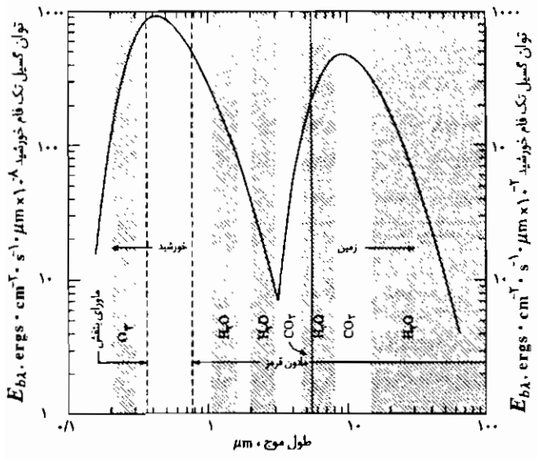
$$A = \text{albedo} = \frac{\text{انرژی بازتابیده}}{\text{انرژی برخورنده}} \qquad (۱۱۷-۸)$$

البدوی سطح به زاویه‌ای که اشعه خورشیدی با سطح می‌سازد بستگی دارد. البدو را می‌توان ضریب بازتاب نامید. ضرایب بازگشت بعضی از سطوح طبیعی در جدول ۸-۵ ارائه شده‌اند.

☑جدول ۸-۵ ضریب بازگشت سطوح طبیعی، طبق مرجع ۳۲

سطح	A ضریب بازگشت
آب	۰/۰۳ – ۰/۴
خاک خشکِ سیاه	۰/۱۴
خاک مرطوبِ سیاه	۰/۰۸
خاک خشکِ خاکستری	۰/۲۵ – ۰/۳۰
خاک مرطوبِ خاکستری	۰/۱۰ – ۰/۱۲
گل رس بیابانی	۰/۲۹ – ۰/۳۱
شن روشن و ریز	۰/۳۷
برف	۰/۴۰ – ۰/۸۵
یخ دریا	۰/۳۶ – ۰/۵۰
گندم بهاری	۰/۱۰ – ۰/۲۵
علف سبز	۰/۲۶
پنبه	۰/۲۰ – ۰/۲۲
کاهو	۰/۲۲
سیب زمینی	۰/۱۹

جَوّ، تابش را کاملاً انتخابی در نوارهای طول‌موج باریک جذب می‌کند. عمل جذب خورشیدی در نوارهای کاملاً متفاوت با جذب تابش از زمین صورت می‌گیرد زیرا طیف‌های دو نوع تابش متفاوتند. در شکل ۸-۶۴ طیف‌های تقریبی تابش خورشیدی و زمینی را با بعضی نوارهای جذبی مهم روی نمودار می‌بینیم. به تفاوت مقیاس روی دو منحنی توجه کنید. بررسی سریع این منحنی‌ها نشان می‌دهد که جو، قسمت اعظم تابش طول‌موج – کوتاه را تراگسیل و قسمت اعظم تابش برگشتی‌از زمین را جذب می‌کند. بنابراین،جو خیلی شبیه گلخانه عمل می‌کند یعنی تابش خورشیدی ورودی را حبس می‌کند تا برای انسان‌های روی زمین انرژی و گرما تأمین کند. بعضی می‌گویند که بشر ممکن است با آلوده‌کردن بیش‌از حد جو، با آلوده‌کننده‌ها، موجودی انرژی زمین را از بین ببرد، چنین امکانی وجود دارد ولی از بحث ما خارج است.



شکل ۸-۶۴ طیف‌های تابش - گرمایی برای خورشید و زمین با نوارهای جذب اولیه با سایه‌دار. به مقیاس‌های مختلف توجه کنید : $۱ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^۲.\text{s}} = ۱ \frac{\text{mW}}{\text{m}^۲}$.

خورتاب‌گیری در لبهٔ بیرونی جو برحسب ثابت خورشیدی E_{bo} چنین بیان می‌شود:

$$I_o = E_{bo} \sin \alpha \qquad (۱۱۸-۸)$$

که α زاویه اشعه با افق است. ثابت خورشیدی برابر است با:

$$E_{bo} = ۴۴۲/۴ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^۲}$$

$$= ۲/۰۰ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^۲.\text{min}} = ۱۳۹۵ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲}$$

مقادیر متوسط تابش خورشیدی برخوردی به صورت تابعی از زاویه ارتفاع خورشیدی در جدول ۸-۶ ارائه شده است.

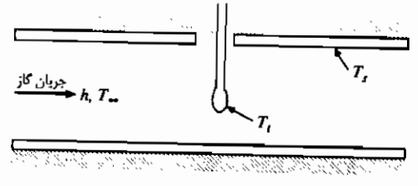
☑جدول ۸-۶ متوسط خورتاب‌گیری خورشیدی (تابش‌دهی) روی سطح افقی در شرایط جوی متوسط، طبق مرجع ۳۳

ارتفاع خورشیدی α،	متوسط خورتاب‌گیری کل	
درجه	$\frac{I_T}{I_h}$	$\frac{W}{m^2}$
۵	۳/۶	۴۱/۹
۱۰	۹/۷	۱۱۲/۸
۱۵	۱۷/۲	۲۰۰/۰
۲۰	۲۵/۰	۲۹۰/۷
۲۵	۳۲/۸	۳۸۱/۴
۳۰	۴۰/۶	۴۷۲/۱
۳۵	۴۷/۷	۵۵۴/۶
۴۰	۵۴/۷	۶۳۶/۰
۴۵	۶۱/۱	۷۱۰/۴
۵۰	۶۷/۲	۷۸۱/۴
۶۰	۷۷/۵	۹۰۱/۱
۷۰	۸۵/۳	۹۹۱/۸
۸۰	۸۹/۷	۱۰۴۳
۹۰	۹۱/۴	۱۰۶۳

❑ ۸-۱۶ اثر تابش بر اندازه‌گیری دما

وقتی دماسنجی را برای اندازه‌گیری دما در جریانِ سیال ـ گاز قرار می‌دهیم دمایی که به‌وسیله المان حس‌کننده نشان داده می‌شود از موازنه انرژی کلی روی المان تعیین می‌شود. المان شکل ۸-۶۵ را در نظر بگیرید. دمای گاز، T_∞ و دمای مؤثر محیط تابش، T_s و دمای دماسنج، T_t است. به فرض T_∞ بزرگ‌تر از T_s باشد. انرژی به طریق جابه‌جایی به دماسنج انتقال یافته، سپس به طریق تابش به محیط اطراف پراکنده می‌شود. بنابراین موازنه انرژی چنین است:

$$hA(T_\infty - T_t) = \sigma A \varepsilon (T_t^4 - T_s^4) \qquad (۱۱۹-۸)$$



شکل ۸-۶۵ المان دماسنج در جریان سیال.

که A مساحت سطح المان و ε ضریب گسیل است. در معادلهٔ (۸-۱۱۹) فرض می‌شود که محیط اطراف خیلی وسیع یا سیاه است تا بتوان برای انتقال گرمای تابشی از معادله (۸-۴۳ الف) استفاده کرد.

با توجه به این موازنه انرژی ملاحظه می‌کنیم که دمای نشان داده شده توسط دماسنج، دمای صحیح گاز نیست بلکه دمای تعادل تابش - جابه‌جایی است. اگر این موازنه انرژی درست انجام نشود، خطای خیلی بزرگی در اندازه‌گیری دما ایجاد می‌شود. اغلب برای کاهش این اشکال از سپرهای تابشی استفاده می‌کنند.

مثال ۸-۲۳ خطای اندازه‌گیری دما به خاطر تابش

دماسنجی جیوه‌ای به $\varepsilon = ۰/۹$ در ساختمانی فلزی آویزان شده، دمای ۲۰°C را نشان می‌دهد. دیوارهای ساختمان عایق ضعیفی شده و دمای آنها ۵°C می‌باشد. مقدار h دماسنج را می‌توان برابر $۸/۳ \frac{W}{m^2 \cdot °C}$ در نظر گرفت. دمای واقعی هوا را حساب کنید.

حل :

برای حل از معادله (۸-۱۱۹) استفاده می‌کنیم:

$$h(T_\infty - T_t) = \sigma \varepsilon (T_t^4 - T_s^4)$$

با جای‌گزینی مقادیر عددی، $T_s = 5°C = 278\,K$ و $T_t = 20°C = 293\,K$ داریم:

$$(۸/۳)(T_\infty - ۲۹۳) = (۵/۶۶۹ \times ۱۰^{-۸})(۰/۹)(۲۹۳^4 - ۲۷۸^4)$$

و:

$$T_\infty = ۳۰۱/۶\,K = ۲۸/۶°C\ [۸۳/۵°F]$$

در این مثال ساده، خطای دماسنج $۸/۶°C\ [۱۵/۵°F]$ است!

❑ ۸-۱۷ ضریب انتقال گرمای تابشی

در بررسی انتقال گرمایی جابه‌جایی در فصول قبل دریافتیم که بهتر است ضریب انتقال گرما را چنین تعریف کنیم:

$$q_{\text{جابه‌جایی}} = h_{\text{جابه‌جایی}} A (T_w - T_\infty)$$

از آنجاکه مسائل انتقال گرمای تابشی اغلب در ارتباط خیلی نزدیک با مسائل جابه‌جایی‌اند و هدف از تحلیل، انتقال گرمای کل به طریق هم جابه‌جایی و هم تابشی است، ارزش دارد که هر دو فرآیند را با تعریف ضریب هدایت گرمای تابشی h_r بر اساس مشترکی قرار دهیم:

$$q_{\text{تابشی}} = h_r A_1 (T_1 - T_2)$$

که T_1 و T_2 دماهای دو جسمی هستند که به طریق تابش مبادله گرما می‌کنند. بنابراین ضریب انتقال گرمای کل برابر مجموع جابه‌جایی و تابش است:

$$q = (h_c + h_r) A_1 (T_w - T_\infty) \qquad (۱۲۰-۸)$$

به شرطی که فرض کنیم سطح دوم مبادله کننده تابش، محفظه‌ای بسته و دمای آن برابر دمای سیال است. مثلاً اتلاف گرمای جابه‌جایی آزاد و تابش از لوله حاوی بخار داغی که از اتاقی عبور

می‌کند از معادله (۸-۱۲۰) حساب می‌شود. در هندبوک‌ها غالباً ضرائب انتقال گرمای "کل" را برای سطوح بسته و روبازی که در شرایط محیطی مختلف واقع است، جدول می‌کنند.

در بسیاری از مواقع ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی خیلی زیاد به دما بستگی ندارد. اما این امر در مورد ضریب انتقال گرمای تابشی صادق نیست. مقدار h_r معادلهٔ (۸-۴۳) را می‌توان چنین حساب کرد:

$$\frac{q}{A_1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = h_r (T_1 - T_2)$$

$$h_r = \frac{\sigma(T_1^4 \times T_2^4)(T_1 + T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \qquad (۱۲۱-۸)$$

مقدار R مربوطه برابر است با:

$$R_{rad} = \frac{1}{h_r}$$

و از آن اغلب در محاسبه انتقال گرمای تابشی در عرض شکاف‌ها در کاربردهای ساختمان استفاده می‌شود. این محاسبات همراه با اطلاعات ارائه‌شده در بخش (۷-۱۱) برای جابه‌جایی آزاد در فضاهای بسته انجام می‌شود. روشن است که ضریب تابش خیلی به دما بستگی دارد.

خواننده به خاطر دارد که برای به‌دست آوردن «مقاومت تابشی» مثال‌های عددی فصول ۳ و ۴ از معادلهٔ (۸-۱۲۱) استفاده کردیم.

☑جدول ۸-۷ خلاصه فرمول‌های تابش

نوع	معادله	شماره‌معادله
انرژی گسیل‌شده توسط جسم سیاه	$E_b = \sigma T^4 \quad \frac{W}{m^2}$	(۸-۳)
رابطه تقابل ضریب شکل تابش اصلی	$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$	(۸-۱۸ الف)
انرژی خالص تلف‌شده توسط سطح خاکستری	$q = \frac{E_b - J}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}} \quad W$	(۸-۲۸)
مبادلهٔ تابشی خالص بین سطح محدب ۱ و محفظه وسیع ۲	$q = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad W$	(۸-۴۳ الف)
معادله توازن تابش برای دمای سطح ثابت سطح iام	$J_{ji}[1 - F_{ii}(1-\varepsilon_i)] - (1-\varepsilon_i)\sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \varepsilon_i E_{bi}$	(۸-۱۱۲ الف)
معادله توازن تابش برای سطح در توازن تابشی یا $\frac{q}{A} = 0$	$J_i(1 - F_{ii}) - \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = 0$	(۸-۱۱۳ الف)
معادلهٔ توازن تابش برای سطح با شار گرمایی مشخص	$J_i(1 - F_{ii}) - \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{A_i}$	(۸-۱۱۵ الف)

❑ ۸-۱۸ خلاصه

در این فصل روش‌های متعددی را برای تحلیل انتقال گرمای تابشی بررسی کردیم. فرض جسم خاکستری، گرچه دقیقاً صحیح نیست، روش خوبی برای محاسبات انتقال گرما است. فرض‌های یکنواختی رادیوسیتی و تابش‌دهی روی سطوح نیز دقیقاً صحیح نیستند، ولی تقریب خوبی را به‌دست می‌دهند که معمولاً در حد دقت خواص سطوح است. در جدول ۸-۷ خلاصه چند فرمول آمده که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ تابش گرمایی چه تفاوتی با سایر انواع تابش الکترومغناطیسی دارد؟
۲ قانون استفان بولتزمن چیست؟
۳ فرق بین سطوح آیینه‌ای و پخشنده چیست؟
۴ شدت تابش را تعریف کنید.
۵ شدت کیرشهف چیست؟ چه موقع اعمال می‌شود؟
۶ جسم خاکستری چیست؟
۷ منظور از ضریب شکل در تابش چیست؟
۸ تابش‌دهی و رادیوسیتی را تعریف کنید؟
۹ قانون بیر چیست؟
۱۰ چرا سطوح، تابش خورشیدی و مقید به زمین را به‌طور متفاوت جذب می‌کنند؟
۱۱ اثر گلخانه‌ای را توضیح دهید.
۱۲ چرا آسمان آبی است؟
۱۳ ضریب بازگشت را تعریف کنید.
۱۴ منظور از اثر گلخانه‌ای جوی چیست؟

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۸-۱ تراگسیل و جذب در ورق شیشه‌ای
۸-۲ انتقال گرما بین سطوح سیاه
۸-۳ جبر ضریب شکل برای دو سر باز استوانه‌ها
۸-۴ جبر ضریب شکل برای مخروط ناقص
۸-۵ جبر ضریب شکل برای بازتابنده استوانه‌ای
۸-۶ صفحات گرم محصور در اتاق
۸-۷ سطح در توازن تابشی
۸-۸ نیم کره باز در اتاق
۸-۹ کاهش انتقال گرما با سپر صفحه موازی
۸-۱۰ سپر استوانه‌ای باز در اتاق بزرگ
۸-۱۱ تابش گاز در کوره
۸-۱۲ مبادله تابشی با گاز بین صفحات سیاه
۸-۱۳ شبکه برای تابش گاز بین صفحات موازی
۸-۱۴ سیستم تراگسیلنده و بازتابنده برای سوراخ در کوره

۸-۱۵ راه‌حل عددی برای محفظه

۸-۱۶ راه‌حل‌های عددی برای صفحات موازی

۸-۱۷ تابش از سوراخ با رادیوسیتی متغیر

۸-۱۸ گرم‌کن با شار گرمایی ثابت و سپرهای احاطه کننده

۸-۱۹ راه‌حل عددی برای ترکیب جابه‌جایی و تابش (سیستم غیرخطی)

۸-۲۰ دماهای تعادل محیط - خورشیدی

۸-۲۱ اتر جابه‌جایی بر دماهای تعادل خورشیدی

۸-۲۲ کلکتور خورشیدی صفحه تخت

۸-۲۳ خطاهای اندازه‌گیری دما به خاطر تابش

❑ مسائل

۸-۱ کوارتز هم‌جوشیده ۹۰٪ تابش گرمایی فرودی را بین ۰/۲ تا ۴μm تراگسیل می‌کند. به فرض منبعی گرمایی را از طریق پنجره‌ای کوارتزی نگاه می‌کنیم از طریق این ماده چه مقدار شار گرمایی برحسب وات از منبع تابشی جسم سیاه به دمای (الف) ۸۰۰°C، (ب) ۵۵۰°C، (پ) ۲۵۰°C و (ت) ۷۰°C تراگسیل می‌شود؟

۸-۲ مسألهٔ ۸-۱ را برای یاقوت کبود ترکیبی تکرار کنید. که ضریب تراگسیل آن بین ۰/۲ و ۵/۵μm برابر ۰/۸۵ است.

۸-۳ مسأله ۸-۱ را برای یدید سزیم تکرار کنید که ضریب تراگسیل تقریبی آن بین ۰/۳ و ۵۲μm برابر ۰/۹۲ است.

۸-۴ انرژی گسیل‌شده بین ۴ و ۱۵μm توسط جسم خاکستری در ۱۰۰°F با $\varepsilon = 0/6$ را حساب کنید.

۸-۵ دمای کوره‌ای با دیواره داخلی سیاه ۱۱۰۰°C است. سوراخی در دیواره این کوره با شیشه پنجره به خواص زیر پوشانده شده است:

$0 < \mu < 3\mu m$: $\tau = 0/8$ $\varepsilon = 0/2$ $\rho = 0$

$3\mu m < \lambda < \infty$: $\tau = 0$ $\varepsilon = 0/8$ $\rho = 0/2$

به فرض رفتار پخشنده است. تابش تلف‌شده از پنجره به اتاق بزرگ به دمای ۲۵°C را حساب کنید.

۸-۶ سطحی معینی دارای خواص جذب زیر است:

$\alpha_\lambda = 0/05$ $0 < \lambda < 1/2\mu m$

$\alpha_\lambda = 0/5$ $1/2 < \lambda < 3\mu m$

$\alpha_\lambda = 0/4$ $3 < \lambda < 6\mu m$

$\alpha_\lambda = 0/2$ $6 < \lambda < 20\mu m$

$\alpha_\lambda = 0$ $20 < \lambda < \infty \mu m$

ضریب جذب کل این سطح را چنان‌چه به آن تابش جسم سیاه در (الف) ۳۰۰K، (ب) ۵۰۰K، (پ) ۱۰۰۰K، (ت) ۲۰۰۰K و (ث) ۵۰۰۰K بتابد، حساب کنید.

۸-۷ به فرض تابش خورشیدی مشابه جسم سیاه در ۵۷۹۵K باشد، کسر انرژی را در نوارهای طول‌موج: (الف) ۰ تا ۰/۲μm، (ب) ۰/۲ تا ۰/۴μm، (پ) ۰/۴ تا ۱/۰μm، (ت) ۱ تا ۲/۰μm و (ث) بیش از ۲μm حساب کنید.

۸-۸ فیلم‌های رنگی عکاسی برای حساسیت‌های طول‌موج خاص نظیر «نور روز» و «نور فروزان داخل» طراحی شده‌است . لامپ نور فروزان تقریباً مثل جسم سیاه در ۳۲۰۰K تابش می‌کند، در حالی که نور روز تقریباً مثل جسم سیاه در ۵۸۰۰K تابش می‌کند. چنان‌چه فیلمی را در منبع نوری غیر از آنچه برایش ذکر شده قرار دهیم، مثلاً فیلم مربوط به نور روز رادر نور داخل، محاسبات مربوطه را انجام‌داده، در مورد نتایج نظر بدهید.

۸-۹ دمای سطح سیاهی ۸۰۰°C است. کسری از انرژی کل را بیابید که بین (الف) ۱ و ۲μm، (ب) ۲ و ۳μm، (پ) ۳ و ۴μm و (ت) ۵ و ۶μm گسیل می‌شود.

۸-۱۰ دمای منبع تابش سیاهی ۱۱۰۰°C است. طول‌موج بالاتر را برحسب میکرومتر برای گسیل‌هایی به میزان (الف) ۲۵، (ب) ۵۰؛ (پ) ۷۵ و (ت) ۹۸ درصدتابش کل، حساب کنید.

۸-۱۱ دمای سطح معینی ۱۶۰۰K است و مشخصات گسیل آیینه‌ای زیر را دارد:

$\varepsilon_\lambda = 0/08$ $0 < \lambda < 0/6\mu m$

$\varepsilon_\lambda = 0/4$ $0/6 < \lambda < 5\mu m$

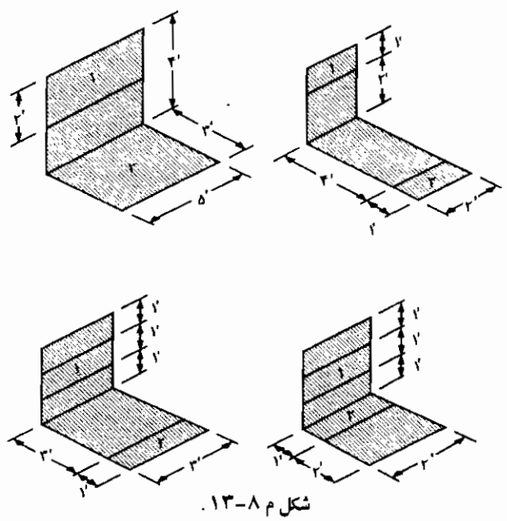
$\varepsilon_\lambda = 0/7$ $5 < \lambda < \infty \mu m$

توان گسیل این سطح را بیابید.

۸-۱۲ سطحی دارای مشخصات گسیلی روی شکل است. توان گسیل سطح به دمای ۲۰۰۰K را بیابید.

شکل م ۸-۱۲.

۸-۱۳ ضریب شکل تابشی F_{1-2} وضعیت‌های نشان داده شده را بیابید.



شکل م ۸-۱۳.

۸-۱۴ دو دیسک هم‌مرکز موازی با $d_1 = 10cm$ و $d_2 = 5 cm$ و به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم قرار دارند. F_{12} و F_{21} را معین کنید.

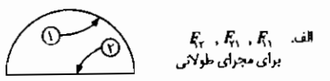
۸-۱۵ دیسکی به قطر ۱۰ cm در مرکز و موازی نیم‌کره‌ای به قطر ۲۵ cm قرار داده می‌شود. کره را به صورت سطح ۱، دیسک را سطح ۲ و اتاق بزرگ محیط را سطح ۳ مشخص می‌کنیم. تمام ضرایب شکل را حساب کنید.

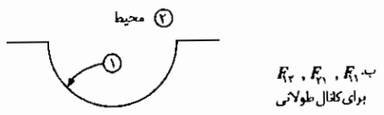
۸-۱۶ دو استوانهٔ هم‌مرکز دارای قطرهای ۱۵ و ۲۵ cm و طول ۷cm هستند. ضریب شکل برای این وضعیت راحساب کنید.

۸-۱۷ دو صفحهٔ مربعی موازی به ضلع ۳۰ cm به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم و به صورت لبهٔ صفحهٔ پایینی در وسط لبه‌های صفحهٔ بالایی قرار دارد. ضریب شکل برای این وضعیت را حساب کنید.

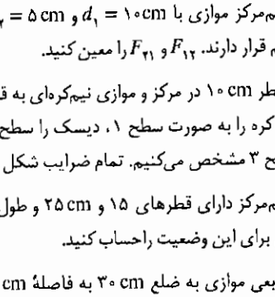
۸-۱۸ دو دیسک موازی به قطر ۵۰ cm به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم قرار دارند و در مرکز یکی از آنها سوراخی به قطر ۲۰ cm در آورده شده است. ضریب شکل از این دیسک به دیسک بدون سوراخ را بیابید.

۸-۱۹ ضرایب شکل اشکال زیر را تعیین کنید.

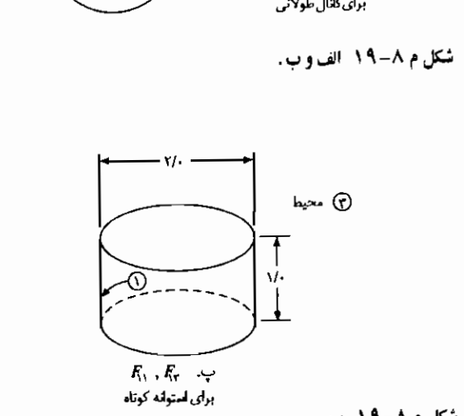




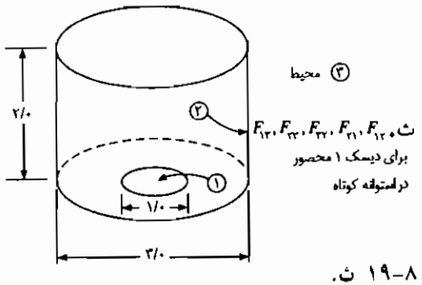
شکل م ۸-۱۹ الف و ب.



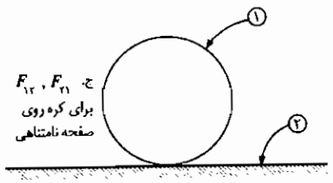
شکل م ۸-۱۹ پ.



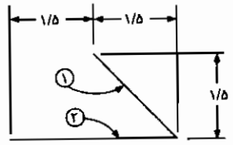
شکل م ۸-۱۹ ت.



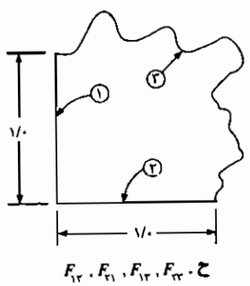
شکل م ۸-۱۹ ث.



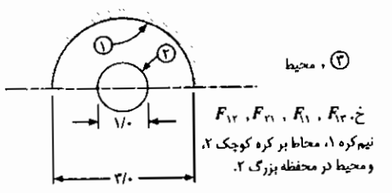
شکل م ۸-۱۹ ج.



شکل م ۸-۱۹ چ.



شکل م ۸-۱۹ ح.



شکل م ۸-۱۹ خ.

۸-۲۰ ضرایب شکل محفظه مکعبی را حساب کنید.

۸-۲۱ وجوه جانبی چهار وجهی منتظمی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است. تمام ضرایب شکل را حساب کنید.

۸-۲۲ دمای دیوار اتاقی به ابعاد $۳\times۳\times۳$ متر برابر $۲۶۰^\circ C$ و دمای کف آن $۹۰^\circ C$ می‌باشد. چهار سطح دیگر کاملاً عایق‌شده‌اند. به فرض تمام سطوح سیاه باشند. انتقال گرمای خالص بین دیوار گرم و کف خنک را بیابید.

۸-۲۳ دو صفحه موازی کاملاً سیاه به ابعاد $۱/۲\times۱/۲\ m$ به فاصلهٔ $۱/۲\ m$ از هم قرار دارند. دمای یک صفحه $۸۰۰\ K$ و دمای دیگری $۵۰۰\ K$ است. این دو صفحه در اتاق بزرگی قرار دارد که دمای دیوارهایش $۳۰۰\ K$ است. انتقال گرمای خالص بین دو صفحه چه‌قدر است؟

۸-۲۴ دو دیسک موازی به قطر $۶۰\ cm$ به فاصله $۱۵\ cm$ از هم در اتاق بزرگی به دمای $۳۰^\circ C$ کاملاً محصور شده‌اند. خواص سطوح عبارتند از $T_1 = ۵۴۰^\circ C$ و $\varepsilon_1 = ۰/۷$ و $T_2 = ۳۰۰^\circ C$ و $\varepsilon_2 = ۰/۵$. انتقال گرمای تابشی با هر سطح چه‌قدر است؟ (مبادلهٔ طرف پشت را در نظر نگیرید و فقط مبادله سطوح روبه‌رو به یکدیگر را به حساب آورید.)

۸-۲۵ مسألهٔ ۸-۲۴ را برای حالتی تکرار کنید که دیسک ۲ ($\varepsilon_2 = ۰/۵$ و $T_2 = ۳۰۰^\circ C$) کاملاً بازتابنده آیینه‌ای باشد.

۸-۲۶ به کف اتاقی به ابعاد $۳\times۳\ m$ تا $۳۰۰\ K$ گرما داده شده و دمای سقف آن $۲۹۰\ K$ است. به فرض دیوارها کاملاً عایق‌شده باشند. ارتفاع اتاق $۲/۵\ m$ است. ضریب گسیل تمام سطوح $۰/۸$ است. با استفاده از روش شبکه‌ای مبادلهٔ خالص بین کف و سقف و دمای دیوار را بیابید.

۸-۲۷ می‌خواهیم از سفینه‌ای به سفینهٔ دیگری انرژی تراگسیل کنیم. برای انجام این منظور روی هر سفینه صفحه‌ای مربعی به ضلع $۱/۵\ m$ موجود است. سفاین طوری راهبری می‌شود که صفحات موازی و فاصلهٔ آنها $۳۰\ cm$ باشد. دمای یک صفحه $۸۰۰^\circ C$ و دمای دیگری $۲۸۰^\circ C$ است. ضرایب گسیل به ترتیب $۰/۵$ و $۰/۸$ است. پیدا کنید: (الف) گرمای خالص انتقال یافته بین دو سفینه را بر حسب وات و (ب) کل گرمای تلف‌شده توسط صفحهٔ گرم را برحسب وات. فضای بیرون را جسمی سیاه به دمای $۰\ K$ فرض کنید.

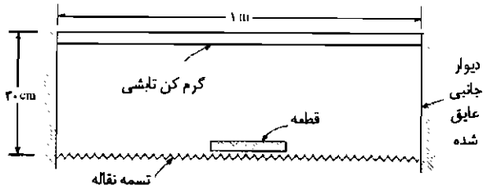
۸-۲۸ دو صفحهٔ موازی به ابعاد $۶۰\times۹۰\ cm$ به فاصلهٔ $۶۰\ cm$ از هم قرار دارند. دمای یک صفحه $۸۰۰\ K$ و ضریب گسیل آن $۰/۶$ است. صفحهٔ دیگر عایق‌شده است. این دو صفحه در اتاق بزرگی قرار گرفته‌اند که دمایش $۲۹۰\ K$ است. دمای صفحهٔ عایق‌شده و انرژی تلف‌شده توسط صفحهٔ گرما‌دیده را حساب کنید.

۸-۲۹ لوله‌ای بلند به قطر $۵\ cm$ از اتاقی عبور کرده، در معرض هوایی به فشار جو و دمای $۲۰^\circ C$ قرار می‌گیرد. دمای سطح لوله $۹۳^\circ C$ است. به فرض ضریب گسیل لوله $۰/۶$ باشد گرمای تابشی از دست‌رفته از فوت طول لوله را بیابید.

۸-۳۰ دمای صفحه‌ای عمودی به ارتفاع $۶۰\ cm$ و عرض $۳۰\ cm$ برابر $۹۵^\circ C$ است و در اتاقی به دمای $۲۰^\circ C$ و فشار $۱\ atm$ قرار دارد. دیوارهای اتاق نیز به دمای $۲۰^\circ C$ اند. به فرض برای این صفحه $\varepsilon = ۰/۸$ است. از این صفحه چه‌قدر گرمای تابشی از دست می‌رود؟

۸-۳۱ لوله‌ای افقی به طول $۶\ m$ و قطر $۱۲/۵\ cm$ به دمای $۱۵۰^\circ C$ در اتاق بزرگی به دمای هوای $۲۰^\circ C$ و فشار $۱\ atm$ قرار دارد. دمای دیوارهای اتاق $۳۸^\circ C$ است. به فرض برای این لوله $\varepsilon = ۰/۷$ است. چه‌قدر گرما از این لوله به طریق جابه‌جایی و تابش از دست می‌رود؟

۸-۳۲ یک بخاری دارای گرم‌کنی تابشی برای خشک کردن قطعات فلزی رنگ شده روی تسمه نقاله‌ای متحرک مطابق شکل طرح شده است. طول قسمت گرمایش $۳\ m$ و دمای گرم‌کن $۴۲۵^\circ C$ است. دیوارهای جانبی عایق است و تجربه نشان داده که دمای تسمه نقاله و قطعات $۱۲۰^\circ C$ می‌شود. ترکیب قطعه - تسمه دارای ضریب گسیل مؤثر $۰/۸$ و سطح گرم‌کن - تابشی دارای $\varepsilon = ۰/۷$ است. انرژی داده شده به گرم‌کن را حساب کنید. تابشی را که از دو سر کانال از دست می‌رود حتماً در نظر بگیرید. محیط را مثل جسمی سیاه به دمای $۲۵^\circ C$ در نظر بگیرید.



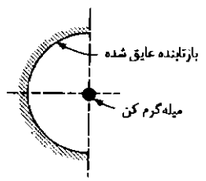
شکل م ۸-۳۲.

۸-۳۳ قاعده بالایی منخروط ناقص مثال ۸-۴ دارای $T_1 = ۱۲۰۰\ K$ و $\varepsilon_1 = ۰/۷۵$ است. سطح جانبی، عایق و دارای $\varepsilon = ۰/۳$ است. کف آن باز و در معرض اتاق بزرگی به دمای $۲۰^\circ C$ است. دمای سطح جانبی و گرمای داده شده به اتاق را حساب کنید.

۸-۳۴ دو استوانه هم‌مرکز به طول $۳۰\ cm$ موجود است. قطر استوانهٔ داخلی $۸/۰\ cm$ است. قطر استوانهٔ بیرونی چه‌قدر باشد تا $F_{12} = ۰/۸$ شود در حالی که استوانهٔ داخلی را سطح ۱ گرفته‌ایم.

۸-۳۵ سطح کف کوره‌ای استوانه‌ای المانی برقی دارد که شار گرمایی $۷\frac{kW}{m^2}$ را در قطر $۷۵\ cm$ تولید می‌کند. دیوارهای جانبی به ارتفاع $۵۰\ cm$ است و می‌توان آنها را غیر هادی و دوباره تابنده در نظر گرفت. کف دارای $\varepsilon = ۰/۸$ است. سقف کوره دارای سطحی به $\varepsilon = ۰/۶$ به دمای $۴۰۰\ K$ است. دمای کف و سطوح جانبی را معین کنید.

۸-۳۶ دمای گرم‌کنی میله‌ای بلند به $\varepsilon = ۰/۸$ برابر $۹۸۰^\circ C$ است و آن را در نزدیکی بازتابنده‌ای نیم استوانه مطابق شکل قرار داده‌اند. قطر میله $۷/۵\ cm$ و قطر بازتابنده $۵۰\ cm$ است. بازتابنده عایق‌شده و ترکیب گرم‌کن - بازتابنده را در اتاق بزرگی به دمای دیواره $۱۵^\circ C$ قرار داده‌اند. اتلاف گرمای تابنده را به ازای واحد طول میلهٔ گرم‌کن حساب کنید. این اتلاف را با انرژی تابیده از میله بدون باز تابنده مقایسه کنید.



شکل م ۸-۳۶.

۸-۳۷ یک سوراخ مخروطی در بلوکی فلزی به ضریب گسیل $۰/۵$ تعبیه شده است. قطر سوراخ در سطح بلوک $۲/۵\ cm$ و عمق آن $۵\ cm$ است. اگر این بلوک را تا $۸۰۰\ K$ گرم کنیم تابش گسیل‌شده از سوراخ را حساب کنید. مقدار ضریب گسیل ظاهری سوراخ را حساب کنید که به‌صورت نسبت انرژی واقعی گسیل‌شده از سوراخ به انرژی گسیل‌شده از سطح سیاه هم مساحت با سوراخ و دمایی برابر دمای سطوح داخلی، تعریف می‌شود.

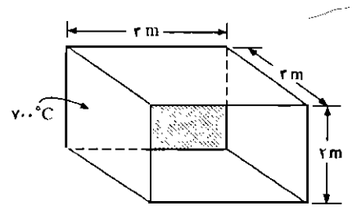
۸-۳۸ در صفحه‌ای فولادی به ضخامت $۷/۵\ cm$ سوراخی به قطر $۲/۵\ cm$ کنده شده است. دمای صفحه $۵۵۰\ K$ است. سوراخ اُستری از فویل نازک به ضریب گسیل $۰/۰۷$ دارد. سطحی گرم به دمای $۷۰۰\ K$ و ضریب گسیل $۰/۵$ را روی سوراخ و در یک طرف قرار می‌دهند و طرف دیگر سوراخ باز می‌ماند. سطح $۷۰۰\ ^\circ K$ تا جایی که مسأله هدایت مورد نظر است از این صفحه عایق‌شده‌است. انرژی گسیلی از سوراخ باز را حساب کنید.

۸-۳۹ سوراخی استوانه‌ای به عمق x و قطر d در بلوکی فلزی به ضریب گسیل ε کنده شده است. با استفاده از تعریف ارائه شده در مسألهٔ ۸-۳۲، ضریب گسیل ظاهری سوراخ را به صورت تابعی از $\frac{x}{d}$ و ε رسم کنید.

۸-۴۰ سوراخی استوانه‌ای به قطر d در صفحه‌ای فلزی به ضخامت x تعبیه شده است. به فرض تابش گسیلی از سوراخ در هر طرف صفحه تنها به علت دمای صفحه باشد، ضریب گسیل ظاهری سوراخ را بر حسب تابعی از $\frac{x}{d}$ و ضریب گسیل جنس صفحه ε رسم کنید.

۸-۴۱ دمای استوانه‌ای به قطر $۱\ m$ و ارتفاع $۱\ m$ برابر $۸۰۰\ K$ و ضریب گسیل آن $۰/۶۵$ است. استوانهٔ دیگری به قطر $۲\ m$ و ارتفاع $۱\ m$ استوانهٔ اول را احاطه کرده؛ کاملاً عایق‌شده است. هر دو استوانه در اتاق بزرگی به دمای $۳۰۰\ K$ قرار گرفته‌اند. گرمای تلف‌شده از استوانهٔ داخلی را حساب کنید.

۸-۴۲ صفحهٔ گرمی به دمای $T = ۷۰۰^\circ C$ و ضریب گسیل $۰/۸$ مطابق شکل قرار گرفته‌است. ابعاد صفحه $۲\ m\times۳\ m$ است و دیوارهایی به ارتفاع $۲\ m$ در هر ضلع آن قرار داده شده است و تمام دیوارها عایق‌اند. کل این مجموعه در اتاق بزرگی به دمای $۳۰^\circ C$ قرار دارد. شبکه‌ای برای این مسأله با فرض آن‌که چهار دیوار به صورت یک سطح (عایق‌شده) عمل کنند، بکشید و سپس مقدار انتقال گرما به اتاق بزرگ را حساب کنید.



شکل م ۸-۴۲.

۸-۴۳ کره‌ای به قطر $۳/۰\ cm$ و دمای $۹۰۰^\circ C$ دارای ضریب گسیل $۰/۶$ است و در کره دیگری به قطر $۹/۰\ cm$ و ضریب گسیل $۰/۳$ (داخل و خارج) احاطه شده است. هر دو کره در اتاق بزرگی به دمای $۳۰^\circ C$ قرار گرفته‌اند. گرمای تلف‌شده از کرهٔ کوچک را حساب کنید.

۸-۴۴ دو صفحه به ابعاد $۶۰\times۶۰\ cm$ عمود بر هم با یالی مشترک در اتاق بزرگی به دمای $۳۰^\circ C$ قرار می‌گیرند. دمای یک صفحه $T = ۶۰۰^\circ C$ و ضریب گسیل آن $۰/۶۵$ است و صفحهٔ دیگر عایق‌شده و ضریب گسیل آن $۰/۴۵$ است. دمای صفحهٔ عایق‌شده و گرمای تلف‌شده از صفحه به دمای $۶۰۰^\circ C$ را حساب کنید.

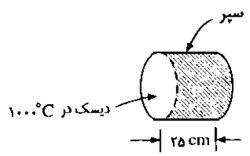
۸-۴۵ دو استوانهٔ هم‌مرکز به قطرهای $۱۰\ cm$ و $۲۰\ cm$ در اتاق بزرگی به دمای $۳۰^\circ C$ قرار گرفته‌اند. ارتفاع استوانه‌ها $۱۰\ cm$ و دمای استوانهٔ داخلی $۷۰۰^\circ C$ و ضریب گسیل آن $۰/۶$ است. استوانه بیرونی کاملاً عایق‌شده، ضریب گسیل آن $۰/۷$ است. گرمای تلف‌شده از استوانهٔ داخلی را حساب کنید.

۸-۴۶ دمای سقف اتاقی مربعی به ضلع $۵\ m$ برابر $۲۸^\circ C$ و دمای کف آن $۲۰^\circ C$ است. ارتفاع دیوارهای اتاق $۴\ m$ و کاملاً عایق‌شده‌اند. ضریب گسیل سقف $۰/۶۲$ و ضریب گسیل کف $۰/۷۵$ است. مقدار انتقال گرما از سقف به کف و دمای دیوارها را حساب کنید.

۸-۴۷ دمای داخلی نیم استوانه‌ای برابر $۱۰۰۰\ K$ است و در اتاق بزرگی احاطه شده است. ضریب گسیل سطح $۰/۷$ است. قطر نیم استوانه $۵۰\ cm$ است و ارتفاع آن را می‌توان خیلی بلند فرض کرد. قسمت پشت استوانه عایق‌شده است. اتلاف گرمای واحد طول را در صورتی حساب کنید که دمای اتاق $۳۰۰\ K$ باشد.

۸-۴۸ دو دیسک موازی به قطر $۵۰\ cm$ و به فاصله $۱۲/۵\ cm$ از هم در اتاقی به دمای $۳۰۰\ K$ قرار دارند. دمای یک دیسک $۱۰۰۰\ K$ و دمای دیگری $۵۰۰\ K$ است. ضریب گسیل هر دو دیسک $۰/۸$ است. آهنگ انتقال گرمای هر دیسک را حساب کنید.

۸-۴۹ دمای دیسکی به قطر $۵۰\ cm$ برابر $۱۰۰۰^\circ C$ و ضریب گسیل آن $۰/۵۵$ است. بعد از دیسک، مطابق شکل، یک سپر تابشی به ضریب گسیل $۰/۱$ قرار دارد. مجموعه را در اتاق بزرگی به دمای $۳۰^\circ C$ قرار می‌دهیم. اتلاف گرما از دیسک و دمای سپر را به‌دست آورید.



شکل م ۸-۴۹.

۸-۵۰ دو استوانهٔ هم‌مرکز دارای خواص $T_1 = ۵۰۰^\circ C$، $\varepsilon_1 = ۰/۶$، $d_1 = ۲۰\ cm$ و $T_2 = ۱۰۰^\circ C$، $\varepsilon_2 = ۰/۷$، $d_2 = ۴۰\ cm$ هستند. هر دو استوانه در اتاق بزرگی به دمای $۲۰^\circ C$ احاطه شده‌اند. طول استوانه چه‌قدر باشد تا بتوان از معادلهٔ (۸-۴۳) برای محاسبهٔ انتقال گرما با خطایی کم‌تر از ۱۰ درصد استفاده کرد؟

۸-۵۱ صفحه‌ای به ابعاد $۳۰\times۳۰\ cm$ و ضریب گسیل $۰/۵$ به یک طرف سفینه‌ای وصل و کاملاً از داخل سفینه عایق‌شده است. به فرض فضای بیرون جسم سیاهی به دمای $۰\ K$ باشد دمای تعادل را برای این صفحه

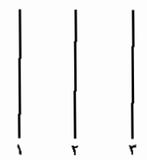
در نقطه‌ای از فضا معین کنید که شار گرمایی تابشی خورشید $1500 \frac{W}{m^2}$ است. فرض کنید که رفتار جسم خاکستری وجود دارد.

۸-۵۲ قمری مصنوعی به قطر ۱ m در ارتفاع ۴۰۰ km از سطح زمین به دور آن می‌چرخد. به فرض قطر زمین ۱۲/۹ Mm باشد و سطح بیرونی قمر از جنس آلومینیم صیقلی باشد دمای تعادل تابشی آن را وقتی حساب کنید که در قسمت «تاریک» زمین قرار گرفته است. زمین را مثل جسم سیاهی به دمای ۱۵°C و فضای بیرون را مثل جسم سیاهی به دمای ۰ K در نظر بگیرید. ضریب شکل هندسی از قمر به زمین را می‌توان به صورت نسبت زاویهٔ فضایی مقابل به زمین به کل زاویهٔ فضایی تابش از قمر در نظر گرفت. وقتی قمر در طرف «روشن» زمین است با شار گرمایی تقریباً $1400 \frac{W}{m^2}$ از خورشید تابش می‌بیند. دمای تعادل قمر را در این شرایط، با فرض رفتار جسم خاکستری، مجدداً حساب کنید. فرض کنید که قمر، تابش خورشید را به صورت دیسک می‌گیرد و آن‌را به صورت کره به فضا می‌تاباند.

۸-۵۳ دو صفحهٔ عمودی 30×30 cm به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم و در هوای اتاق به دمای ۲۰°C قرار دارند. دمای یکی از صفحات ۱۵۰°C و دمای دیگری از معادلهٔ انرژی تابشی و جابه‌جایی آن با صفحه ۱۵۰°C و محیط اطراف معلوم می‌شود. هر دو صفحه دارای $\varepsilon = 0/8$ اند. با استفاده از روابط جابه‌جایی آزاد تقریبی فصل ۷، دمای صفحهٔ دیگر را حساب کنید.

۸-۵۴ میله‌ای گرم از سفینه‌ای بیرون آمده، به طریق تابشی گرما به فضای بیرون می‌دهد. به فرض ضریب گسیل میله ε باشد و هیچ بخشی از تابش انتشاری از میله بازتاب نشود، یک معادلهٔ دیفرانسیل برای توزیع دما در میله به‌دست آورید. شرایط مرزی‌ای را معین کنید که این معادلهٔ دیفرانسیل باید برآورَد. طول میله L، مساحت سطح مقطع A، محیط آن P و دمای پایه‌اش T_0 است. فرض کنید که فضای بیرون، جسم سیاهی به دمای ۰ K است.

۸-۵۵ سه صفحهٔ موازی نامحدود مطابق شکل آرایش یافته‌اند. دمای صفحهٔ ۱ برابر ۱۲۰۰ K و دمای صفحهٔ ۳ برابر ۳۰۰ K است و $\varepsilon_1 = 0/2$، $\varepsilon_2 = 0/5$ و $\varepsilon_3 = 0/8$ است. صفحهٔ ۲ هیچ گرمایی از منابع خارجی دریافت نمی‌کند. دمای صفحه ۲ چه‌قدر است؟



شکل م ۸-۵۵.

۸-۵۶ دمای دو صفحهٔ بزرگ موازی به ضرایب گسیل ۰/۳ و ۰/۵ به ترتیب ۸۰۰ و ۴۰۰ K است. سپری تابشی به ضریب ۰/۰۵ در دو جانب، میان این دو صفحه قرار دارد. مطلوب است (الف) آهنگ انتقال گرمای واحد سطح را اگر این سپر وجود نداشته باشد، (ب) آهنگ انتقال گرمای واحد سطح با وجود سپر و (پ) دمای سپر.

۸-۵۷ دو صفحه موازی به ابعاد $1/2 \times 1/2$ m به فاصلهٔ 1/2 m از هم قرار دارند. ضریب گسیل این صفحات ۰/۴ و ۰/۶ و دمای آنها به ترتیب برابر ۷۶۰ و ۳۰۰°C است. سپری تابشی به ابعاد $1/2 \times 1/2$ m به ضریب گسیل ۰/۰۵ در دو طرف را بین دو صفحه و به فاصلهٔ مساوی از هر دو قرار می‌دهند. کل سیستم را در اتاق بزرگی به دمای ۴۰°C قرار می‌دهند. (الف) آهنگ انتقال گرما از هر صفحه را اگر این سپر نباشد، (ب) آهنگ انتقال گرما از هر صفحه را با وجود سپر و (پ) دمای سپر را حساب کنید.

۸-۵۸ دمای یک گرم‌کن استوانه‌ای بلند به قطر 2/5 cm برابر ۶۵۰°C و ضریب گسیل سطح آن ۰/۸ است. این گرم‌کن در اتاق بزرگی با دمای دیواره ۲۵°C قرار دارد. انتقال گرمای تابشی از گرم‌کن چه‌قدر کم می‌شود اگر با سپری تابشی به قطر 30 cm از جنس آلومینیم به ضریب گسیل ۰/۲ احاطه شود؟ دمای سپر چه‌قدر است؟

۸-۵۹ قطر دو استوانه هم‌مرکز بلند ۴ و 8 cm است. دمای استوانهٔ داخلی ۸۰۰°C و دمای استوانهٔ خارجی ۱۰۰°C است. ضرایب گسیل داخلی و خارجی به ترتیب ۰/۸ و ۰/۴ است. اگر بین دو استوانه یک سپر تابشی استوانه‌ای به قطر 6 cm و ضریب گسیل ۰/۳ قرار داده شود مقدار انتقال گرما چند درصد کاهش خواهد یافت.

۸-۶۰ دو استوانهٔ هم‌مرکز با طول متناهی را در اتاق بزرگی به دمای ۲۰°C قرار می‌دهند. قطر استوانهٔ داخلی 5 cm و قطر استوانهٔ خارجی 10 cm است، ارتفاع استوانه‌ها 10 cm است. جنس استوانهٔ داخلی از چدن تازه تراشیده و دمایش ۴۰۰°C است. جنس استوانهٔ خارجی از فلز مونل اکسید شده در ۱۱۱۰°F است. گرمای تلف‌شده از استوانهٔ داخلی را حساب کنید.

۸-۶۱ فضایی حلقوی را با گازی پرکرده‌اند که ضریب گسیل و تراگسیل آن به ترتیب ۰/۳ و ۰/۷ است. قطرهای داخلی و خارجی این فضای حلقوی ۳۰ و 60 cm و ضرایب گسیل سطوح به ترتیب ۰/۵ و ۰/۳ است. دمای سطح داخلی ۷۶۰°C است در حالی که دمای سطح بیرونی ۳۷۰°C می‌باشد. انتقال گرمای خالص واحد طول را از سطح گرم به سطح سردتر حساب کنید. دمای گاز چه‌قدر است؟ از انتقال گرمای جابه‌جایی صرف‌نظر کنید.

۸-۶۲ برای شرایط مسأله ۸-۶۱، انتقال گرمای خالص واحد طول حلقه را به صورت تابعی از ضریب گسیل گاز رسم کنید. فرض کنید که $\varepsilon_m + \tau_m = 1$ است.

۸-۶۳ مسأله ۸-۶۱ را برای دو صفحه موازی نامحدود با همان دماها و ضرایب گسیل تکرار کنید. آهنگ انتقال گرمای واحد سطح صفحات موازی را حساب کنید.

۸-۶۴ گاز مسأله ۸-۶۱ را در فضای حلقوی با سرعت $0/6 \frac{m}{s}$ به جریان می‌اندازد و دمای آن در ۱۱۰۰°C نگه‌داشته می‌شود. خواص این گاز عبارت‌است از:

$$\rho = 1/6 \frac{kg}{m^3} \qquad c_p = 1/67 \frac{kJ}{kg.°C}$$

$$\mu = 5/4 \times 10^{-5} \frac{kg}{m.s} \qquad k = 0/11 \frac{W}{m.°C}$$

همان دماها و ضرایب گسیل سطوح مسأله ۸-۶۱ را در نظر گرفته و گرمایش یا سرمایش مورد نیاز برای نگه‌داشتن سطوح داخلی و خارجی در این دماها را حساب کنید. فرض کنید که بتوان ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی را با معادلهٔ دیتوس - بولتر (۶-۴) ارزیابی کرد.

۸-۶۵ دو استوانهٔ هم‌مرکز بلند دارای $T_1 = 900K$، $\varepsilon_1 = 0/4$ و $d_1 = 5$ cm و $T_2 = 400$ K، $\varepsilon_2 = 0/6$ و $d_2 = 10$ cm است. فاصلهٔ آنها را گازی به $\varepsilon_g = 0/15$ و $\tau_g = 0/85$ پر کرده است. آهنگ انتقال گرمای بین دو استوانه و دمای گاز را با استفاده از روش شبکه - تابشی حساب کنید.

۸-۶۶ دیوارهای داخلی یک کورهٔ مکعبی سیاه و یک ضلع آن 70 cm است. گاز داخل کوره به صورت ۱۵ درصد حجمی Co_2 و ۸۵ درصد N_2 در فشار کل 1 atm است. دمای گاز ۱۶۰۰ K و دمای دیوارهای کوره با فرآیند سرمایش مناسبی در ۲۵۰°C نگه‌داشته می‌شود. بار سرمایی مورد نیاز چه‌قدر است؟

۸-۶۷ دو صفحه سیاه موازی به فاصله 50 cm از هم قرار دارند و دمای آنها ۲۵۰ و ۶۰۰°C است. بین دو صفحه یک مخلوط گازی به صورت ۱۵ درصد حجمی Co_2 و ۲۰ درصد حجمی بخار آب و ۶۵ درصد حجمی N_2 در فشار کل 2/5 atm قرار دارد. دمای گاز ۱۴۰۰ K است. مبادلهٔ گرما با هر صفحه را به ازای واحد سطح حساب کنید. انتقال گرما در حالت بدون گاز چه‌قدر است؟

۸-۶۸ کوره‌ای استوانه‌ای به ارتفاع و قطر 80 cm و ضریب گسیل سطح ۰/۸۵ است. گاز داخل کوره از نظر حجمی دارای ۱۰ درصد CO_2، ۲۰ درصد بخار آب و ۷۰ درصد N_2 و دمایش ۱۵۰۰ K می‌باشد. فشار 1 atm است. سرمایش مورد نیاز را برای نگه‌داشتن دمای دیوارهای کوره در ۳۵۰°C حساب کنید.

۸-۶۹ مخلوطی به فشار 3 atm و دمای ۱۶۰۰ K از نظر حجمی دارای ۱۷ درصد CO_2، ۲۲ درصد بخار آب و ۶۱ درصد N_2 و بین دو صفحهٔ سیاه به دماهای ۱۰۰ و ۵۰۰°C محصور است. فاصلهٔ دو صفحه 90 cm است. مبادلهٔ گرمای تابشی با هر صفحه را حساب کنید. چنان‌چه گازی وجود نداشته باشد انتقال گرما چه‌قدر خواهد شد؟

۸-۷۰ دو صفحهٔ خاکستری به $\varepsilon = 0/8$ به فاصلهٔ 6 cm از هم قرار دارند و فضای بین آنها را CO_2 به فشار 1 atm پر می‌کند. دمای این صفحات ۹۰۰ و ۶۰۰ K است و می‌توان CO_2 را خاکستری فرض کرد. انتقال گرما بین صفحات را با CO_2 و بدون آن حساب کنید.

۸-۷۱ مخلوطی دارای ۲۰ درصد حجمی CO_2 و ۸۰ درصد حجمی N_2 در محفظه‌ای کروی به فشار 1 atm و دمای ۱۲۰۰ K محبوس است. ضریب گسیل گاز را برای قطر 1/5 m حساب کنید.

۸-۷۲ در محفظه‌ای کروی مخلوطی از هوا و بخار آب به فشار 2 atm و دمای ۹۰۰ K قرار دارد. فشار جزئی بخار آب 0/15 atm است. ضریب گسیل گاز را برای قطر 1/0 m حساب کنید.

۸-۷۳ مخلوطی از ۴۰ درصد حجمی CO_2 و ۶۰ درصد حجمی H_2O در محفظه‌ای مکعبی به ضلع 1 m در فشار 1 atm و دمای ۸۰۰ K قرار دارد. دمای دیوارهای محفظه ۴۰۰ K و $\varepsilon = 0/8$ است. بار سرمایی مورد نیاز را برای نگه‌داشتن دیوارها در ۴۰۰ K حساب کنید.

۸-۷۴ دو دیسک موازی به قطر 10 cm به فاصلهٔ 2/5 cm از هم قرار دارند. دمای یک دیسک ۵۴۰°C است و کاملاً بازتابنده - پخشنده و ضریب گسیل آن ۰/۳ می‌باشد. دمای دیسک دیگر ۲۶۰°C و بازتابنده‌ای آیینه‌ای - پخشنده و $\rho_D = 0/2$ و $\rho_s = 0/4$ است. دمای محیط ۲۰°C می‌باشد. گرمای تلف‌شده از سطح داخلی هر دیسک را حساب کنید.

۸-۷۵ مسأله ۸-۷۴ را با این فرض مجدداً حل کنید که صفحهٔ به دمای ۵۴۰°C تنها به طریق آیینه‌ای بازتاب کند. صفحهٔ عایق‌شده، پخشنده است.

۸-۷۶ شبکه تابشی سطحی آیینه‌ای - پخشنده را رسم کنید که به محفظه‌ای بزرگ گرما می‌دهد. برای انتقال گرما در این شرایط عبارتی به‌دست آورید. این انتقال گرما را با انتقال گرمایی مقایسه کنید که از سطحی کاملاً پخشنده با همان ضریب گسیل از دست می‌رود.

۸-۷۷ صفحه‌ای به ابعاد 30×60 cm با $\varepsilon = 0/6$ در اتاق بزرگی قرار دارد و تا ۳۷۰°C گرما داده می‌شود. فقط یک طرف صفحه با اتاق مبادلهٔ گرما می‌کند. صفحه‌ای با بازتابندگی بالا ($\rho_D = 0/1$ و $\rho_s = 0/7$) با همان اندازه را عمود بر صفحه گرمادیده قرار می‌دهند. دمای اتاق ۹۰°C است. انرژی از دست‌رفته از صفحهٔ گرم را با بازتابنده و بدون آن بیابید. دمای بازتابنده چه‌قدر است؟ از جابه‌جایی صرف‌نظر کنید.

۸-۷۸ حفره‌ای به ابعاد 5 در 5 cm از فولاد ضدزنگ ساخته شده ($\varepsilon = 0/6$) و تا ۲۶۰°C گرما داده می‌شود. در قسمت فوقانی آن پنجره‌ای از جنس شیشهٔ سنگ‌خوردهٔ مخصوص ($\rho_s = 0/1$، $\rho_D = 0/1$، $\tau_D = 0/3$، $\tau_s = 0/3$ و $\varepsilon = 0/2$) به ابعاد 5×5 cm قرار دارد. گرمای از دست‌رفته به اتاق خیلی بزرگی به دمای ۲۰°C را حساب کرده، آن‌را با انرژی‌ای مقایسه کنید که به این اتاق در حالت بدون پنجره منتشر می‌شود.

۸-۷۹ مسأله ۸-۷۸ را برای حالت پنجره‌ای تکرار کنید که تماماً بازتابنده - پخشنده و تماماً تراگسیلنده - آیینه‌ای $\rho_D = 0/6$، $\tau_D = 0/2$، $\tau_s = 0/2$ و $\varepsilon = 0/2$ باشد.

۸-۸۰ روی حفرهٔ مسأله ۸-۷۸ پنجره‌ای از جنس کوارتز هم‌جوشیده قرار دارد و فرض می‌شود که حفره در مقابل اتلاف هدایتی و جابه‌جایی به محیط اطراف کاملاً عایق باشد. این حفره درمعرض شار تابش‌دهی خورشیدی $900 \frac{W}{m^2}$ قرار دارد. به فرض کوارتز هم‌جوشیده غیر بازتابنده و $\tau = 0/9$ باشد دمای تعادل سطح داخلی حفره را حساب کنید. به خاطر آورید که محدودهٔ تراگسیل کوارتز ۰/۲ تا $4 \mu m$ است. از اتلاف جابه‌جایی از پنجره صرف‌نظر کنید. دمای محیط را ۲۰°C فرض کنید.

۸-۸۱ حفره‌ای مستدیر به قطر 5 cm و عمق 1/4 cm در جسمی به ضریب گسیل ۰/۸ درست شده است. دمای حفره ۲۰۰°C است و سوراخ با ماده‌ای شفاف به $\tau = 0/7$، $\varepsilon = 0/3$ و $\rho = 0$ پوشانده شده است. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی سطح بیرونی مادهٔ شفاف برابر $17 \frac{W}{m^2.°C}$ است. دمای هوای محیط و اتاق ۲۰°C است. اتلاف گرمای خالص از دست‌رفته از حفره و دمای پوشش شفاف را حساب کنید.

۸۲-۸ دمای دو صفحهٔ نامحدود موازی ۸۰۰ و ۳۵°C و ضرایب گسیل آنها به ترتیب ۰/۵ و ۰/۸ است. برای کاهش آهنگ انتقال گرما، یک سپر تابشی را میان این دو صفحه قرار می‌دهند. دو طرف صفحه سپر بازتابنده آیینه‌ای - پخشنده دارای $\rho_D = ۰/۴$ و $\rho_s = ۰/۴$ است. آهنگ انتقال گرما را با سپر و بدون آن حساب کنید. این نتیجه را با نتیجه سپر کاملاً بازتابنده پخشنده با $\rho = ۰/۸$ مقایسه کنید.

۸۳-۸ معادلات (۸-۱۰۵) و (۸-۱۰۷) را در مورد مسأله بیان شده با معادلهٔ (۸-۴۳) اعمال کنید. این معادلات را مستقیماً برای به‌دست آوردن معادلهٔ (۸-۴۳ الف) برای شیئی محدب به کار برید که کاملاً توسط سطح مقعر خیلی بزرگی احاطه شده است.

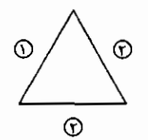
۸۴-۸ مثال ۸-۱۰ را با استفاده از فرمول‌بندی معادلهٔ (۸-۱۱۲) (۸-۱۱۵) تکرار کنید.

۸۵-۸ مسأله ۸-۲۶ را با استفاده از معادلات (۸-۱۱۲) و (۸-۱۱۵) تکرار کنید. به خاطر آورید که برای سطح عایق‌شده $J = E_b$ است.

۸۶-۸ دو صفحه مستطیلی ۳۰×۱۰ cm به فاصله ۱۰ cm از هم با چهار دیوار عایق‌شده و دوباره - تابنده به هم وصل شده‌اند. دماهای صفحات در ۱۰۰۰ و ۳۰۰°C یکنواخت و ضرایب گسیل آنهابه ترتیب ۰/۶ و ۰/۴ است. با استفاده از روش عددی، انتقال گرمای خالص در این شرایط را به‌دست آورید: (الف) چهار سطح دوباره تابنده مثل یک صفحه عمل کرده، دارای رادیوسیتی یکنواخت باشند و (ب) چهار سطح دوباره - تابنده دارای رادیوسیتی‌هایی هستند که از موازنهٔ تابشی با تمام سطوح دیگر تعیین می‌شود. به فرض رادیوسیتی سطوح ۱۰۰۰ و ۳۰۰°C، یکنواخت باشد. هم چنین دماهای سطوح دوباره - تابنده را در هر یک از حالات فوق حساب کنید.

۸۷-۸ دو دیسک موازی به قطر ۳۰ cm به فاصلهٔ ۵ cm از هم در اتاق بزرگی به دمای ۲۰°C قرار دارد. در یکی از دیسک‌ها گرم‌کنی برقی قرار دارد که شار گرمایی ثابت $۱۰۰ \frac{W}{m^۲}$ و $\varepsilon = ۰/۹$ را روی سطحی تولید می‌کند که روبه‌روی دیسک دیگر قرار دارد و سطح پشت آن عایق است. دیسک دیگر دارای $\varepsilon = ۰/۵$ روی دو سطح خود است و با دیسک دیگر و اتاق در توازن تابشی است. دمای دو دیسک را حساب کنید.

۸۸-۸ مقطع کانال بلندی مطابق شکل به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع است. شرایط سطح عبارتند از $T_۱ = ۱۱۰۰$ K، $\varepsilon_۱ = ۰/۶$، $T_۲ = ۲۱۰۰$ K، $\varepsilon_۲ = ۰/۸$، $\left(\frac{q}{A}\right)_۳ = ۱۰۰۰ \frac{W}{m^۲}$ و $\varepsilon_۳ = ۰/۷$ شار گرمایی سطوح ۱ و ۲ و دمای سطح ۳ را حساب کنید.



شکل م ۸-۸۸.

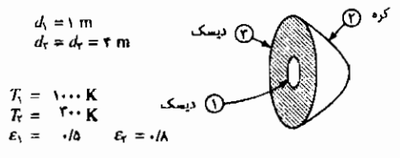
۸۹-۸ دو صفحهٔ مربعی به ضلع ۱ m به صورت عمودی به هم وصل شده‌اند. دمای یکی ۳۰۰°C و $\varepsilon = ۰/۵$ است و دیگری کاملاً عایق‌شده، $\varepsilon = ۰/۷$ دارد. هر دو صفحه در اتاق بزرگی به دمای ۳۰°C قرار دارند. گرمای تلف‌شده از صفحهٔ ۳۰۰°C و دمای صفحهٔ عایق‌شده را با استفاده از روش عددی حساب کنید.

۹۰-۸ مسأله ۸-۲۴ را با استفاده از فرمول‌بندی عددی حل کنید.

۹۱-۸ دو دیسک موازی هر یک به قطر ۱ m به فاصلهٔ ۲۵ cm از هم قرار دارند و دمای یکی برابر ۳۰۰°C و طرف پشت دیگری عایق‌شده است. ضریب گسیل هر دو دیسک ۰/۵ است و در اتاق بزرگی به دمای ۳۰°C قرار دارند. انرژی تابشی تلف‌شده توسط دیسک ۳۰۰°C را بیابید.

۹۲-۸ دو دیسک موازی به قطر ۵۰ cm به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم قرار گرفته‌اند. گرم‌کنی برقی شار گرمایی ثابت $۱۰ \frac{kW}{m^۲}$ را به یکی از دیسک‌ها می‌دهد در حالی که دمای ثابت دیسک دیگر ۳۵۰ K است. دو دیسک با سطحی عایق به هم وصل شده‌اند و هر دو دارای ضریب گسیل ۰/۶ است. معادلات مسأله با استفاده از فرمول‌بندی عددی نوشته، دماهای دیسک گرم و سطح عایق محیط اطراف را بیابید.

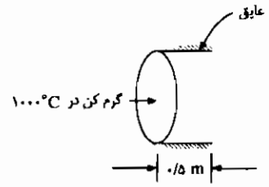
۹۳-۸ در شکل زیر گرمای تلف شدهٔ تابشی را از سطح دیسک ۱ و تابش‌دهی روی سطح کروی ۲ را حساب کنید. سطح ۳ عایق‌شده است.



شکل م ۸-۹۳.

۹۴-۸ دمای دیسکی سیاه به قطر ۱۰ cm برابر ۵۰۰°C است و در سر استوانه‌ای به قطر ۱۰ cm و طول ۱۰ cm نصب شده است. ضریب گسیل استوانه در سطح داخلی و خارجی ۰/۳ است و سرِ بازِ آن در معرض اتاق بزرگی به دمای ۴۰°C قرار دارد. انرژی از دست‌رفته از دیسک ۵۰۰°C را حساب کنید.

۹۵-۸ یک گرم‌کنِ تابشی «تمرکزدهنده» مطابق شکل ساخته شده، دمای سطح گرم آن ۱۰۰۰°C و ضریب گسیل آن ۰/۵۵ و قطرش ۰/۵ m است. دیوارهای احاطه کنندهٔ سطح گرم‌کن عایق‌شده، دارای $\varepsilon = ۰/۴$ است. مجموعهٔ فوق در اتاق بزرگی به دمای ۲۰°C قرار دارد. مقدار انتقال گرما به اتاق را حساب کنید.



شکل م ۸-۹۵.

۹۶-۸ یک سوراخ مخروطی را در بلوک عایقی تا عمق ۳ cm ماشین کرده‌اند. قطر کف سوراخ ۱ cm و قطر بالایی آن ۲ cm است. یک المان برقی را در کف سوراخ طوری نصب کرده‌اند که دما ۵۰۰°C و ضریب گسیل سطح فلز ۰/۶ است. دمای محیط بزرگ بیرون سوراخ ۳۰°C است. به فرض «کامل» بودن عایق‌کاری توان مورد نیاز گرم‌کن را حساب کنید. ضریب گسیل عایق ۰/۳ است.

۹۷-۸ ضلع جعبه‌ای مکعبی ۱ m است. سطح بالایی دارای $\varepsilon = ۰/۷$، $T = ۱۰۰$°C و سطح پایینی دارای $\varepsilon = ۰/۵$ و $T = ۴۰$°C است. چهار وجه دارای $\varepsilon = ۰/۶$ است. دو وجه مقابل به دمای $T = ۷۰$°C و دو وجه دیگر به دمای ۶۰°C است. انتقال گرمای تابشی خالص هر وجه را با استفاده از روش عددی حساب کنید.

۹۸-۸ دو دیسک موازی به قطرهای ۱۰ cm و ۲۰ cm به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم قرار گرفته‌اند. دیسک کوچک‌تر دارای $T = ۷۰۰$ K و $\varepsilon = ۰/۸$ و دیسک بزرگ‌تر بر روی دو سطح خود دارای $\varepsilon = ۰/۴$ است و با دیسک کوچک و اتاق بزرگ اطرافش به دمای ۲۵°C در حال توازن تابشی است. اتلاف گرما از دیسک کوچک و دمای دیسک بزرگ را حساب کنید (مراکز دو دیسک روی خطی عمود بر دو دیسک قرار دارد. م).

۹۹-۸ دو دیسک موازی به قطرهای ۵۰ cm و به فاصلهٔ ۱۲/۵ cm از هم قرار دارند و دمای ثابت یک دیسک ۸۰۰°C و $\varepsilon = ۰/۶۳$ و دیسک دیگر شار گرمایی ثابت $۸۰ \frac{kW}{m^۲}$ را تولید و دارای $\varepsilon = ۰/۷۵$ است. دو دیسک در اتاق بزرگی به دمای ۳۰°C قرار گرفته‌اند. گرمای جذب شده توسط اتاق و دمای دیسک با شار گرمایی ثابت را حساب کنید.

۱۰۰-۸ مسألهٔ ۸-۹۹ را به صورتی که به جای دیسک ۸۰۰°C دیسکی به شار گرمایی ثابت $۱۰۰ \frac{kW}{m^۲}$ و $\varepsilon = ۰/۶۳$ قرار گیرد، حل کنید. دماهای دو دیسک را در این شرایط بیابید.

۱۰۱-۸ دو استوانهٔ هم‌مرکز به $\varepsilon_۱ = ۰/۴$، $d_۱ = ۱۰$ cm، $\varepsilon_۲ = ۰/۶$ و $d_۲ = ۲۰$ cm موجود و طول آنها ۱۰ cm است. در یک سر این استوانه‌ها گرم‌کنی قرار دارد که دارای $\varepsilon = ۰/۸$ است و فضای باز بین دو استوانه را می‌پوشاند. گرم‌کن دارای شار گرمایی ثابت $۹۰ \frac{kW}{m^۲}$ است. کل مجموعه در اتاق بزرگی به دمای ۳۰°C قرار دارد. با استفاده از روش‌های شبکه و عددی، دماهای دو استوانه را حساب کنید.

۱۰۲-۸ مسألهٔ ۸-۵۱ را برای صفحهٔ آلومینیمی صیقل‌یافته با مشخصات تابشی جدول ۸-۴ تکرار کنید.

۱۰۳-۸ تیغه‌ای از جنس مرمر سفید را در معرض شار تابش خورشیدی $۱۰۷۰ \frac{W}{m^۲}$ قرار می‌دهند. به فرض دمای تابش مؤثر آسمان ۷۰°C- باشد دمای تعادل تابشی تیغه را با استفاده از خواص داده شده در جدول ۸-۴ بیابید. برای این محاسبه از تمام تلفات هدایتی و جابه‌جایی صرف‌نظر کنید.

۱۰۴-۸ سطح بزرگی دارای $\alpha = ۰/۶$ برای تابش طول‌موج بلند و $\alpha = ۰/۹۵$ برای تابش خورشیدی است. دمای تعادل تابشی این سطح را به شرطی حساب کنید که صفحهٔ پشتی آن عایق‌شده و صفحهٔ بالایی آن در معرض شار تابشی خورشیدی $۹۵۰ \frac{W}{m^۲}$، دمای محیط ۳۰۰ K و $h = ۱۲ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ باشد.

۱۰۵-۸ صفحه‌ای چدنی در محیطی به دمای ۲۵°C در معرض شار خورشیدی $۸۰۰ \frac{W}{m^۲}$ قرار می‌گیرد. دمای تعادل تابشی این صفحه را با صرف‌نظر از جابه‌جایی حساب کنید.

۱۰۶-۸ ترموکوپل در کانال گرمادیده بزرگی قرار داده شده تا دمای گاز جاری در آن را اندازه‌گیری کند. دمای دیواره‌های این کانال ۴۲۵°C است و ترموکوپل دمای ۱۷۰°C را نشان می‌دهد. ضریب انتقال گرما از گاز به ترموکوپل $۱۵۰ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ است. ضریب گسیل جنس ترموکوپل ۰/۴۳ است. دمای گاز چه‌قدر است؟

۱۰۷-۸ فرض کنید صفحه‌ای تخت در معرض هوای محیط خیلی سریع قرار دارد. دمای تعادل تابشی صفحه را به عنوان دمایی تعریف می‌کنیم که در حالت عایق‌بودن صفحه حاصل می‌شود، به طوری که انرژی دریافت شده به طریق گرمایش آیرودینامیکی کاملاً مساوی گرمای از دست‌رفته به طریق تابش به محیط است، یعنی:

$$hA(T_w - T_{aw}) = -\sigma A \varepsilon (T_w^۴ - T_s^۴)$$

که فرض می‌شود محیط اطراف نامحدود و به دمای T_s و ε ضریب گسیل سطح صفحه است. به فرض ضریب گسیل سطح ۰/۸ باشد، دمای تعادل تابشی را برای شرایط مثال ۵-۹ حساب کنید. فرض کنید دمای تابشی مؤثر محیط ۴۰°C- باشد.

۱۰۸-۸ دمای تابشی مؤثر آسمان را می‌توان برای شبی روشن ۷۰°C- در نظر گرفت. به فرض بادی نوزد و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی از هوا به شبنم جمع شده روی علف $۲۸ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ باشد، دمای بیشینه هوا برای جلوگیری از تشکیل یخ را ارزیابی کنید. از تبخیر شبنم صرف‌نظر کرده، فرض کنید که علف نسبت به زمین، تا وقتی که هدایت مورد نظر است، عایق‌شده است. ضریب گسیل آب را واحد بگیرید.

۱۰۹-۸ ترموکوپلی پیچیده در حفاظی از فولاد ضدزنگ به ضخامت ۳/۲ mm ($\varepsilon = ۰/۶$) را به طور افقی در کوره‌ای فرو می‌برند تا دمای هوای داخل آن را اندازه‌گیری کنند. دمای دیوارهای کوره ۶۵۰°C و دمای واقعی هوا ۵۶۰°C می‌باشد. دمایی که ترموکوپل نشان می‌دهد چه‌قدر است؟ فرض کنید گرما به طریق جابه‌جایی آزاد از ترموکوپل بیرون می‌رود.

۱۱۰-۸ ترموکوپل مسأله ۸-۱۰۹ را به طور افقی در اتاقی قرار می‌دهند که تهویه مطبوع می‌شود. دمای دیوارهای اتاق ۳۲°C و دمای هوای اتاق ۲۰°C است. دمایی که ترموکوپل نشان می‌دهد چه‌قدر است؟ چنان‌چه ترموکوپل مزبور را در سپری تابشی از جنس آلومینیم صیقل یافته بپیچند چه تأثیری در مقدار قرائت شده دارد؟

۱۱۱-۸ ترموکوپلی فلزی و افقی به قطر ۳ mm و ضریب گسیل ۰/۶ را در کانالی فرو برده‌اند تا دمای جریان هوای جاری در آن با سرعت $۷ \frac{m}{s}$ را اندازه بگیرند. دمای دیوارهای کانال ۴۰۰°C است و ترموکوپل دمای ۱۰۰°C را نشان می‌دهد. با استفاده از روابط جابه‌جایی فصل ۶ دمای واقعی گاز را حساب کنید.

۱۱۲-۸ فرض کنید که استوانهٔ خارجی مثال ۸-۱۰، روی سطح خارجی‌اش به طریق جابه‌جایی در اتاقی با $h = ۵۰ \frac{W}{m^۲ \cdot °C}$ گرما از دست می‌دهد. با

صرف‌نظر از جابه‌جایی روی سطوح دیگر، دمای استوانهٔ خارجی و گرمای تلف‌شده از استوانهٔ داخلی را تعیین کنید.

۸-۱۱۳ برای اندازه‌گیری دمای هوای داخل یک کورهٔ متالورژیکی که به طریق برقی گرما می‌بیند از ترموکوپل استفاده می‌شود. ضریب گسیل سطح ترموکوپل ۰/۷ و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۲۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ است. ترکوپل دمای ۷۵۰°C را نشان می‌دهد. دمای واقعی هوا فقط ۶۵۰°C است. دمای دیوارهای کوره را بیابید.

۸-۱۱۴ دماسنجی جیوه‌ای را در کانالی قرار داده‌اند تا دمای جریان هوا را اندازه بگیرند. دماسنج دمای ۵۵°C را نشان می‌دهد و دمای دیوارهای کانال را با ترموکوپلی برابر ۱۰۰°C اندازه می‌گیرند. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی از دماسنج به هوا با استفاده از روش‌های فصل ۶ برابر $۳۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ محاسبه شده‌است. دمای هوا را محاسبه کنید.

۸-۱۱۵ هوا به دمای ۲۰°C در عرض استوانه‌ای به قطر ۵۰ cm با سرعت $۲۵ \frac{m}{s}$ جاری‌است. دمای استوانه ۱۵۰°C و ضریب گسیل سطح ۰/۷ است. کل اتلاف گرما از استوانه را به واحد طول آن به شرطی حساب کنید که دمای تابش مؤثر محیط ۲۰°C باشد.

۸-۱۱۶ رشته سبکی از تنگستن در دمای ۳۴۰۰ K عمل می‌کند. چه کسری از تابش در محدودهٔ مرئی، ۰/۴ تا ۰/۷μm، قرار دارد؟

۸-۱۱۷ فرض کنید رشته سبک تنگستن مسألهٔ ۸-۱۱۶ مقدار ۴۰۰ W توان برقی مصرف می‌کند و تمام نور مرئی از حباب شیشه‌ای دور آن تراگسیل می‌شود. مساحت رشته را برای انتشار ۴۰۰ W انرژی تابشی کل محاسبه کنید. بازده حباب لامپ چیست؟

۸-۱۱۸ ضریب گسیل ماده‌ای بین ۰ و ۲μm برابر ۰/۶ و بین ۲ و ۸μm برابر ۰/۲ است. توان گسیل این ماده را در دمای ۳۰۰۰ K بیابید.

۸-۱۱۹ نشان دهید که می‌توان ثابت استفان - بولتزمن را برحسب ثابت‌های تابش $C_۱$ و $C_۲$ با رابطه زیر بیان کرد:

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{C_۲}\right)^{۴} \left(\frac{C_۱}{۱۵}\right)$$

۸-۱۲۰ اکثراً برای کاهش تراگسیل انرژی خورشیدی روی شیشه‌های پنجره را روکش روشن پلاستیکی می‌کشند . ضریب تراگسیل شیشه بدون روکش از ۰/۲۵ تا ۲/۵μm برابر ۰/۹ است. در حالی که شیشه روکش شده از ۰/۵ تا ۱/۵μm را دارای همین ضریب تراگسیل است. با فرض آنکه تابش خورشیدی از جسم سیاه به دمای ۵۸۰۰ K باشد، کسری از انرژی خورشیدی برخوردی را محاسبه کنید که از هر شیشه تراگسیل می‌شود. انرژی مرئی (۰/۴ تا ۰/۷μm) تراگسیل‌شده از هر شیشه را نیز بیابید.

۸-۱۲۱ هوایی که در عرض صفحه‌ای مربعی به ضلع ۰/۲ m جاری است ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی $۱۲ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ را ایجاد می‌کند. دمای هوا ۴۰۰ K است. طرف پشت صفحه عایق‌شده و در معرض تابش‌دهی $۲۲۰۰ \frac{W}{m^{۲}}$ است که ۴۵۰ $\frac{W}{m^{۲}}$ آن بازتاب می‌شود. وقتی دمای سطح ۵۱۰ K است، توان گسیل آن ۱۱۰۰ $\frac{W}{m^{۲}}$ است. ضریب گسیل و رادیوسیتی سطح صفحه را حساب کنید.

۸-۱۲۲ دمای کف یک مخزن مکعبی به ضلع ۳m برابر ۵۰۰ K و $\varepsilon = ۰/۵$ است. سطح بالایی آن در ۳۰۰ K و $\varepsilon = ۰/۷$ است. چهار سطح دیگر کاملاً عایق‌شده‌اند. انتقال گرما از سطح کف را بیابید.

۸-۱۲۳ دمای دیسکی به قطر ۱۰ cm برابر ۸۰۰ K و $\varepsilon = ۰/۶$ است و در کف استوانه‌ای عایق‌شده به ارتفاع ۱۵ cm قرار داده می‌شود. در بالای این استوانه نیم‌کره‌ای به قطر ۱۰ cm با $T = ۳۰۰$ K و $\varepsilon = ۰/۳$ قرار دارد. گرمای تلف‌شده از دیسک را حساب کنید.

۸-۱۲۴ استوانه‌ای بلند به قطر ۵/۰ cm با $T = ۸۰۰$ K و $\varepsilon = ۰/۷$ در اتاق بزرگی به دمای ۳۰۰ K قرار دارد. اتلاف گرمای تابشی از استوانه چه‌قدر کم می‌شود اگر آن‌را در یک سپر تابشیِ استوانه‌ای به قطر $d = ۱۰$ cm و $\varepsilon = ۰/۲$ روی سطوح داخلی و خارجی آن قرار دهیم؟ آن را به صورت $\frac{W}{m}$ طول بیان کنید.

۸-۱۲۵ قطر و طول کوره‌ای استوانه‌ای ۵۰ cm است. سطح دیسک کف در ۴۵۰ K و $\varepsilon = ۰/۵$ و دیسک بالا در ۶۰۰ K و $\varepsilon = ۰/۶$ است و سطح جانبی استوانه در ۱۰۰۰ K و $\varepsilon = ۰/۷$ است. توان گسیل، تابش‌دهی و اتلاف گرمای سه سطح را حساب کنید.

۸-۱۲۶ مسألهٔ ۸-۱۲۵ را در حالی تکرار کنید که سطح دیسک بالایی را برداشته، در واقع یک حفرهٔ استوانه‌ای رویاز در معرض اتاقی بزرگ به‌دمای ۳۰۰ K است.

۸-۱۲۷ ماده عایق تخلیه‌شده از هوایی شامل لایه‌های خارجی از جنس آلومینیم با ضریب گسیل ۰/۱۱ و سه سپر آلومینیمی صیقلی داخلی با ضریب گسیل ۰/۰۴ و به فاصلهٔ ۲ mm از هم است. کل ضخامت با صرف‌نظر از ضخامت لایه‌های خارجی ۸ mm است. انتقال گرمای تابشی در عرض این مجموعه را به ازای دماهای ۳۰۰ و ۸۵ K حساب کنید. ضریب هدایت گرمایی مؤثر و مقدار R را برای این دماها نیز حساب‌کنید.

۸-۱۲۸ دمای سطح دیسک کف استوانه‌ای به قطر ۴۰ cm و ارتفاع ۳۰ cm برابر ۷۵۰ K و $\varepsilon = ۰/۷۵$ است. سطح قائم استوانه کاملاً عایق‌شده است. دیسک بالایی دارای سوراخی به قطر ۲۰ cm در مرکز و دمای سطحی ۶۰۰ K و $\varepsilon = ۰/۴$ است. سوراخ باز در معرض اتاق بزرگی به دمای ۳۰۰ K است. اتلاف گرما، توان گسیل، رادیوسیتی و تابش تمام سطوح و دمای سطح استوانه‌ای قائم را حساب کنید.

۸-۱۲۹ حفره‌ای را با مساحت سطح داخلی $A_۱$، ضریب گسیل $\varepsilon_۱$ در نظر بگیرید. سوراخی در بدنه حفره وجود دارد که سطح آن $A_۲$است. نشان دهید که ضریب گسیل ظاهری سوراخ که در مسألهٔ ۸-۳۷ تعریف شد از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{app} = \frac{\varepsilon_۱ A_۱}{A_۲ + \varepsilon_۱(A_۱ + A_۲)}$$

۸-۱۳۰ "ضریب E" راگاهی طوری تعریف می‌کنند که انتقال گرمای واحد سطح بین سطوح موازی‌بزرگ از $\frac{q}{A} = E\sigma\,(T_۱^{۴} - T_۲^{۴})$ به‌دست می‌آید. مقدار ضریب E برای دو سطح را بسیابید که هر یک دارای $\varepsilon = ۰/۹$ ،۰/۸ ،۰/۵ ،۰/۲ ،۰/۱ و ۰/۰۵ است.

۸-۱۳۱ نشان دهید که وقتی سطوح خیلی بزرگ باشند معادلهٔ (۸-۴۱) مربوط به تابش بین سطوحی که با سطوح عایق به هم وصل شده‌اند به معادلهٔ (۸-۴۲) مربوط به صفحات نامحدود موازی تبدیل می‌شود.

۸-۱۳۲ دو استوانه هم‌مرکز دارای قطرهای ۳۰ و ۱۰۰ cm و ارتفاع ۲ m هستند. ضرایب گسیل داخل و خارج به ترتیب ۰/۲ و ۰/۴ و دماهای سطح آنها به ترتیب ۸۰۰ K و ۴۰۰ K است. اتلاف گرمای تابشی خالص از هر استوانه را بیابید اگر (الف) در اتاق بزرگی به دمای ۳۰۰ K قرار داشته باشد و (ب) دو سرِ بازِ استوانه‌ها را ماده عایقی پوشانده باشد.

۸-۱۳۳ مخروط ناقصی مثل مخروط مثال ۸-۴ را از ورق مسی نازکی به $\varepsilon = ۰/۸$ در دو طرف ساخته‌اند. حفره بالایی (کوچک) را باسطحی به $\varepsilon = ۰/۲$ و دمای $T = ۷۰۰$ K و حفره پایینی (بزرگ) را با سطحی به $\varepsilon = ۰/۶$ و دمای $T = ۵۰۰$ K پوشانده‌اند. کل مجموعه را در اتاق بزرگی به دمای ۳۰۰ K قرار می‌دهیم. اتلاف گرما از هر یک از دو سطح گرم را حساب کنید.

۸-۱۳۴ فرض کنید سطح مسی بیرونی مسألهٔ ۸-۱۳۳ نیز به طریق جابه‌جایی و با $h = ۲۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$گرما از دست می‌دهد. گرمای تلف‌شده از هر سطح گرم را در این حالت حساب کنید.

۸-۱۳۵ کره‌ای به قطر ۱۰ cm دارای نیم‌کره‌ای به ضریب گسیل ۰/۵ و نیم کره‌ای دیگر به ضریب گسیل ۰/۸ است. تمام کره تا دمای یکنواخت ۸۰۰°C گرما داده می‌شود و در اتاق بزرگی به دمای ۲۰°C قرار می‌گیرد. کل گرمای تلف‌شده از کره را بیابید.

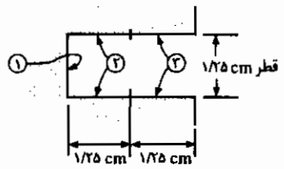
۸-۱۳۶ دمای تعادل تابشی را برای صفحه‌ای چدنی محاسبه کنید که در معرض شار خورشیدی $۷۰۰ \frac{W}{m^{۲}}$ و دمای محیط ۲۵°C قرار دارد. فرض کنید $h = ۰$.

۸-۱۳۷ مسألهٔ ۸-۱۳۶ را برای اتلاف جابه‌جایی از سطحی با $h = ۷/۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ تکرار کنید.

۸-۱۳۸ کره‌ای مسی به $\varepsilon = ۰/۸$ و قطر ۵ cm از ۳۰۰°C تا ۵۰°C وقتی در محفظه‌ای بزرگ و تخلیه‌شده از هوا به دمای ۰°C قرار می‌گیرد خنک می‌شود. با استفاده از تحلیل عددی بر پایه ظرفیت فشرده، زمان لازم برای رسیدن دمای کره به (الف) ۲۰۰°C، (ب) ۱۰۰°C و (ج) ۵۰°C را تعیین کنید.

مسائل طراحی

۸-۱۳۹ یک روش ساخت حفره جسم سیاه، حفر سوراخی در صفحه‌ای فلزی است. در نتیجهٔ بازتاب‌های چندگانه در داخل این سوراخ به نظر می‌رسد که دیوارهای داخلی نسبت به سطحی تخت در فضایی آزاد ضریب گسیل بیش‌تری دارند. در تحلیل دقیق این حفره باید این واقعیت را در نظر گرفت که تابش‌دهی روی سطح داخلی غیر یکنواخت است. پس باید محل خاصی را مشخص کرد که ابزار اندازه‌گیری شار تابشی روی این سطح دید داشته باشد تا بتوان در مورد چگونگی "سیاه" بودن این سطح اظهار نظر کرد. سوراخی به قطر ۱/۲۵ cm و عمق ۲/۵ cm را در نظر بگیرید. سطح داخلی را به سه بخش مطابق شکل تقسیم کنید. به عنوان یک تقریب فرض کنید که تابش‌دهی روی هر یک از سه سطح و دما و ضریب گسیل داخل کل حفره یکنواخت‌اند. تابش سنج، کل انرژی خروجی از یک سطح (رادیوسیتی) را آشکار می‌کند. برای هر یک از سه سطح، نسبت $\frac{J}{E_b}$ را با فرض $\varepsilon = ۰/۶$ و بدون کسب تابش قابل توجه از محیط خارج حساب کنید.



شکل م ۸-۱۳۹.

۸-۱۴۰ مسألهٔ ۸-۱۳۹ را با این فرض تکرار کنید که دمای حفره ۱۲۰°C و دمای محیط ۹۳°C باشد.

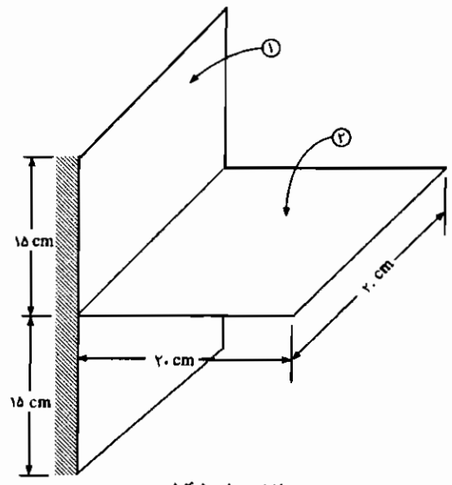
۸-۱۴۱ دو نوار نامحدود به عرض ۳۰ cm به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم قرار دارند. ضرایب گسیل سطوح نوارها ۰/۲۵ و ۰/۵ و دمای ثابت روی سطوح آنها به ترتیب ۲۰۰ و ۱۰۰۰°C است. دو نوار کاملاً در محیطی بزرگ به دمای ۰°C محصورند. با استفاده از یک روشی عددی هر نوار را به سه قسمت تقسیم و انتقال گرمای خالص هر نوار را حساب کنید. به فرض یکنواختی رادیوسیتی هر نوار، انتقال گرمای هر نوار چه‌قدر است؟ به فرض رفتار جسم خاکستری وجود دارد.

۸-۱۴۲ مسألهٔ ۸-۱۴۱ را برای وقتی حل کنید که نواری به دمای ۱۰۰۰°C و $\varepsilon = ۰/۶$ و دیگری کاملاً عایق (توازن‌تابشی) با $\varepsilon = ۰/۲۵$ است.

۸-۱۴۳ نتایج مثال ۸-۱۹ را برای $\varepsilon_۲ = \varepsilon_۴ = ۰/۶$ و $h = ۲۵ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ بررسی کنید.

۸-۱۴۴ دو استوانه هم‌مرکز بلند دارای خواص $d_۱ = ۲$ cm و $\varepsilon_۱ = ۰/۷۵$ و $T_۱ = ۶۰۰$ K و $d_۲ = ۵$ cm و $\varepsilon_۲ = ۰/۸$ روی سطوح داخلی و خارجی است. جریان هوایی در عرض استوانهٔ خارجی با $T_\infty = ۳۵°C$ و $h = ۱۸۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ وزانده می‌شود. این مجموعه در اتاق بزرگی به دمای ۲۵°C قرار دارد. گرمای تلف‌شده از استوانه داخلی به ازای متر طول آن و دمای استوانه خارجی را حساب کنید.

۸-۱۴۵ سطح ۱ شکل زیر با $T_۱ = ۵۰۰$ K و $\varepsilon_۱ = ۰/۸$ و سطح ۲ خیلی باریک و دارای $\varepsilon = ۰/۴$ است و با سطح ۱ و محفظهٔ بزرگ به دمای ۳۰۰ K در توازن تابشی است. دمای سطح ۲ را با فرض یکنواختی دما بیابید.



شکل م ۸-۱۴۵.

۸-۱۴۶ فرض کنید ضریب جابه‌جایی در $T = ۳۰۰\ \mathrm{K}$ روی سطح ۲ (بالا و پایین) مسألهٔ ۸-۱۴۵ برابر $h = ۱۰\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲\cdot^\circ\mathrm{C}}$ باشد. توزیع دما در این حالت را پیدا کنید. مسأله را برای $h = ۵۰\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲\cdot^\circ\mathrm{C}}$ تکرار کنید به فرض سطح آن قدر باریک است که هدایت قابل صرف‌نظر است.

۸-۱۴۷ فرض کنید جنس سطح ۲ مسألهٔ ۸-۱۴۵ مس اکسیده با $\varepsilon = ۰/۷۸$ و ضخامتش $۰/۵\ \mathrm{mm}$ باشد. سطح دارای $T_۱ = ۱۰۰۰\ \mathrm{K}$ و $\varepsilon_۱ = ۰/۵$ است. محیط جابه‌جایی و تابشی در $۳۰۰\ \mathrm{K}$ و $h = ۷۵\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲\cdot^\circ\mathrm{C}}$ است. دما در طول پره را با احتساب هدایت حساب کنید. برای نوشتن جملات انتقال گرمای هدایتی به فصل ۳ مراجعه کنید.

۸-۱۴۸ صفحهٔ مثال ۵-۴ مربعی به ابعاد $۳۰\ \mathrm{cm}$ در $۳۰\ \mathrm{cm}$ است و آن را با رنگ سفیدی به ضریب جذب خورشیدی ۰/۱۶ و ضریب جذب دما-پایین ۰/۰۹ اسپری کرده‌اند. صفحه در معرض شار تابش خورشیدی $۱۱۰۰\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲}$ قرار دارد و می‌گذارند تا با محیط جابه‌جایی به تعادل برسد. با فرض عایق‌بودنِ زیرِ صفحه، دمای تعادل صفحه را بیابید.

۸-۱۴۹ کلکتوری خورشیدی متشکل از یک سطح سیاه عایق‌شده است که با صفحه‌ای شیشه‌ای به خواص زیر پوشانده شده است:

$$۰ < \lambda < ۲/۵\mu\mathrm{m}: \quad \tau = ۰/۹ \quad \varepsilon = ۰/۱ \quad \rho = ۰$$
$$۲/۵\mu\mathrm{m} < \lambda < \infty: \quad \tau = ۰ \quad \varepsilon = ۰/۹۵ \quad \rho = ۰/۰۵$$

فرض کنید شار تابشی خورشید $۷۰۰\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲}$ و کاملاً زیر $۲/۵\mu\mathrm{m}$ باشد. دمای تعادل تابشی سطح سیاه را با صرف‌نظر از جابه‌جایی و به ازای دمای محیط اطراف $۳۵^\circ\mathrm{C}$ حساب کنید.

۸-۱۵۰ به مسألهٔ ۱-۳۶ مراجعه کنید. اکنون می‌دانید که شخص با مبادلهٔ تابش با داخل یخچال باز، خنک می‌شود. فرضیات مناسبی در نظر بگیرید که شما را قادر به ارزیابی مقدار این اثر خنک‌کنندگی می‌کند. دمای مؤثر اتاق معادل آن چه‌قدر پایین می‌آید؟ رابطه‌های انتقال گرمای جابه‌جایی مناسب را از فصل‌های ۵، ۶ و ۷ به کار ببرید.

۸-۱۵۱ به مسألهٔ ۱-۳۸ مراجعه کنید. اختلاف "راحتی دمایی" از مبادله تابشی بین دانشجویان و دیواره‌ها حاصل می‌شود. دیواره‌ها در تابستان گرم‌ترند تا در زمستان. ضرایب شکل تابشی مناسبی را فرض کرده، وضعیت را تحلیل و توضیح قانع کننده‌ای برای این آزمایش به‌دست آورید.

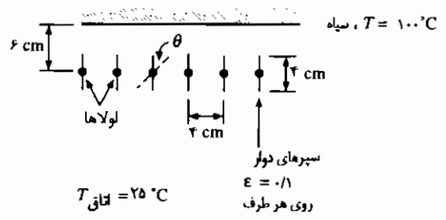
۸-۱۵۲ دیوار ساختمانی به یک دال بتونی وصل است و در معرض نور خورشید در تابستان قرار دارد. تجربه نشان می‌دهد که بتون از نور خورشید گرم شده، به دمایی بالاتر از سطح چمن می‌رسد. در نتیجه، انرژی را به دیوارهٔ ساختمان باز می‌تاباند و بدین وسیله نسبت به زمانی که اطراف ساختمان را سطح چمن فراگرفته باشد تابش‌دهی بیش‌تری تولید می‌کند. در مورد خواص تابش، تابش‌دهی خورشیدی و جابه‌جایی فرض‌های مناسبی اختیار کنید تا افزایش تابش‌دهی ناشی از بتون به‌دست آید. فرض کنید دال بتونی تا فاصلهٔ حداقل دو برابر ارتفاع ساختمان ادامه داشته باشد.

۸-۱۵۳ می‌خواهیم گرم‌کن تابشی انباری را طوری طرح کنیم که گرمای حدود $۱۵\ \mathrm{kW}$ را به هوای به دمای $۲۰^\circ\mathrm{C}$ بدهد. دمای سطح گرم‌کن با شعله گاز مناسبی، در حدود $۹۰۰^\circ\mathrm{C}$ خواهد بود و ضرایب گسیل سطحی سطح (های) گرمادیده از ۰/۵ تا ۰/۸ تغییر می‌کند. شکل سطح گرم‌کن مستطیلی است و با چهار دیواری که به خوبی عایق‌شده‌اند مطابق آرایش شکل مسألهٔ ۸-۴۲ احاطه شده است. "جعبه" به اتاق یا فضای انبار باز است. با استفاده از برنامه کامپیوتری مناسبی از پیوست D، حداقل هشت شکل‌بندی مختلف و/یا شرایط سطح را برای تعیین شکلی که موجب گرمایش $۱۵\ \mathrm{kW}$ می‌شود، بررسی کنید. به خاطر داشته باشید که سطح عایق با در نظر گرفتن مقدار اندکی برای ε آن سطح به‌حساب آورده می‌شود. برای شکل‌بندی انتخابی، مقدار دماهای سطوح عایق را حساب کنید.

۸-۱۵۴ جعبه‌ای دارای بسته‌ای الکترونیکی است که $۲۰۰\ \mathrm{W}$ گرمای حاصل از ابزاری الکتریکی در داخل آن را به بیرون انتشار می‌دهد. بیشینه دمایی که در الکترونیک قابل تحمل است برابر $۸۰^\circ\mathrm{C}$ است و بیرون جعبه در معرض هوای اتاق به دمای $۲۰^\circ\mathrm{C}$ است. ابعاد مناسب جعبه مکعب مستطیلی را تعیین کنید که گرمای مورد نظر را انتشار می‌دهد. فرض‌هایی در مورد جنس، ضخامت دیواره، اندازه ابزار الکترونیکی داخل جعبه، افت دما از ابزار تا دیواره جعبه و سایر عوامل مناسب در نظر بگیرید. فرض کنید که کل انرژی از بیرون جعبه با ترکیبی از جابه‌جایی آزاد و تابش از سطح بیرونی جعبه انتشار می‌یابد. تابش با کاربرد معادلهٔ (۸-۴۳الف) و مقادیر ضریب گسیلی محاسبه می‌شود که از جدول A-۱۰ برای جنس جعبه انتخابی برداشت می‌شود.

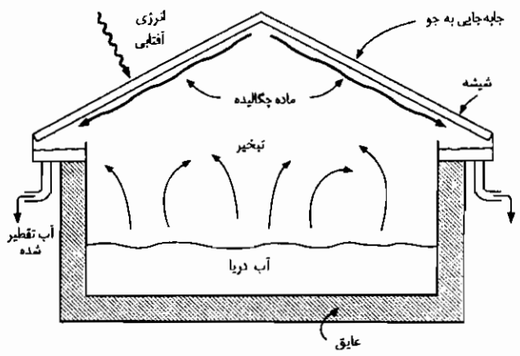
۸-۱۵۵ می‌خواهیم گرم‌کن پانلی تابشی با سپر تابشی متغیر مطابق شکل طراحی کنیم. سطح سیاه شدهٔ پانل با چگالیدن بخار روی سطح پشت آن در $۱۰۰^\circ\mathrm{C}$ است. مقاطع سپر را می‌توان چرخاند تا تابشی که به اتاق

اطراف به دمای $۲۵^\circ\mathrm{C}$ می‌رسد تغییر کند. دو طرف مقاطع سپر دارای $\varepsilon = ۰/۱$ است. با استفاده از فرض‌ها و فنون تحلیلی مناسب، آهنگ مبادلهٔ گرما از پانل سیاه به اتاق را به صورت تابعی از زاویه دوران θ مقاطع سپر ارزیابی کنید. فرض کنید که پانل سیاه در مقایسه با فاصلهٔ بین آن و مقاطع سپر خیلی بزرگ است. طراحی را بافرض جابه‌جایی آزاد از پانل ومقاطع سپر و بدون آن انجام دهید. نتایج مربوط به مقتصد بودن این طرح را بیان کنید.



شکل م ۸-۱۵۵.

۸-۱۵۶ یک سیستم نمک‌گیری آفتابی از آب پیشنهاد شده است که آرایشی مانند شکل زیر دارد. انرژی خورشیدی از صفحات شیشه‌ای تراگسیل می‌شود که تا $۲/۵\mu\mathrm{m}$ را تراگسیل می‌کند ولی در مقابل طولِ‌موج‌های بلندتر، مات است. آب دریا در کف عایق جاری است. آب به خاطر تابش "به دام افتاده" بخار می‌شود و وقتی به سطوح شیب‌دار شیشه‌ای که بیرون آن در معرض هوای محیط است برخورد می‌کند، تقطیر می‌شود. سپس مایع تقطیر شده از سطوح به پایین جاری شده و در ناودان‌هایی در جوانب جمع می‌شود. از شما می‌خواهند که این طرح پیشنهادی را ارزیابی کنید. با استفاده از مقادیر مناسب برای ضریب چگالش آب، مقدار آب تقطیر شده در ساعت را با این دستگاه حساب کنید. دمای آب ورودی را $۲۵^\circ\mathrm{C}$ و دمای محیط را $۳۲^\circ\mathrm{C}$ بگیرید. در مورد فرض‌های خود و نتایج نظر دهید.

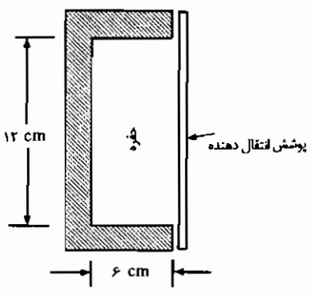


شکل م ۸-۱۵۶.

۸-۱۵۷ معمولاً عملکرد پره‌هایی مانند شکل ۲-۱۳ برای خنک کردن وسایل الکتریکی باید با تجربه تعیین شود. اگر جنس پره‌ها از آلومینیم باشد معمولاً موقع خنک شدن با جابه‌جایی آزاد در هوای محیط به صورت ظرفیتی فشرده عمل می‌کنند. از شما خواسته‌اند تا وسیله‌ای برای تعیین رفتار سرمایش جابه‌جایی آزاد این پره‌ها نخست با گرم کردن پره‌ها تا دمایی یکنواخت و سپس سردکردن آنها در هوای اتاق طراحی کنید. تابش از پره‌ها را چگونه در این آزمایش به حساب می‌آورید. برای ربط دادن داده‌های تجربی برای به‌دست آوردن نوعی رابطهٔ تعمیم یافته که این رفتار را بیان می‌کند چگونه عمل می‌کنید؟

۸-۱۵۸ برای گرم کردن فضای داخلی محلی از المان‌های مقاومتی برقی در سقف‌ها استفاده می‌شود. فرض می‌شود فردی که در اتاق است هر شش سطح را یکسان "می‌بیند". در مورد سطح راحتی قابل قبول، فرض‌هایی اختیار کرده و دمای گرمایشی که در سقفی به ابعاد $۴ \times ۵\ \mathrm{m}$ لازم است، ارزیابی کنید. برای این محاسبه فرض کنید که وقتی دمای اتاق $۲۰^\circ\mathrm{C}$ است و ضریب انتقال گرما از فرد به هوای اتاق مناسب است به همان راحتی می‌رسیم. هم چنین فرض کنید که دو تا از دیوارهای محل دیوارهای خارجی با دماهای مناسب هستند. از این بررسی چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۸-۱۵۹ پوشش نسبتاً شفافی را روی حفره‌ای مربعی مطابق شکل قرار می‌دهیم. دمای داخل حفره می‌تواند از $۳۵۰\ \mathrm{K}$ تا $۵۰۰\ \mathrm{K}$ تغییر کند و مجموعه با اتاق بزرگی به دمای $۳۰۰\ \mathrm{K}$ مبادله گرما می‌کند. به فرض بتوان جنس پوشش را طوری ساخت که ضریب تراگسیل متغیری را برای ایجاد مبادله تابشی خالص ثابت بین این مجموعه و اتاق برای محدوده دمایی نشان داده شده، تأمین کند. در این طراحی مجموعه مناسبی از خواص تابشی برای ماده پوشش تحلیل مناسبی صورت دهید. تمام فرض‌ها را به روشنی بیان کنید.



شکل م ۸-۱۵۹.

۸-۱۶۰ پیمان‌کاران عایق کار ادعا می‌کنند که می‌توان با استفاده از روکش‌های بازتابنده رویِ موادِ عایقِ اتاقِ زیر شیروانی، بارِ گرمایی روی ساختمان (خانه) را خیلی کاهش داد. از شما می‌خواهند این ادعا را ارزیابی کنید. مواد و ضخامت‌های عایق و تخمین‌های دمای اتاق زیر شیروانی مناسبی برای ارزیابی این ادعا انتخاب کنید. دو مورد را در نظر بگیرید: (۱) یک لایه عایق که روی سقف قرار داده می‌شود و با روکش بازتابنده یا بدون آن و (۲) دو لایه عایق، یکی روی سقف و یکی زیر پشت‌بام؛ باز هم با روکش بازتابنده و بدون آن. اگر واقعاً متوجه شدید که جنس

بازتابنده روکش‌دار بهتر است، قیمت ماده چه‌قدر بیش‌تر می‌شود؟ پس انداز هزینه انرژی برای این قیمت بالاتر چیست؟ مبناهای دیگر مربوط به این ارزیابی قیمت چیست؟ در تحلیل خود در مورد فرض‌ها و عدم اطمینان‌ها بحث کنید. اگر شما مدیر بازاریابی سازنده ماده عایق باشید، نتایج را چگونه ارائه می‌کنید؟ آیا معنی دارد که ماده بازتابنده روکش شده را به عنوان ماده‌ای با مقدار R بزرگ‌تر معرفی کرد؟

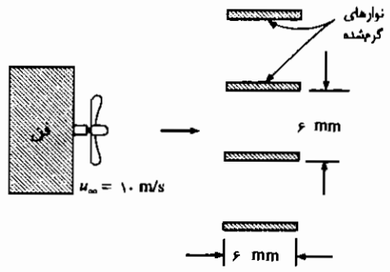
۸-۱۶۱ دو صفحه مربعی موازی با $T_1 = 800\ \text{K}$ و $T_2 = 500\ \text{K}$ و $\varepsilon_1 = 0/6$ و $\varepsilon_2 = 0/4$ در اتاق بزرگی به $300\ \text{K}$ محصورند. با استفاده از برنامهٔ J پیوست D انتقال گرما از هر صفحه را به صورت تابعی از فاصله صفحه بی‌بعد به‌دست آورید. بازده انتقال گرما را نیز که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Eff = \frac{\text{گرمای خالص دریافت شده توسط صفحهٔ سرد}}{\text{گرمای تلف‌شده از صفحه گرم}}$$

به صورت تابعی از همان سنجه (پارامتر) بی‌بعد تعیین کنید.

۸-۱۶۲ رابطه سنجه بازده مسألهٔ ۸-۱۶۱ به شرط سیاه بودن صفحه‌ها چیست؟

۸-۱۶۳ نوارهای فلزی نازکی که با برق گرمادیده‌اند مطابق شکل به طور افقی آرایش داده شده‌اند. یک پروانه، هوایی به دمای 20°C را درعرض نوارها با سرعت جریان آزاد $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌وزاند. مجموعه نیز در 20°C به هوای اتاق می‌تابد. شکل‌بندی مناسبی برای انتشار $3\ \text{kW}$ به طریق جابه‌جایی و تابش به‌دست آورید. طول نوار، تعداد نوارهای گرم‌کن، دماهای گرم‌کن و خواص بازتابی را مشخص کنید. تمام فرض‌ها را بیان کنید.



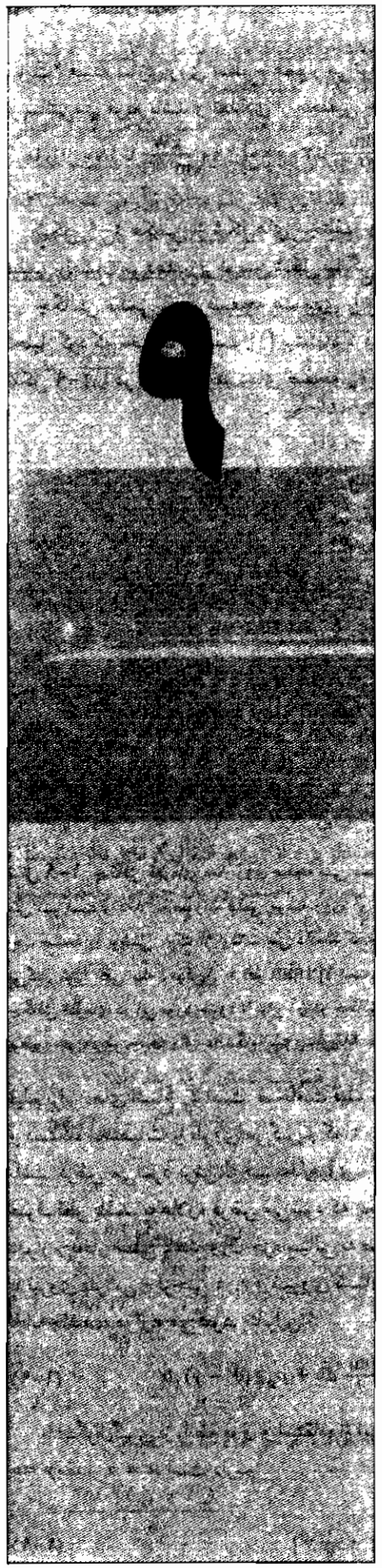
شکل م ۸-۱۶۳.

۸-۱۶۴ فردی در اتاق کوچکی قرار دارد که دمای هوای آن 20°C و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی آن $h = 8\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}$ است. دمای دیوارهای اتاق 0°C است. انرژی ازدست‌رفته از فرد را به طریق ترکیب جابه‌جایی و تابش حساب کنید به شرطی که دمای سطح بدن 25°C باشد. مسأله را برای دمای دیوار 20°C تکرار کنید. فرض کنید دیوار با ماده خیلی بازتابنده‌ای روکش شده‌است. این روکش چه اثری بر محاسبه دارد؟ از طرف دیگر فرض کنید لباس فرد با ماده‌ای تابنده روکش شده است. این روکش چگونه بر محاسبه اثر می‌گذارد؟ تمام فرض‌ها را به روشنی بیان کنید.

❑ مراجع

1. Sears, F. W.: "Introduction to Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Mechanics," pp. 123-124, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1953.
2. Dunkle, R. V.: Thermal Radiation Tables and Applications, *Trans. ASME,* vol. 76, p. 549, 1954.
3. Mackey, C. O., L. T. Wright, Jr., R. E. Clark, and N. R. Gay: Radiant Heating and Cooling, part I, *Cornell Univ. Eng. Exp. Stn. Bull.,* vol. 32, 1943.
4. Chapman, A. J.: "Heat Transfer," pp. 319-323, The Macmillan Company, New york, 1960.
5. Hamilton, D. C., and W. R. Morgan: Radiant Interchange Configuration Faetors, *NACA Tech. Note* 2836, 1952.
6. Eckert, E. R. G., and R. M. Drake: "Heat and Mass Transfer," 2d ed., pp. 381-393, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
7. McAdams, W. H.: "Heat Transmission, 3d ed., chap. 2, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
8. Schmidt, E.: Messung der Gesamtstrahlung das Wasserdampfes bei Temperaturen bis 1000C, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.,* vol. 3, p. 57, 1932.
9. Schmidt, E., and E. R. G. Eckert: Über die Richtungsverteilung der Wärmestrahlung von Oberflachen, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.,* vol. 6, p. 175, 1935.
10. Sparrow, E. M., and R. D. Cess: "Radiation Heat Transfer." Wadsworth Publishing Co., Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966.
11. Wiebelt, J. A.: "Engineering Radiation Heat Transfer," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1966.
12. Eekert, E. R. G., and E. E. M. Sparrow: Radiative Heat Exehange between Surfaces With Specular Reflection, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 3, pp. 43-54, 1961.
13. Sparrow, E. M., E. R. G. Eckert, and V. K. Jonsson: An Enclosure Theory for Radiative Exchange between Specular and Diffusely Refleeting Surfaces, *J. Heat Transfer, ser.* C.,vol. 84, pp. 294-299, 1962.
14. Gubareff, G., G., J. E. Janssen, and R. H. Torborg: "Thermal Radiation Properties Survey," 2d ed., Minneapolis Honywell Regulator Co., Minneapolis, Minn., 1960.
15. Threlkeld, J. L., and R. C. Jordan: Direct Solar Radiation Available on Clear Days, *ASHAE Trans.,* vol. 64, pp. 45-56, 1958.
16. Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
17. Birkebak, R. D., and E. R. G. Eekert: Effects of Roughness of Metal Surfaces on Angular Distribution of Monochromatic Radiation, *J. Heat Transfer,* vol. 87, p. 85, 1965.
18. Torrance, K. E., and E. M. Sparrow: Off Specular Peaks in Directional Distribution of Refleeted Thermal Radiation, *J. Heat Transfer,* vol. 88, p. 223, 1966.
19. Hering, R. G., and T,. F. Smith: Surface Roughness Effects on Radiant Transfer between Surfaces, Int. *J. Heat Mass Transfer,* vol. 13, p. 725, 1970.
20. Oppenheim, A. K.: Radiation Analysis by the Network Method, *Trans. ASME,* vol. 78, pp. 725-735, 1956.
21. Holman, J. P.: Radiation Networks for Specular-Diffuse Transmitting and Reflecting Surfaces, *ASME Pap.* 66 WA/HT-9, December 1966.

22. Hottel, H. C.: Radiant Heat Transmission, chap. 4, in W. H. McAdams, "Heat Transmission," 3d ad., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
23. Hottel, H. C., and A. F. Sarofim: "Radiative Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
24. Siegel., R., and J. R. Howell: "Thermal Radiation Heat Transfer, "2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.
25. EcKert, E. R. G., and R. M. Drake: "Analysis of Heat and Mass Transfer, "McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
26. Dunkle, R. V.: "Geometric Mean Beam Lengths for Radiant Heat Transfer Calculations," *J. Heat Transfer,* vol. 86, p. 75, February 1964.
27. Edwards, D. K., and K. E. Nelson, "Rapid Calculation of Radiant Energy Transfer between Nongray Walls and Isothermal H_2O and CO_2 Gas," *J. Heat Transfer,* vol. 84, p. 273, 1962.
28. Edwards, D. K.: Radiation Interchange in a Nongray Enclosure Containing an Isothermal Carbon Dioxide-Nitrogen Gas Mixture, *J. Heat Transfer,* vol. 84, p. 1, 1962.
29. Hottel, H. C., and R. B. Egbert: Radiant Heat Transmission From Water Vapor, *Trans. AIChE,* vol. 38, p. 531, 1942.
30. Kondratyev, K. Y.: "Radiative Heat Exchange in the Atmosphere," Pergamon Press, New York, 1965.
31. Duffie, J. A., and W. A. Beckman: "Solar Energy Thermal Process, "John Wiley & Son, Inc., New York, 1974.
32. Howell, J. R.: "A Catalog of Radiation Configuration Factors," McGraw-Hill Book Com-pany, New York, 1982.



انتقال گرما در چگالش و جوش

۹-۱ مقدمه

در بحث‌های قبلیِ انتقال گرمای جابه‌جایی به بررسی سیستم‌های تک‌فاز همگن پرداختیم. فرآیندهای جابه‌جایی مربوط به تغییر فاز سیال به همان اهمیت است. دو نمونهٔ خیلی مهم آن پدیده‌های چگالش و جوش است اما انتقال گرمای همراه با تغییرات فاز گاز - جامد به دلیل چند کاربرد اهمیت دارد.

در بسیاری از چرخه‌های قدرت یا تبرید می‌خواهند تغییر بخار به مایع یامایع به بخار بسته به قسمت خاص چرخه مورد مطالعه، را بدانند. این تغییرات با جوش یا چگالش انجام می‌شود و مهندس باید این فرآیندها را به خاطر طرح وسایل انتقال گرمای مناسب، درک کند. معمولاً آهنگ انتقال گرما در جوش و چگالش بالاست و از این رو طراحان مبدل‌های گرمایی فشرده به سوی استفاده از این پدیده‌ها درکارهای گرمایش یا سرمایشی کشیده می‌شوند که ضرورتاً مربوط به سیکل‌های قدرت نیز نمی‌شوند.

۹-۲ پدیده‌های انتقال گرمای چگالشی

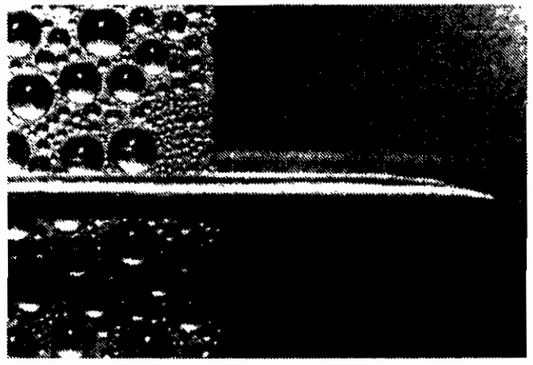
صفحه تختی عمودی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۹-۱ در معرض بخار قابل چگالش قرار دارد. اگر دمای صفحه کم‌تر از دمای اشباع بخار باشد، روی سطح، آب چگالیده تشکیل شده، با نیروی ثقل به پایین صفحه جاری خواهد شد. اگر مایع سطح را مرطوب کند، فیلم همواری تشکیل می‌شود و این فرآیند را ***چگالش فیلمی*** می‌نامند. اگر مایع سطح را مرطوب نکند، قطراتی تشکیل می‌شود که به طور نامنظم از روی سطح پایین می‌افتند. این فرآیند را ***چگالش قطره‌ای*** می‌نامند. در فرآیند چگالش فیلمی، سطح با فیلمی پوشانده می‌شود که در حین پایین آمدن از صفحه ضخیم‌تر می‌شود. در این فیلم گرادیان دما وجود دارد و فیلم مقاومتی گرمایی در مقابل انتقال گرما است. در چگالش قطره‌ای بخش بزرگی از سطح صفحه مستقیماً در معرض بخار است؛ در این حالت مانع فیلمی در مقابل جریان گرما وجود ندارد و آهنگ انتقال گرما بیش‌تر است. در حقیقت، آهنگ انتقال گرما در چگالش قطره‌ای ممکن است ده برابر چگالش فیلمی باشد.

چون آهنگ انتقال گرما در چگالش قطره‌ای بیش‌تر است آن را بر چگالش فیلمی ترجیح می‌دهند، ولی ایجاد این نوع چگالش خیلی مشکل است زیرا بسیاری از سطوح پس از آنکه مدت زیادی در معرض بخار چگالنده قرار گیرند، مرطوب می‌شوند. برای ایجاد چگالش قطره‌ای از روکش‌های سطح مختلف و مواد افزودنی به بخار استفاده شده است. ولی این روش‌ها تاکنون با موفقیتی کلی روبه‌رو نبوده‌اند. اشمیت *Schmidt* [۲۶] بعضی کارهای اولیه در مورد چگالش قطره‌ای را انجام داده، خلاصهٔ خوبی از مسأله کلی در مرجع ۲۷ ارائه شده است. اندازه‌گیری‌های مرجع ۳۵ نشان می‌دهد که هدایت قطره‌ای مقاومت اصلی در مقابل جریان گرما در فشار جو و بالاتر از آن است. چگالی

سایت* هسته سازی روی سطوح هموار می‌تواند برابر ۱۰۸ سایت بر سانتی‌متر مربع باشد و تعدادی از محققین حدود ضرایب انتقال گرما را از ۱۷۰ تا ۲۹۰ $\left[\frac{kW}{m^2.°C}\right]$ (۳۰۰۰۰ تا ۵۰۰۰۰ $\left[\frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$) گزارش کرده‌اند.

شکل ۹-۱ عکسی از شکل‌های مختلف چگالش قطره‌ای و فیلمی را نشان می‌دهد. زیر نویس شکل بیانگر این پدیده‌هاست.

چگالش فیلمی روی صفحه عمودی را می‌توان به روشی تحلیل کرد که نخست نوسلت [۱] پیشنهاد کرد. دستگاه مختصات شکل ۹-۲ را در نظر بگیرید. دمای صفحه T_w و دمای بخار در لبهٔ



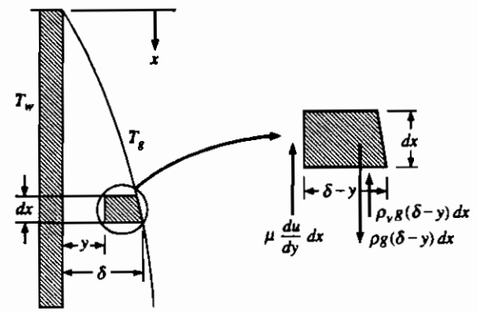
شکل ۹-۱ چگالش قطره‌ای بخار روی صفحهٔ مسی سمت راست صفحه از جنس مس تمیز است و بخار به صورت فیلمی پیوسته روی آن چگالیده می‌شود. سمت چپ صفحه را پوششی نازک از اولئات مس داده‌اند که چگالش قطره‌ای را زیاد می‌کند. شیئی افقی میله ترموکوپل به قطر ۱/۷ mm است. ضریب انتقال گرما در چگالش قطره‌ای در این مورد حدود ۷ برابر آن در چگالش فیلمی است. (عکس از پرفسور جی. دبلیو. وست واتر، دانشگاه ایلینویز، اوربانا اقتباس شده است).

فیلم برابر دمای اشباع T_g است. ضخامت فیلم را با δ نشان می‌دهیم و دستگاه مختصات را طوری می‌گیریم که x مثبت به سمت پایین باشد. فرض می‌شود برش لزجی بخار روی فیلم در $y = \delta$ قابل صرف‌نظر باشد. به‌علاوه فرض می‌شود که پخش دما بین شرایط دیوار و بخار خطی باشد. وزن جزء سیالی به ضخامت dx بین y و δ با نیروی برشی - لزجی در y و نیروی شناوری ناشی از بخار جابه‌جاشده، موازنه می‌شود. بنابراین:

$$\rho g(\delta - y)\,dx = \mu\,\frac{du}{dy}\,dx + \rho_v g(\delta - y)\,dx \qquad (۱-۹)$$

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ فوق و استفاده از این شرایط مرزی که در $y = ۰$ مقدار $u = ۰$ است داریم:

$$u = \frac{(\rho - \rho_v)g}{\mu}\left(\delta y - \frac{۱}{۲}y^۲\right) \qquad (۲-۹)$$



شکل ۹-۲ چگالش فیلمی روی صفحه تخت عمودی.

جریان جرمی چگالیده در هر موقعیت x این فیلم برابر است با:

$$\text{جریان جرمی} = \dot{m} = \int_۰^{\delta} \rho\left[\frac{(\rho - \rho_v)g}{\mu}\left(\delta y - \frac{۱}{۲}y^۲\right)\right] dy$$

$$= \frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^۳}{۳\mu} \qquad (۳-۹)$$

که فرض کرده‌ایم عمق واحد باشد. انتقال گرما در دیوار در مساحت dx برابر است با:

$$q_x = -\mathrm{k}\,dx\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=۰} = k\,dx\,\frac{T_g - T_w}{\delta} \qquad (۴-۹)$$

چون فرض کرده‌ایم که نیم‌رخ دما خطی است. ضمن پیش‌روی جریان از x به $x + dx$، به دلیل ورود چگالیده بیش‌تر، ضخامت از δ به $\delta + d\delta$ می‌رسد. مقدار چگالیده افزوده بین x و $x + dx$ برابر است با:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^۳}{۳\mu}\right]dx = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^۳}{۳\mu}\right]\frac{d\delta}{dx}\,dx$$

$$= \frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^۲\,d\delta}{\mu}$$

گرمای دریافتی توسط دیوار باید مساوی این نمو جریان جرمی ضرب در گرمای نهان چگالش بخار باشد. پس:

$$\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^۲\,d\delta}{\mu}\,h_{fg} = k\,dx\,\frac{T_g - T_w}{\delta} \qquad (۵-۹)$$

از معادلهٔ (۹-۵) انتگرال‌گیری می‌کنیم و از این شرط مرزی استفاده می‌کنیم که در $x = ۰$ مقدار $\delta = ۰$ است. داریم:

$$\delta = \left[\frac{۴\mu kx\,(T_g - T_w)}{gh_{fg}\rho\,(\rho - \rho_v)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۶-۹)$$

حال می‌توان ضریب انتقال گرما را چنین نوشت:

$$h\,dx\,(T_w - T_g) = -\,k\,dx\,\frac{T_g - T_w}{\delta}$$

* Site محل هر چیز و در اینجا محل هستهٔ بلور است.

یا:

$$h = \frac{k}{\delta}$$

بنابراین:

$$h_x = \left[\frac{\rho\,(\rho - \rho_v)gh_{fg}\,k^۳}{۴\mu\,x\,(T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۷-۹)$$

با بیان معادله فوق بر حسب عدد نوسلت به صورت بی‌بعد داریم:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} = \left[\frac{\rho\,(\rho - \rho_v)\,g h_{fg}\,x^۳}{۴\mu k\,(T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۸-۹)$$

مقدار متوسط ضریب انتقال گرما را می‌توان با انتگرال‌گیری در طول صفحه به‌دست آورد:

$$\bar{h} = \frac{۱}{L}\int_۰^L h_x\,dx = \frac{۴}{۳}h_{x=L} \qquad (۹-۹)$$

یا:

$$\bar{h} = ۰/۹۴۳\left[\frac{\rho\,(\rho - \rho_v)\,g h_{fg}\,k_f^۳}{L\mu_f\,(T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۱۰-۹)$$

روزنو Rohsenow [۳۷] تحلیل‌های دقیق‌تر چگالش فیلمی را به طور مشروح ارائه کرده است. در تحلیل‌های خیلی دقیق، نیم‌رخ دمای فیلم را غیرخطی گرفته، در معادله انرژی اصلاحاتی انجام داده، انرژی مصرفی برای خنک کردن فیلم تا دمای زیر دمای اشباع را نیز به‌حساب می‌آورند. هر دو اثر فوق را می‌توان با گذاشتن h_{fg}' به جای h_{fg} که چنین تعریف می‌شود اعمال کرد:

$$h_{fg}' = h_{fg} + ۰/۶۸c\,(T_g - T_w) \qquad (۱۱-۹)$$

که c گرمای ویژه مایع است. به هرحال خواص معادلهٔ (۹-۷) و (۹-۱۰) باید در دمای فیلم باشند:

$$T_f = \frac{T_g + T_w}{۲}$$

با این جای‌گذاری می‌توان معادلهٔ (۹-۱۰) را برای صفحات عمودی و استوانه‌ها و سیالاتی با $\mathrm{Pr} > ۰/۵$ و $\frac{cT}{h_{fg}} \leq ۱/۰$ به‌کار برد. نوسلت برای چگالش فیلمی آرام روی لوله‌های افقی رابطه زیر را به‌دست آورد:

$$\bar{h} = ۰/۷۲۵\left[\frac{\rho\,(\rho - \rho_v)\,g\,h_{fg}\,k_f^۳}{\mu_f d\,(T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۱۲-۹)$$

که d قطر لوله است. وقتی چگالش روی رشته n لوله‌ای افقی صورت گیرد که مستقیماً به طور عمودی روی هم گذاشته شده‌اند، ضریب انتقال گرما را می‌توان با عوض کردن قطر در معادله (۹-۱۲) با nd محاسبه کرد. تحلیل مرجع ۴۸ نشان می‌دهد که می‌توان معادلهٔ (۹-۱۲) را برای کره‌ای هم‌دما به کار برد به شرطی که مقدار ثابت را به ۰/۸۱۵ تغییر دهیم.

وقتی صفحه‌ای که روی آن چگالش صورت می‌گیرد خیلی بزرگ باشد و یا اینکه مقدار جریان چگالیده کافی باشد، ممکن است در فیلم چگالیده ناآرامی ظاهر شود. این ناآرامی موجب بالا رفتن آهنگ انتقال گرما می‌شود. مثل مسائل جریان جابه‌جایی اجباری، محک تعیین آرام یا ناآرام بودن جریان، عدد رینولدز است که برای سیستم چگالش چنین تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{D_H \rho V}{\mu_f} = \frac{۴A\rho V}{P\,\mu_f}$$

که D_H = قطر هیدرولیکی

A = سطح جریان

P = محیط برش یا «مرطوب شده»

V = سرعت متوسط در جریان

ولی:

$$\dot{m} = \rho AV$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{۴\dot{m}}{P\mu_f} \qquad (۱۳-۹)$$

که $\dot{m}$ جریان جرمی در مقطع خاصی از فیلم چگالیده است. برای صفحه عمودی به عمق واحد، $P = ۱$؛ برای لوله عمودی، $P = \pi d$ است. عدد رینولدز بحرانی تقریباً برابر ۱۸۰۰ است و در اعداد رینولدز بیش از این مقدار باید از روابط انتقال گرمای ناآرام استفاده کرد. گاهی عدد رینولدز را بر حسب جریان جرمی واحد عمق صفحه Γ تعریف می‌کنند، بنابراین:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{۴\Gamma}{\mu_f} \qquad (۱۴-۹)$$

در محاسبه اعداد رینولدز می‌توان جریان جرمی را به صورت زیر به انتقال گرمای کل و ضریب انتقال گرما ربط داد:

$$q = \bar{h}A\,(T_{sat} - T_w) = \dot{m}h_{fg} \qquad (۱۵-۹)$$

که A مساحت کل انتقال گرما است. بنابراین:

$$\dot{m} = \frac{q}{h_{fg}} \quad \frac{\bar{h}A\,(T_{sat} - Ts_w)}{h_{fg}}$$

$$\mathrm{Re}_f = \frac{۴\bar{h}A\,(T_{sat} - T_w)}{h_{fg}\,P\mu_f} \qquad (۱۶-۹)$$

ولی:

$$A = LW \qquad \text{و} \qquad P = W$$

که L و W به ترتیب ارتفاع و عرض صفحه‌اند. بنابراین:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{۴\bar{h}L\,(T_{sat} - T_w)}{h_{fg}\,\mu_f} \qquad (۱۷-۹)$$

تا زمانی که لایه هموار و خوش‌رفتار باشد معادلات چگالش آرام فوق خیلی‌خوب با داده‌های تجربی هماهنگی دارد. در عمل مشاهده شده که به ازای اعداد رینولدز ۳۰ یا ۴۰ موجک‌هایی در ، فیلم تشکیل شده‌اند. در این حالت مقادیر تجربی $\bar{h}$، ۲۰ درصد بیش‌تر از مقدار آن از معادلهٔ (۹-۱۲) است. از آنجا که این اتفاق معمولاً پیش می‌آید مک‌آدامز [۳] تهییج شده، پیشنهاد کرد آن را ۲۰ درصد در طراحی افزایش دهند. ما در بحث‌های خود از معادلهٔ (۹-۱۰) استفاده کرده، این ضریب را افزایش نمی‌دهیم و فکر می‌کنیم که این روش محتاطانه است و در مسائل طراحی، ضریب اطمینانی خواهد بود. چنان‌چه کسی بخواهد این ضرایب را ۲۰ درصد افزایش دهد، معادله حاصل برای صفحات عمودی چنین می‌شود:

$$\bar{h} = ۱/۱۳ \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) g h_{fg} K^۳}{L\mu (T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۹-۱۸)$$

چنان‌چه بخار مورد چگالش، فوق گرم باشد، می‌توان معادلات سابق را برای محاسبه ضریب انتقال گرما به کار برد به شرطی که مقدار جریان گرما بر اساس اختلاف دمای سطح و دمای اشباع فشار سیستم محاسبه شود. وقتی گازی غیر قابل چگالش همراه بخار باشد، مانعی بر سر راه انتقال گرما وجود دارد زیرا بخار قبل از چگالیدن روی سطح باید در گاز نفوذ کند. برای کسب اطلاع بیش‌تر در این زمینه به مراجع ۳ و ۴ رجوع کنید.

سطوح مایل

چنان‌چه صفحه یا استوانه مایل و با افق زاویه ϕ بسازد، اثر خالص آن در تحلیل فوق آن است که به‌جای نیروی ثقل مؤلفه موازی با سطح انتقال گرمای آن را قرار دهیم، یا:

$$g' = g \sin\phi \qquad (۹-۱۹)$$

بنابراین، برای جریان آرام پیشنهاد می‌کنیم که سطوح مایل را صرفاً با توجه به جای‌گزینی معادلهٔ (۹-۱۹) بررسی کنیم.

❑ ۹-۳ عدد چگالش

چون عدد رینولدز فیلم در تعیین رفتار چگالش خیلی مهم است، بهتر است ضریب انتقال گرما را مستقیماً برحسب Re بیان کنیم. اثر مایل بودن را نیز در نظر گرفته معادلات انتقال گرما را چنین می‌نویسیم:

$$\bar{h} = C \left[\frac{\rho (\rho - \rho_v) k^۳ g \sin \phi\, h_{fg}}{\mu L (T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۹-۲۰)$$

که مقدار ثابت، برای صفحه یا استوانه ارزیابی می‌شود. از معادلهٔ (۹-۱۵) مقدار $T_g - T_w$ را به‌دست می‌آوریم:

$$T_g - T_w = \frac{\dot{m} h_{fg}}{\bar{h} A} \qquad (۹-۲۱)$$

که A مجدداً مساحت سطح انتقال گرما است. با جای‌گزینی معادلهٔ (۹-۲۱) در (۹-۲۰) $\bar{h}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{h}^{۴} = C \left[\frac{\rho (\rho - \rho_v) g \sin\phi\, k^۴ \frac{A}{L}}{\mu \dot{m}}\right]^{۱} \qquad (۹-۲۲)$$

که می‌توان آن را چنین بازنویسی کرد:

$$\bar{h}^{۴} = C \left[\frac{\rho (\rho - \rho_v) g k^۴}{\mu^۲} \frac{\mu P}{۴\dot{m}} \frac{۴ \sin\phi \frac{A}{P}}{L}\right]^{۱}$$

مقدار $\bar{h}$ را از آن به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{h} = C^{\frac{۱}{۴}} \left[\frac{\rho (\rho - \rho_v) g k^۴}{\mu^۲} \frac{\mu P}{۴\dot{m}} \frac{۴ \sin\phi \frac{A}{P}}{L}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۹-۲۳)$$

اکنون گروه بی‌بعد جدید یعنی **عدد چگالش** Co را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Co} = \bar{h} \left[\frac{\mu^۲}{k^۳ \rho (\rho - \rho_v) g}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۹-۲۴)$$

بنابراین معادلهٔ (۹-۲۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathrm{Co} = C^{\frac{۱}{۴}} \left(\frac{۴ \sin\phi \frac{A}{P}}{L}\right)^{\frac{۱}{۴}} \mathrm{Re}_f^{-\frac{۱}{۴}} \qquad (۹-۲۵)$$

برای صفحهٔ عمودی $\frac{A}{PL} = ۱/۰$ و با استفاده از ثابت معادلهٔ (۹-۱۰) داریم:

$$\mathrm{Co} = ۱/۴۷\ \mathrm{Re}_f^{-\frac{۱}{۴}} \quad \text{برای} \quad \mathrm{Re}_f < ۱۸۰۰ \qquad (۹-۲۶)$$

برای استوانه افقی $\frac{A}{PL} = \pi$ و:

$$\mathrm{Co} = ۱/۵۱۴\ \mathrm{Re}_f^{-\frac{۱}{۴}} \quad \text{برای} \quad \mathrm{Re}_f < ۱۸۰۰ \qquad (۹-۲۷)$$

اگر ناآرامی‌ای در فیلم وجود داشته باشد می‌توان از رابطه تجربی کرکبراید Kirkbride [۲] استفاده کرد:

$$\mathrm{Co} = ۰/۰۰۷۷\ \mathrm{Re}_f^{۰/۴} \quad \text{برای} \quad \mathrm{Re}_f > ۱۸۰۰ \qquad (۹-۲۸)$$

❑ ۹-۴ چگالش فیلمی داخل لوله‌های افقی

تا اینجا بحث چگالش فیلمی به سطوح بیرونی محدود بود که در آن جریان‌های بخار و مایع چگالیده توسط بعضی از ابعاد کلی کانال - جریان محدود نشده‌اند. چگالش داخل لوله‌ها از نظر عملی بسیار قابل توجه است زیرا در چگالنده‌های سیستم‌های تبرید و تهویه مطبوع کاربرد دارد، ولی متأسفانه این پدیده‌ها خیلی

پیچیده‌اند و نمی‌توان بررسی تحلیلی ساده‌ای از آنها به‌عمل آورد. آهنگ جریان کلی بخار شدیداً بر آهنگ انتقال گرما در سیستم چگالش - جابه‌جایی اجباری اثر می‌گذارد و این آهنگ به نوبهٔ خود تحت تأثیر آهنگ تجمع مایع روی دیوارها قرار دارد. چون این پدیده جریان پیچیده است تنها دو رابطهٔ تجربی برای انتقال گرما ارائه و خواننده را برای کسب اطلاع کامل‌تر به روزنو [۳۷] رجوع می‌دهیم.

چاتو [۳۸] رابطهٔ زیر را برای چگالش مبردها در سرعت‌های بخار پایین داخل لوله‌های افقی به‌دست آورد:

$$\bar{h} = ۰/۵۵۵ \left[\frac{\rho (\rho - \rho_v) g k^۳ h_{fg}'}{\mu d (T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۹-۲۹)$$

این معادله محدود به اعداد رینولدز بخار پایین است به‌طوری که:

$$\mathrm{Re}_v = \frac{dG_v}{\mu_v} < ۳۵۰۰۰ \qquad (۹-۳۰)$$

که Re_v در شرایط **ورودی** به لوله ارزیابی می‌شود. برای آهنگ‌های جریان بالاتر آکرز Akers، دینز Deans و کراسر Crosser [۳۹] رابطهٔ تجربی تقریبی زیر را ارائه کرده‌اند:

$$\frac{\bar{h} d}{k_f} = ۰/۰۲۶\ \mathrm{Pr}_f^{\frac{۱}{۳}}\ \mathrm{Re}_m^{۰/۸} \qquad (۹-۳۱)$$

که در اینجا Re_m عدد رینولدز مخلوط است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Re}_m = \frac{d}{\mu_f} \left[G_f + G_v \left(\frac{\rho_f}{\rho_v}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right] \qquad (۹-۳۲)$$

سرعت‌های جرمی مایع G_f و بخار G_v طوری حساب می‌شوند که گویی هر یک تمام سطح جریان را اشغال کرده‌اند. معادلات (۹-۳۱) داده‌های تجربی را تا حدود ۵۰ درصد همبسته می‌کنند وقتی که:

$$\mathrm{Re}_v = \frac{dG_v}{\mu_v} > ۲۰۰۰۰ \qquad \mathrm{Re}_f = \frac{dG_f}{\mu_f} > ۵۰۰۰$$

مثال ۹-۱ چگالش روی صفحهٔ عمودی

صفحه مربعی عمودی به ابعاد ۳۰ cm × ۳۰ در معرض بخار به فشار جو است. دمای صفحه ۹۸°C است. مقدار انتقال گرما و جرم بخار چگالیده شده در ساعت را حساب کنید.

حل :

برای تعیین اینکه آیا فیلم چگالیده آرام است یا ناآرام، باید عدد رینولدز را بررسی کرد. خواص در دمای فیلم ارزیابی می‌شوند:

$$T_f = \frac{۱۰۰ + ۹۸}{۲} = ۹۹°\mathrm{C} \qquad \rho_f = ۹۶۰ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^۳}$$

$$\mu_f = ۲/۸۲ \times ۱۰^{-۴} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}} \qquad k_f = ۰/۶۸ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m.°C}}$$

برای این مسأله چگالی بخار در مقایسه با چگالی مایع خیلی کوچک است و حق داریم جای‌گزینی زیر را انجام دهیم:

$$\rho_f (\rho_f - \rho_v) \approx \rho_f^۲$$

ضمن کوشش برای محاسبه عدد رینولدز درمی‌یابیم که این عدد به مقدار جریان جرمی چگالیده بستگی دارد. ولی این مقدار جریان به ضریب انتقال گرما بستگی دارد که خود به عدد رینولدز وابسته است. برای حل مسأله، جریان را آرام یا ناآرام در نظر گرفته، انتقال گرما را حساب و سپس عدد رینولدز را بررسی می‌کنیم تا ببینیم آیا فرض ما درست بوده است. به فرض چگالش فیلمی آرام است. در فشار جو داریم:

$$T_{\text{اشباع}} = ۱۰۰°\mathrm{C} \qquad h_{fg} = ۲۲۵۵ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

$$\bar{h} = ۰/۹۴۳ \left[\frac{\rho_f^۲ g h_{fg} k_f^۳}{L \mu_f (T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= ۰/۹۴۳ \left[\frac{(۹۶۰)^۲ (۹/۸) (۲/۲۵۵ \times ۱۰^۶) (۰/۶۸)^۳}{(۰/۳) (۲/۸۲ \times ۱۰^{-۴}) (۱۰۰ - ۹۸)}\right]^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= ۱۳۱۵۰ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^۲.°\mathrm{C}} \left[۲۳۱۶ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h.ft}^۲.°\mathrm{F}}\right]$$

حال عدد رینولدز را از معادلهٔ (۹-۱۷) به‌دست می‌آوریم، داریم:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{۴hL (T_{sat} - T_w)}{h_{fg} \mu_f}$$

$$= \frac{(۴) (۱۳۱۵۰) (۰/۳) (۱۰۰ - ۹۸)}{(۲/۲۵۵ \times ۱۰^۶) (۲/۸۲ \times ۱۰^{-۴})} = ۴۹/۶$$

بنابراین فرض آرام بودن درست است. اکنون مقدار انتقال گرما را از فرمول زیر به‌دست می‌آوریم:

$$q = \bar{h} A (T_{\text{اشباع}} - T_w) = (۱۳۱۵۰) (۰/۳)^۲ (۱۰۰ - ۹۸)$$

$$= ۲۳۶۷ \text{ W} \left[۸۰۷۹ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h}}\right]$$

جریان جرمی کل چگالیده برابر است با:

$$\dot{m} = \frac{q}{h_{fg}} = \frac{۲۳۶۷}{۲/۲۵۵ \times ۱۰^۶} = ۱/۰۵ \times ۱۰^{-۳} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

$$= ۳/۷۸ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}} \left[۸/۳۳ \frac{\mathrm{lb}_m}{\mathrm{h}}\right]$$

مثال ۹-۲ چگالش روی رشته لوله

صد لوله به قطر $۰/۵۰in.$ (۱/۲۷ cm) به شکل مربع آرایش یافته، در معرض بخار به فشار جو قرار دارند. جرم بخار چگالیده واحد طول لوله‌ها را برای دمای دیواره ۹۸°C حساب کنید.

حل :

خواص چگالیده را از مثال ۹-۱ به‌دست می‌آوریم. برای حل از معادله (۹-۱۲) استفاده کرده، به‌جای d مقدار nd را قرار می‌دهیم که $n = ۱۰$ است. بنابراین:

$$\bar{h} = ۰/۷۲۵ \left[\frac{\rho_f^۲ g h_{fg} k_f^۳}{\mu_f n d (T_g - T_w)}\right]^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= ۰/۷۲۵ \left[\frac{(۹۶۰)^۲(۹/۸)(۲/۲۵۵\times۱۰^۶)(۰/۶۸)^۳}{(۲/۸۲\times۱۰^{-۲})(۱۰)(۰/۰۱۲۷)(۱۰۰-۹۸)}\right]^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= ۱۲۵۴۰ \frac{W}{m^۲.°C}\left[۲۲۰۹ \frac{Btu}{h.ft^۲.°F}\right]$$

مساحت کل برابر است با:

$$\frac{A}{L} = n\,\pi d = (۱۰۰)\pi(۰/۰۱۲۷) = ۳/۹۹ \frac{m^۲}{m}$$

بنابراین مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$\frac{q}{L} = h\frac{A}{L}(T_g - T_w)$$
$$= (۱۲۵۴۰)(۳/۹۹)(۱۰۰-۹۸) = ۱۰۰/۰۷ \frac{kW}{m}$$

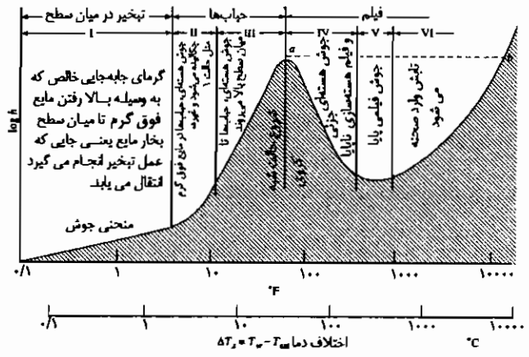
بنابراین جریان جرمی کل چگالیده برابر است با:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \frac{\frac{q}{L}}{h_{fg}} = \frac{۱/۰۰۰۷\times۱۰^۵}{۲/۲۵۵\times۱۰^۶} = ۰/۰۴۴۴ \frac{kg}{s}$$
$$= ۱۵۹/۷ \frac{kg}{h}\left[۳۵۲ \frac{lb_m}{h}\right]$$

❑ ۹-۵ انتقال گرما در جوش

وقتی سطحی در تماس با مایع است و دمای سطح بیش‌تر از دمای اشباع مایع است، جوش اتفاق می‌افتد و شار گرمایی به اختلاف دمای سطح و دمای اشباع بستگی دارد. وقتی سطح گرمادیده در زیر سطح آزاد مایع غرق باشد، فرآیند را **جوش مخزنی** می‌نامند. اگر دمای مایع کم‌تر از دمای اشباع باشد، فرآیند را **جوش زیرسرد** *subcooled* **یا موضعی** می‌نامند. چنان‌چه دمای مایع برابر دمای اشباع باشد، فرآیند را **جوش اشباع یا کپه‌ای** می‌نامند.

در شکل ۹-۳ رژیم‌های مختلف جوش نشان داده شده‌اند که در آن داده‌های شار گرمایی نسبت به اختلاف دما $T_w - T_{sat}$ از سیمی پلاتینی رسم شده‌اند که به طریق الکتریکی گرم و در آب غوطه‌ور هستند. در ناحیه I جریان‌های جابه‌جایی آزاد دلیل حرکت مایع در نزدیکی سطح است. در این رژیم، مایعِ نزدیکِ سطح‌گرمادیده کمی فوق‌گرم است و پس از بالارفتن از سطح تبخیر می‌شود. مقدار انتقال گرما در این ناحیه را می‌توان با روابط جابه‌جایی آزاد فصل ۷ حساب کرد. در ناحیه II حباب‌ها روی سطح سیم شروع به تشکیل شدن کرده، پس از کنده شده از سطح در مایع پخش می‌شوند. این ناحیه آغاز **جوش هسته‌ای** را نشان می‌دهد. وقتی اختلاف دما بیش‌تر شود، حباب‌ها سریع‌تر تشکیل شده، تا سطح مایع بالا رفته، در آنجا پخش می‌شوند. این امر درناحیه III نشان داده شده است. گاهی، حباب‌ها آن‌قدر سریع تشکیل می‌شوند که سطح گرمایش را پوشانده، نمی‌گذارند مایع تازه جای آنها را بگیرد. در این نقطه حباب‌ها با هم ائتلاف می‌کنند و فیلم بخار تشکیل می‌دهند که سطح را می‌پوشاند. گرما باید قبل از رسیدن به مایع و انجام فرآیند جوش از این فیلم هدایت شود. مقاومت گرمایی این فیلم موجب کاهش شار گرمایی می‌شود و این پدیده در ناحیه IV، ناحیه **جوش فیلمی**، نشان داده شده است. این ناحیه نماینده گذار از جوش هسته‌ای به جوش فیلمی است و ناپایا است. بالاخره در ناحیه V با جوش فیلمی پایا روبه‌رو می‌شویم. برای آنکه جوش فیلمی پایا داشته باشیم باید دماهای سطحی بالا باشند و در این حالت ممکن است بخش اعظم گرمای از دست‌رفته از سطح ناشی از تابش گرمایی باشد - همان‌طور که در ناحیه VI مشخص شده است.



شکل ۹-۳ داده‌های شار گرمایی از سیم پلاتینی که به طریق الکتریکی گرمادیده، از فاربر Farber و اسکورا Scorah [۹].

سیمی که به طریق الکتریکی گرمادیده در نقطه a ناپایا است زیرا افزایش کوچکی در ΔT_e در این نقطه موجب کاهش شار گرمایی جوش می‌شود. ولی باز هم سیم باید همان شار گرمایی را از دست بدهد وگرنه دمای آن بالا خواهد رفت و مطابق آنچه در انتهای پایینی منحنی جوش نشان داده شده، عمل می‌کند. بالاخره، ممکن است دوباره تعادل تنها در نقطه b ناحیه جوش فیلمی برقرار شود. معمولاً این دما از دمای ذوب سیم بیش‌تر شده سیم می‌سوزد. اگر انرژی برقی داده شده را با رسیدن سیستم a سریعاً کاهش دهیم می‌توانیم جوش هسته‌ای جزئی و ناحیه فیلم ناپایا را مشاهده کنیم.

در جوش هسته‌ای، از انبساط گاز یا بخار محبوس‌شده در حفره‌های کوچک سطح، حباب‌هایی ایجاد می‌شود. حباب‌ها تا اندازه معینی، بسته به کشش سطحی در میان‌سطح مایع - بخار و دما و فشار، بزرگ می‌شوند. حباب‌ها، بسته به اختلاف دما، ممکن است روی سطح متلاشی، منبسط و یا از سطح جدا شوند و در بدنه مایع انتشار یابند و یا در دماهای به‌حد کافی بالا و قبل از انتشار تا سطح مایع بالا روند. ساز و کار اصلی انتقال گرما در جوش موضعی آشفتگی شدید در سطح انتقال گرما است که موجب آهنگ بالای انتقال گرما در جوش می‌شود. ممکن است در جوش اشباع یا کپه‌ای، حباب‌ها به دلیل کنش شناوری از سطح کنده و داخل مایع شوند. در این حالت آهنگ انتقال گرما هم تحت تأثیر آشفتگی ناشی از حباب‌ها و هم انتقال انرژی بخار به داخل مایع است.

آزمایش‌ها نشان داده‌اند که حباب‌ها همواره با مایع اطراف در تعادل ترمودینامیکی نیستند؛ یعنی، دمای بخار داخل حباب ضرورتاً برابر دمای مایع نیست. حبابی کروی را، شکل ۹-۴، در نظر بگیرید. نیروهای فشاری مایع و بخار باید با نیروی کشش - سطحی در میان‌سطح مایع - بخار موازنه شود. نیروی فشاری روی سطح $\pi r^۲$ و کشش سطحی در طول میان سطح $۲\pi r$ عمل می‌کند. موازنه نیرو چنین است:

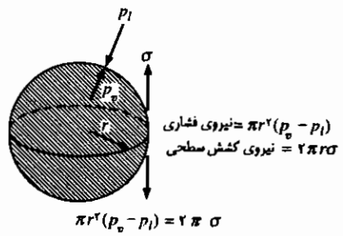
$$\pi r^۲ (p_v - p_l) = ۲\pi r \sigma$$

یا:

$$p_v - p_l = \frac{۲\sigma}{r} \qquad (۹-۳۲الف)$$

که p_v = فشار بخار داخل حباب
p_l = فشار مایع
σ = کشش سطحی میان‌سطح بخار - مایع

اکنون، حبابی را در تعادل فشاری در نظر بگیرید، یعنی حبابی که بزرگ نمی‌شود و یا از بین نمی‌رود. به فرض دمای بخار داخل حباب، دمای اشباع فشار p_v باشد. اگر مایع در دمای اشباع فشار p_l باشد، دمایش کم‌تر از دمای داخل حباب است. پس گرما باید به بیرون از حباب هدایت و بخار داخل چگالیده شود و حباب بترکد.



شکل ۹-۴ موازنه نیرو روی حباب بخار.

این پدیده وقتی صورت می‌گیرد که حباب‌ها روی سطح گرمایش یا داخل مایع بترکند. برای آنکه حباب‌ها بزرگ شده و به سطح بروند، باید گرما از مایع دریافت کنند و این مستلزم آن است که مایع در حالت فوق‌گرم باشد یعنی دمای مایع بیش‌تر از دمای بخار داخل حباب باشد. این حالت نیمه‌پایا است ولی به تجربه دیده شده است و دلیل بزرگ شدن حباب را پس از ترک سطح در بعضی نواحی جوش هسته‌ای توضیح می‌دهد.

وست‌واتر Westwater و سایرین [۱۷، ۴۰، ۴۱] مطالعات توأم با عکس‌برداری از پدیده جوش را ارائه کرده‌اند که رژیم‌های مختلف جوش را نشان می‌دهد.

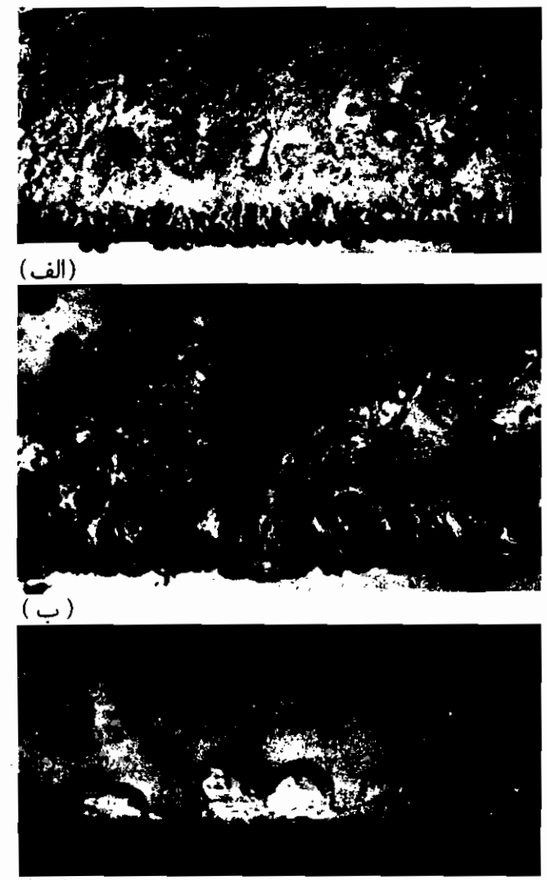
شکل ۹-۵ عکسی از چند رژیم جوش است. طرف راست میله افقی و مسی به قطر ۶/۱ mm گرما داده می‌شود و در ایزوپروپانول فرو برده می‌شود. به خاطر گرادیان دما در طول میله، مشاهده همزمان رژیم‌های مختلف ممکن است. در طرف چپ میله، دمای سطح تنها اندکی بیش‌تر از دمای کپه‌ای سیال است، بنابراین می‌توان جوش جابه‌جایی آزاد را مشاهده کرد. هر چه به سمت راست برویم، دمای سطح بیش‌تر و جوش هسته‌ای مشاهده می‌شود. اگر باز هم به سمت راست پیش رویم، جوش گذرا صورت می‌گیرد و بالاخره، جوش فیلمی در دیواره مشاهده می‌شود. به کنش پوشش‌دهی فیلم بخار در سمت راست میله توجه کنید.

شکل ۹-۵ عکس میله‌ای مسی (به قطر ۶/۱ mm) که قسمت راستش گرمادیده و در ایزوپروپانول فرو برده شده است، رژیم‌های جوش از جوش جابه‌جایی آزاد در سمت سردتر میله (چپ) تا جوش هسته‌ای، گذرا و بالاخره فیلمی در انتهای راست پیش‌رفت می‌کند. (عکس با اجازه پروفسور جی. دبلیو. وست‌واتر، دانشگاه ایلینویز، اوربانا).

در شکل ۹-۶ عکس‌های مشروح‌تر در رژیم‌های مختلف جوش را با استفاده از متانول می‌بینید. کنش نیرومند جوش هسته‌ای در شکل (۹-۶الف) نشان داده شده است. وقتی دمای سطح بیش‌تر شود حباب‌ها مثل شکل ۹-۶ ب شروع به ائتلاف کرده، جوش گذرا مشاهده می‌شود. بالاخره در دماهای باز هم بیش‌تر، سطح انتقال گرما کاملاً توسط فیلم بخار پوشیده شده، حباب‌های بزرگ بخار از سطح کنده می‌شوند. شکل ۹-۷ پدیده جوش فیلمی نیرومندتر را، برای متانول روی لوله **عمودی** نشان می‌دهد. فیلم بخار از سطح بالا می‌رود و در بالای آن شدیداً ناآرام رفتار می‌کند.

فرآیند رشد حباب پیچیده است. ولی می‌توان توضیح کیفی ساده‌ای از سازوکار فیزیکی آن ارائه کرد. رشد حباب وقتی صورت می‌گیرد که گرما از مایع به میان‌سطح مایع-بخار هدایت شود. سپس عمل تبخیر در میان‌سطح صورت می‌گیرد و حجم بخار کل را افزایش می‌دهد. از معادله (۹-۳۲الف) با فرض ثابت ماندن فشار مایع نتیجه می‌شود که فشار داخل حباب باید کاهش یابد. وقتی

فشار داخل حباب کاهش یابد دمای بخار کاهش می‌یابد و اختلاف دمای مایع و بخار، اگر حباب در همان موقعیت مکانی در مایع باقی بماند، بیش‌تر می‌شود. اما حباب می‌خواهد از سطح گرم شده بالا رود و هر چه دورتر می‌رود دمای مایع کم‌تر خواهد شد. وقتی حباب‌ها به ناحیه‌ای وارد شوند که دمای مایع کم‌تر از دمای بخار است، گرما به بیرون هدایت می‌شود و حباب از بین می‌رود. بنابراین ممکن است فرآیند رشد حباب در جایی در مایع به تعادل برسد و یا چنان‌چه مایع به حد کافی فوق گرم باشد، ممکن است حباب‌ها قبل از انتشار تا سطح مایع بالا روند.



شکل ۹-۶ جوش متانول روی لوله مسی افقی به قطر ۹/۵۳ mm که از داخل با بخار گرمادیده است. (الف) جوش هسته‌ای، $\frac{q}{A} = ۲۴۲/۵ \frac{kW}{m^۲}$، $\Delta T_x = ۳۷°C$؛ (ب) جوش گذرا، $\frac{q}{A} = ۲۱۷/۶ \frac{kW}{m^۲}$، $\Delta T_x = ۶۲°C$؛ (پ) جوش فیلمی، $\frac{q}{A} = ۴۰/۹ \frac{kW}{m^۲}$، $\Delta T_x = ۸۲°C$. (عکس‌ها از پروفسور جی. دبیلو. وست‌واتر، دانشگاه ایلینویز، اوربانا اقتباس شده است.)

در مورد اینکه دقیقاً حباب‌ها در آغاز چگونه روی سطح انتقال گرما تشکیل می‌شوند بحث بسیار است. شرایط سطح - هم صافی و هم جنس آن - می‌تواند نقش اصلی را در پدیده تشکیل و رشد حباب داشته باشد. رمز مسأله کاملاً حل نشده و موضوع تحقیق جدی است. خلاصه‌های بسیار عالی در مورد دانش انتقال گرمای

شکل ۹-۷ جوش فیلمی ناآرام متانول روی لوله مسی عمودی با بخار گرمادیده به قطر ۱۹/۰۵ mm. $\frac{q}{A} = ۳۸/۸ \frac{kW}{m^۲}$، $\Delta T_x = ۱۳۸°C$. (عکس از پروفسور جی. دبیلو. وست‌واتر، دانشگاه ایلینویز، اوربانا اقتباس شده است.)

جوش در مراجع ۱۸، ۲۳، ۴۹ و ۵۰ ارائه شده است. خواننده علاقه‌مند را برای کسب اطلاع جامع‌تر از این فصل به این مبحث‌ها رجوع می‌دهیم. والیس Wallis [۲۸] مسائل انتقال گرما در جریان دو فاز را مورد بحث قرار داده است.

قبل از ارائه روابط مخصوص برای محاسبه انتقال گرمای جوش پیشنهاد می‌شود که خواننده بحث چند صفحه قبل را مرور کند و آن را با بعضی مشاهدات تجربی ساده در مورد جوش ربط دهد. برای این منظور مطالعه دقیق فرآیند جوش در تابه آب روی اجاق آشپزخانه می‌تواند کاملاً روشن‌گر باشد.

روزنو [۵] داده‌های تجربی جوش مخزنی هسته‌ای را چنین

هم‌بسته کرد:

$$\frac{C_l \Delta T_x}{h_{fg} \mathrm{Pr}_l^{\ s}} = C_{sf} \left[\frac{\frac{q}{A}}{\mu_l h_{fg} \sqrt{\frac{g_c \sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}}} \right]^{۰/۳۳} \qquad (۹-۳۳)$$

که C_l = گرمای ویژه مایع اشباع، $\frac{J}{kg.°C}$ یا $\frac{Btu}{lb_m.°F}$

ΔT_x = اختلاف دما = $T_w - T_{sat}$، °F یا °C

h_{fg} = آنتالپی تبخیر، $\frac{J}{kg}$ یا $\frac{Btu}{lb_m}$

Pr_l = عدد پراندل مایع اشباع

$\frac{q}{A}$ = شار گرمایی واحد سطح، $\frac{W}{m^۲.°C}$ یا $\frac{Btu}{h.ft^۲}$

μ_l = لزجت مایع، $\frac{kg}{m.s}$ یا $\frac{lb_m}{h.ft}$

σ = کشش سطحی میان‌سطح بخار - مایع، $\frac{N}{m}$ یا $\frac{lb_f}{ft}$

g = شتاب ثقل، $\frac{m}{s^۲}$ یا $\frac{ft}{s^۲}$

ρ_l = چگالی مایع اشباع، $\frac{kg}{m^۳}$ یا $\frac{lb_m}{ft^۳}$

ρ_v = چگالی بخار اشباع، $\frac{kg}{m^۳}$ یا $\frac{lb_m}{ft^۳}$

C_{sf} = ثابت، تعیین شده از داده‌های تجربی

s = ۱/۰ برای آب و ۱/۷ برای سایر مایعات

مقادیر کشش سطحی در مرجع ۱۰ ارائه شده‌اند و فهرست خلاصه‌ای از کشش سطحی مایع - بخار برای آب در جدول ۹-۱ آمده است.

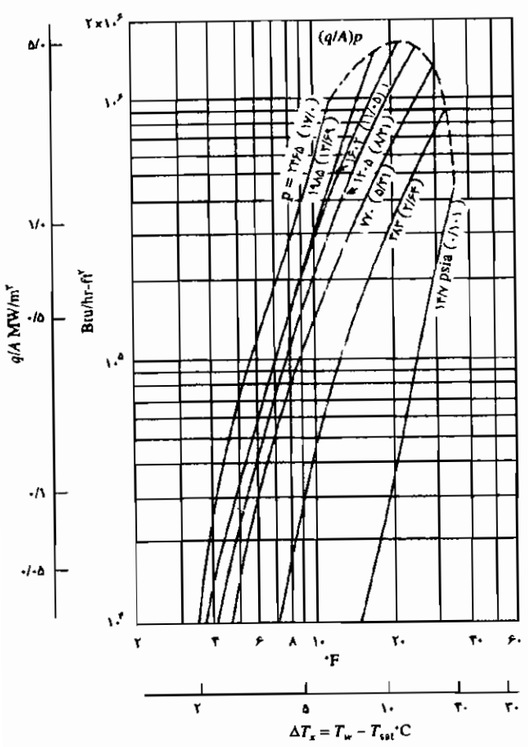
جدول ۹-۱ کشش سطحی بخار - مایع برای آب

دمای اشباع		کشش سطحی	
°C	°F	σ , $\frac{mN}{m}$	$\sigma \times ۱۰^۳ \frac{lb_f}{ft}$
۰	۳۲	۷۵/۶	۵۱/۸
۱۵/۵۶	۶۰	۷۳/۳	۵۰/۲
۳۷/۷۸	۱۰۰	۶۹/۸	۴۷/۸
۶۰	۱۴۰	۶۶/۰	۴۵/۲
۹۳/۳۳	۲۰۰	۶۰/۱	۴۱/۲
۱۰۰	۲۱۲	۵۸/۸	۴۰/۳
۱۶۰	۳۲۰	۴۶/۱	۳۱/۶
۲۲۶/۶۷	۴۴۰	۳۲/۰	۲۱/۹
۲۹۳/۳۳	۵۶۰	۱۶/۲	۱۱/۱
۳۶۰	۶۸۰	۱/۴۶	۱/۰
۳۷۴/۱	۷۰۵/۴	۰	۰

شکل تابعی معادلهٔ (۹-۳۳) از تحلیل سنجه‌های مهم در رشد و انتشار حباب تعیین شد. داده‌های تجربی جوش هسته‌ای آب روی سیم پلاتین در شکل ۹-۸ نشان داده شده‌اند و هم‌بستگی این داده‌ها با معادله روزنو در شکل ۹-۹ نشان داده شده که نشان‌گر هم‌آهنگی خوبی است. مقدار ثابت C_{sf} برای ترکیب آب - پلاتین ۰/۰۱۳ است. مقدار ثابت سایر ترکیبات سطح - مایع در جدول ۹-۲ داده شده‌اند. می‌توان از معادلهٔ (۹-۳۳) برای اشکال هندسی غیر از سیم‌های افقی استفاده کرد و به طور کلی معلوم شده است که شکل هندسی عامل مهمی در تعیین انتقال گرمای جوش مخزنی نیست، این را از قبل هم می‌دانستیم زیرا انتقال گرما عمدتاً به شکل‌گیری حباب و آشفتگی بستگی دارد که خود به مساحت سطح وابسته است و نه به شکل سطح. واکون Vachon، نیکس Nix و تنگر Tanger[۲۹] مقادیر ثابت‌های معادله روزنو را برای تعداد زیادی از ترکیبات مایع - سطح تعیین کرده‌اند. چندین کیفیت مخففه هست که بر تعیین این ثابت‌ها تأثیر می‌گذارد.

مثال ۹-۳ جوش روی صفحه برنجی

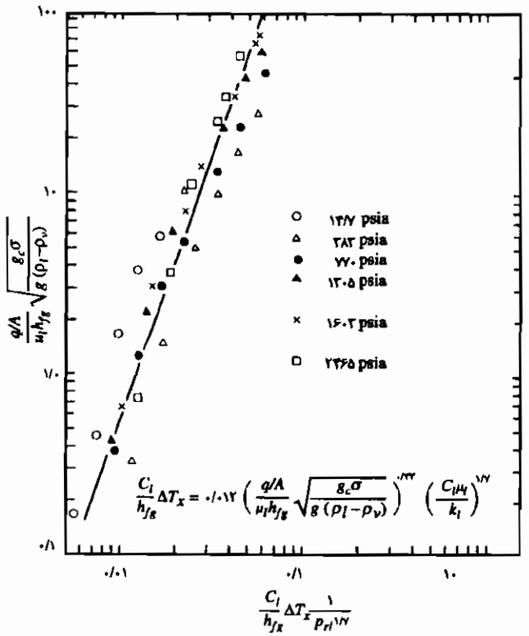
صفحه برنجی گرمادیده‌ای در ظرف آبی به فشار جو غوطه‌ور است. دمای صفحه ۲۴۲°F است. انتقال گرمای واحد سطح را حساب کنید.



شکل ۹-۸ داده‌های شار گرمایی جوش آب روی سیم پلاتینی، از مرجع ۳. اعداد داخل پرانتز فشار به MPa است.

حل :

این مسأله را می‌توان با تعیین تمام خواص معادله(۹-۳۳) و سپس تعیین شار گرمایی حل کرد. روش دیگر استفاده از داده‌های شکل ۹-۸ در رابطه با جدول ۹-۲ است. در نوشتن معادله(۹-۳۳) درمی‌یابیم که چنان‌چه شار گرمایی یک ترکیب سطح - آب خاص معلوم باشد، شار گرمایی سایر سطوح را می‌توان به سادگی بر حسب ثابت‌های C_{sf} این دو سطح تعیین کرد زیرا خواص سیال در هر فشار و دمای مشخص بدون توجه به جنس سطح یکسان‌اند.



شکل ۹-۹ هم‌بستگی داده‌های جوش مخزنی با معادله (۹-۳۳)، از روزنو [۵].

شار گرمایی ترکیب پلاتین - آب از شکل ۹-۷ برابر است با:

$$\frac{q}{A} = ۳\times۱۰^{۵}\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^{۲}}\ \left[۹۴۶/۱\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^{۲}}\right]$$

چون:

$$T_w - T_{sat} = ۲۴۲ - ۲۱۲ = ۳۰^{\circ}\text{F}\ [۱۶/۷^{\circ}\text{C}]$$

از جدول ۹-۲ داریم:

$$C_{sf} = \begin{cases} ۰/۰۱۳ & \text{برای پلاتین - آب} \\ ۰/۰۰۶ & \text{برای برنج - آب} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{برنج-آب}}}{\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{پلاتین-آب}}} = \left(\frac{C_{sf,\text{پلاتین-آب}}}{C_{sf,\text{برنج-آب}}}\right)^{۳}$$

و:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{برنج-آب}} = ۳\times۱۰^{۵}\left(\frac{۰/۰۱۳}{۰/۰۰۶}\right)^{۳}$$

$$= ۳/۴\times۱۰^{۶}\ \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^{۲}}\ \left[۱/۰۷۲\times۱۰^{۷}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^{۲}}\right]$$

☑ **جدول ۹-۲** مقادیر ضریب C_{sf} برای ترکیبات مختلف سطح - مایع

ترکیب سطح - گرمایش - سیال	C_{sf}
آب - مس *[۱۱]	۰/۰۱۳
آب - پلاتین [۱۲]	۰/۰۱۳
آب - برنج [۱۳]	۰/۰۰۶۰
آب - مس با سنباده صیقل یافته [۲۹]	۰/۰۱۲۸
آب - فولاد ضدزنگ صاف و صیقل یافته [۲۹]	۰/۰۰۸۰
آب - فولاد ضدزنگ که به‌طریق شیمیایی شیار داده شده [۲۹]	۰/۰۱۳۳
آب - فولاد ضدزنگ که به‌طریق مکانیکی صیقل یافته [۲۹]	۰/۰۱۳۲
آب - مس باسنباده صیقل یافته و با پارافین به‌عمل آمده [۲۹]	۰/۰۱۴۷
آب - مس خراش‌دار [۲۹]	۰/۰۰۶۸
آب - فولاد ضدزنگ که با تفلون موج‌دار شده [۲۹]	۰/۰۰۵۸
تتراکلریدکربن - مس [۱۱]	۰/۰۱۳
تتراکلریدکربن - مس با سنباده صیقل یافته [۲۹]	۰/۰۰۷۰
بنزن - کرم [۱۴]	۰/۰۱۰
الکل‌بوتیل n - مس [۱۱]	۰/۰۰۳۰۵
اتیل الکل - کرم [۱۴]	۰/۰۲۷
الکل ایزوپروپیل - مس [۱۱]	۰/۰۰۲۲۵
پنتان n - کرم [۱۴]	۰/۰۱۵
پنتان n - مس با سنباده صیقل یافته [۲۹]	۰/۰۱۵۴
پنتان n - نیکل با سنباده صیقل یافته [۲۹]	۰/۰۱۲۷
پنتان n - مس ساییده شده [۲۹]	۰/۰۰۴۹
پنتان n - مس با سنباده ساییده شده [۲۹]	۰/۰۰۷۴
٪۳۵ $K_۲CO_۳$ - مس [۱۱]	۰/۰۰۵۴
٪۵۰ $K_۲CO_۳$ - مس [۱۱]	۰/۰۰۲۷

وقتی مایعی به داخل کانال یا روی سطح به دمایی بیش‌تر از دمای اشباع مایع جریان می‌یابد، ممکن است جوش جابه‌جایی اجباری به‌وجود آید. روزنو و گریفیث [۶] برای جوش جابه‌جایی - اجباری در لوله‌های صاف توصیه کردند که اثر جابه‌جایی - اجباری را با رابطهٔ دیتوس - بوتلر فصل ۶ [معادلهٔ (۶-۴)] حساب کنیم و این اثر را به شار گرمایی جوش محاسبه شده از معادلهٔ (۹-۳۳) بیفزاییم. بنابراین:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{کل}} = \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{جوش}} + \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{جابه‌جایی اجباری}} \qquad (۹-۳۴)$$

توصیه می‌شود که برای محاسبه اثر جابه‌جایی به جای ضریب ۰/۰۲۳ در معادله دیتوس - بولتر ضریب ۰/۰۱۹ را قرار دهیم. برای محاسبه اثر جابه‌جایی اجباری، از اختلاف دمای دیواره و دمای کپه‌ای مایع استفاده می‌شود.

مفهوم جمع کردن شارهای گرمایی جابه‌جایی اجباری و جوش

* اعداد داخل کروشه، منبع اطلاع را نشان می‌دهد.

در مرجع ۴۶ بازتر شده و نتایج خوبی ارائه شده است؛ گرچه جملات داخل معادلات خیلی پیچیده‌تر است و ارائه آنها در اینجا پر زحمت است. کسی که در این زمینه کار می‌کند می‌تواند به این مرجع مراجعه کند.

جوش جابه‌جایی اجباری ضرورتاً آن‌قدر ساده نیست که با معادله (۹-۳۴) نشان داده شده است. این معادله عموماً برای جابه‌جایی اجباری‌ای که دمای کپه‌ای مایع، زیر سرد است و یا به عبارت دیگر در جوش جابه‌جایی اجباری **موضعی**، به‌کار می‌رود. وقتی به حالت جوش اشباع یا کپه‌ای برسیم، وضع سریعاً عوض می‌شود. و بالاخره با پدیدهٔ جوش هسته‌ای کاملاً توسعه‌یافته مواجه هستیم که مستقل از سرعت جریان یا آثار جابه‌جایی اجباری است. روابط متعددی برای محاسبه شار گرمایی در حالت جوش کاملاً توسعه‌یافته ارائه شده است. مک آدامز و دیگران [۲۱] رابطه زیر را برای آبِ در حالِ جوش با فشار پایین پیشنهاد کرده‌اند:

$$\frac{q}{A} = ۲/۲۵۳(\Delta T_x)^{۳/۹۶}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^{۲}} \quad \text{برای } ۰/۲ < p < ۰/۷\ \text{MPa} \qquad (۹-۳۵)$$

لوی *Levy* [۲۲] برای فشارهای بالاتر رابطه زیر را توصیه می‌کند:

$$\frac{q}{A} = ۲۸۳/۲p^{۰/۴}(\Delta T_x)^{۳}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^{۲}} \quad \text{برای } ۰/۷ < \text{p} < ۱۴\ \text{MPa} \qquad (۹-۳۶)$$

در این معادلات ΔT_x به درجه سلسیوس و p به مگاپاسکال است.

اگر جوش در طول به حد کافی بلند لوله صورت گیرد، قسمت اعظم سطح جریان را بخار اشغال می‌کند. در این حالت بخار در مرکز لوله سریعاً جریان می‌یابد و فیلمی از مایع در طول سطح بیرونی تبخیر می‌شود. این وضعیت را تبخیر **جابه‌جایی** - اجباری می‌نامند و معمولاً به عنوان موضوعی در جریان و انتقال گرمای دو فاز مورد بررسی قرار می‌گیرد. پیچیدگی‌های بسیاری در این موضوع جالب وجود دارد که تانگ Tong [۲۳] و والیس Wallis [۲۸] بسیاری از آنها را خلاصه کرده‌اند.

اوج شار گرمایی در جوش مخزنی هسته‌ای در شکل ۹-۳ با نقطه a و در شکل ۹-۸ با خط چین نشان داده‌است. زوبر Zuber [۷] برای شار گرمایی اوج در جوش هسته‌ای، با درنظر گرفتن نیازهای پایداری میان‌سطح فیلم بخار و مایع، رابطه‌ای تحلیلی به‌دست آورده است. این رابطه چنین است:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\max} = \frac{\pi}{۲۴}h_{fg}\rho_v\left[\frac{\sigma g(\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^{۲}}\right]^{۱/۴}\left(۱ + \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{۱/۴} \qquad (۹-۳۷)$$

که σ کشش سطح مایع - بخار است. این رابطه با داده‌های تجربی هم‌آهنگی خوبی دارد. به طور کلی، جنس سطح بر شار گرمایی اوج تأثیری ندارد، گرچه تمیز بودن سطح می‌تواند مؤثر باشد، سطوح کثیف مقدار اوج را تقریباً ۱۵ درصد افزایش می‌دهند.

شار گرمایی اوج در جوش جریان وضعیتی پیچیده‌تر است زیرا تولید سریع بخار، سیستم جریان دو فاز پیچیده‌ای به وجود می‌آورد که شدیداً بر بیشینه شار گرمایی ایجاد شده در سطح انتقال گرما تأثیر می‌گذارد. در نزدیکی سطح گرمادیده، لایه نازکی از مایع فوق گرم و به‌دنبال آن لایه‌ای که هم دارای حباب و هم مایع است، به‌وجود می‌آید. قسمت اعظم هسته مرکزی جریان با بخار اشغال می‌شود. انتقال گرما در دیواره تحت تأثیر توسعه لایه مرزی در آن ناحیه و نیز آهنگ پیش‌روی شعاعی پخش بخار و حباب‌ها قرار دارد. البته به دلیل نوسانات جریان که در بعضی شرایط ایجاد می‌شود نیز پیچیدگی‌های بیش‌تری به‌وجود می‌آید. گامبیل [۲۴] پیشنهاد کرده است که شار گرمایی بحرانی جوش جریان را از جمع شار گرمایی بحرانی جوش مخزنی [معادلهٔ (۹-۳۷)] و آثار جابه‌جایی اجباری، مشابه روش به کار رفته در معادله (۹-۳۴) محاسبه کنیم. لوی [۲۵] آثار پخش بخار را روی شار گرمایی اوج در جوش جریان رسیدگی کرده است و تانگ [۲۳] خلاصه‌ای از داده‌های موجود در این مورد را ارائه کرده است.

پدیده جالبی از شار گرمایی اوج وقتی مشاهده می‌شود که قطرات مایع بر سطوح داغی برخورد کنند. آزمایش‌های انجام شده روی آب، استون، الکل و بعضی از فرئون‌ها نشان می‌دهند که بیشینهٔ انتقال گرما برای اتمام سیالات و به ازای اختلاف دمای حدود ۱۶۵°C مشاهده می‌شود. شار اوج تابعی از خواص سیال و مؤلفه قائم سرعت برخورد است. یک هم‌بستگی از داده‌های تجربی در مرجع ۳۰ به صورت زیر داده‌شده است:

$$\frac{Q_{\max}}{\rho_L d^{۳}\lambda} = ۱/۸۳\times۱۰^{-۳}\left(\frac{\rho_v^{۲}V^{۲}d}{\rho_{vf}\sigma g_c}\right)^{۰/۴۳۱} \qquad (۹-۳۸)$$

که $Q_{\max}$ = بیشینه انتقال گرمای هر قطره

ρ_L = چگالی قطره مایع

V = مؤلفه قائم سرعت برخورد

ρ_{vf} = چگالی بخار ارزیابی شده در دمای فیلم $\frac{T_w + T_{sat}}{۲}$

σ = کشش سطحی

d = قطر قطره

λ = گرمای تبخیر پیراسته که چنین تعریف می‌شود:

$$\lambda = h_{fg} + c_{pv}\left(\frac{T_w - T_{\text{اشباع}}}{۲}\right)$$

گرچه فوراً از این معادله آشکار نمی‌شود ولی آهنگ انتقال گرما دربرخورد قطره کاملاً بالاست و ۵۰ درصد قطره، در فاصله زمانی کوتاه برخورد و جهش، تبخیر می‌شود. حالتی که سرعت برخورد برابر صفر است مورد توجه تاریخی بوده و به **پدیده لیدن‌فراست** *Leidenfrost* [۳۱] موسوم است. این حالت را می‌توان با تماشای قطره‌های آب روی صفحه داغ شاهد بود که بالا و پایین می‌روند و می‌رقصند. وقتی یک جت

مایع روی سطح داغی برخورد کند که دمایش خیلی بیش‌تر از دمای اشباع است نیز آهنگ انتقال گرمای خیلی بالا به‌وجود می‌آید. در این حالت هر دو پدیده جوش هسته‌ای و فیلمی را می‌توان ملاحظه کرد و روابط محاسبه آهنگ انتقال گرما در مرجع ۳۶ ارائه شده‌اند.

سان Sun و لین‌هارد Lienhard [۳۴] رابطه‌ای برای شار گرمایی اوج جوش روی استوانه‌های افقی ارائه کرده‌اند که هم‌آهنگی خوبی با داده‌های تجربی دارد. این رابطه چنین است:

$$\frac{q''_{max}}{q''_{max_F}} = ۰/۸۹ + ۲/۲۷ \exp(-۳/۴۴\sqrt{R'}) \qquad \text{برای } ۰/۱۵ < R' \qquad (۳۹-۹)$$

که R' شعاع بی‌بعد است و چنین تعریف می‌شود:

$$R' = R\left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}$$

و q''_{max_F} شار گرمایی اوج روی صفحه افقی نامحدود است که از مرجع ۳۳ چنین به‌دست می‌آید:

$$q''_{max_F} = ۰/۱۳۱\sqrt{\rho_v} h_{fg}[\sigma g(\rho_l - \rho_v)]^{\frac{1}{4}} \qquad (۴۰-۹)$$

در اینجا σ کشش سطحی است.

برواملی Bromley [۸] رابطهٔ زیر را برای محاسبه ضرایب انتقال گرما در ناحیه جوش فیلمی پایا روی لوله افقی پیشنهاد می‌کند:

$$h_b = ۰/۶۲\left[\frac{k_g^{۳}\rho_v(\rho_l - \rho_v)g(h_{fg} + ۰/۴c_{pv}\Delta T_x)}{d\mu_v \Delta T_x}\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (۴۱-۹)$$

که d قطر لوله است. در این ضرایب انتقال گرما تنها هدایت در فیلم در نظر گرفته شده، شامل آثار تابش نمی‌شود. ضریب انتقال گرمای کل را می‌توان از رابطه تجربی زیر حساب کرد:

$$h = h_b\left(\frac{h_b}{h}\right)^{\frac{1}{4}} + h_r \qquad (۴۲-۹)$$

که h_r ضریب انتقال گرمای تابشی است و با فرض واحد بودن ضریب گسیل مایع حساب می‌شود. بنابراین:

$$h_r = \frac{\sigma\varepsilon(T_w^{۴} - T_{\text{اشباع}}^{۴})}{T_w - T_{\text{اشباع}}} \qquad (۴۳-۹)$$

که σ ثابت استفان - بولتزمن و ε ضریب گسیل سطح است. توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضریب انتقال گرمای کل از معادلهٔ (۹-۴۲) نیاز به راه‌حل تکراری داریم.

خواص بخار معادلهٔ (۹-۴۱) باید در دمای فیلم ارزیابی شود که چنین تعریف می‌شود:

$$T_f = \frac{۱}{۲}(T_w + T_{\text{اشباع}})$$

در حالی‌که آنتالپی تبخیر h_{fg} را باید در دمای اشباع ارزیابی کرد.

۹-۶ روابط ساده شده برای انتقال گرمای جوش آب

برای محاسبه ضریب انتقال گرمای جوش آب روابط تجربی بسیاری به‌دست آمده است. جاکوب و هاوکینز Hawkins [۱۵] بعضی از این روابط ساده را برای جوش آب، در فشار جو، روی قسمت بیرونی سطوح غوطه‌ور (جدول ۹-۳) ارائه کرده‌اند. این ضرایب انتقال گرما را می‌توان پیراست . اثر فشار را با استفاده از فرمول تجربی زیر در آنها اعمال کرد:

$$h_p = h_۱\left(\frac{p}{p_۱}\right)^{۰/۴} \qquad (۴۴-۹)$$

که h_p = ضریب انتقال گرما در فشار p
$h_۱$ = ضریب انتقال گرما در فشار جو، از جدول ۹-۳
p = فشار سیستم
$p_۱$ = فشار جو استاندارد

رابطهٔ زیر برای جوش موضعی جابه‌جایی اجباری در لوله‌های عمودی توصیه می‌شود [۱۶]:

$$h = ۲/۵۴(\Delta T_x)^{۳} e^{\frac{p}{۱۵۵۱}} \quad \frac{W}{m^{۲}.°C} \qquad (۴۵-۹)$$

که ΔT_x اختلاف دمای سطح و مایع اشباع شده به درجه سلسیوس و p فشار به مگا پاسکال است. واحد ضرایب انتقال گرما وات برمتر مربع بر درجه سلسیوس است. معادلهٔ (۹-۴۵) در محدودهٔ فشار ۵ تا ۱۷۰ atm معتبر است.

☑**جدول ۹-۳** روابط ساده شده برای ضرایب انتقال گرمای جوش آب در فشار جو، $\Delta T_x = T_w - T_{sat}$, °C

سطح	$\frac{q}{A}$, $\frac{kW}{m^{۲}}$	$\frac{W}{m^{۲}.°C}$,h	محدوده تقریبی °C, ΔT	محدوده تقریبی $\frac{W}{m^{۲}.°C}$,h
افقی	$\frac{q}{A} < ۱۶$	$۱۰۴۲(\Delta T_x)^{\frac{۱}{۳}}$	۰-۷/۷۶	۰-۲۰۶۰
	$۱۶ < \frac{q}{A} < ۲۴۰$	$۵/۵۶(\Delta T_x)^{۳}$	۷/۳۲-۱۴/۴	۲۱۸۰-۱۶۶۰۰
عمودی	$\frac{q}{A} < ۲$	$۵۳۷(\Delta T_{ax})^{\frac{۱}{۴}}$	۰-۴/۵۱	۰-۶۷۰
	$۳ < \frac{q}{A} < ۶۳$	$۷/۹۶(\Delta T_x)^{۳}$	۴/۴۱-۹/۴۳	۶۸۰-۶۶۸۰

مثال ۹-۴ جوش جریان

آب در فشار ۵ atm در لوله‌ای به قطر ۱ in [۲/۵۴ cm] در شرایط جوش موضعی جریان دارد که دمای دیوار آن ۱۰°C بالاتر از دمای اشباع است. مقدار انتقال گرما از ۱/۰ m طول لوله را حساب کنید.

حل :

برای این محاسبه از معادلهٔ (۹-۴۵) استفاده می‌کنیم و توجه داریم که:

$$\Delta T_x = ۱۰°C$$

$$p = (۵)\left(۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^{۵} \frac{N}{m^{۲}}\right) = ۰/۵۰۶۶ \text{ MPa}$$

پس ضرایب انتقال گرما چنین حساب می‌شود:

$$h = (۲/۵۴)(۱۰)^{۳} e^{\frac{۰/۵۰۶۶}{۱/۵۵۱}}$$

$$= ۳۵۲۱ \frac{W}{m^{۲}.°C}\left[۶۲۰ \frac{Btu}{h.ft^{۲}.°F}\right]$$

مساحت یک متر طول لوله برابر است با:

$$A = \pi\, dL = \pi\,(۰/۰۲۵۴)(۱/۰) = ۰/۰۷۹۸ \text{ m}^{۲}$$

بنابراین مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$q = hA(T_w - T_{sat})$$

$$= (۳۵۲۱)(۰/۰۷۹۸)(۱۰) = ۲۸۱۰ \frac{W}{m}$$

مثال ۹-۵ جوش آب در تابه

آب در ۱ atm درتابه آشپزخانه از جنس فولاد ضدزنگ با $\Delta T_x = ۸°C$ می‌جوشد. شار گرمایی حاصل را بیابید. اگر همین تابه مثل دیگ زودپز تحت فشار ۰/۱۷ MPa عمل کند. در صد افزایش شار گرمایی مورد نظر انتظار چه‌قدر است؟

حل :

از رابطهٔ سادهٔ جدول ۹-۳ برای این محاسبه استفاده می‌کنیم. مقدار $\frac{q}{A}$ را نمی‌دانیم و باید یک یا دو رابطه را برای سطح افقی از جدول انتخاب کنیم. فکر می‌کنیم جوش هسته‌ای است و در نتیجه:

$$h = ۵/۵۶(\Delta T_x)^{۳} = ۵/۵۶(۸)^{۳} = ۲۸۴۷ \frac{W}{m^{۲}.°C}$$

و شار گرمایی برابر است با:

$$\frac{q}{A} = h\Delta T = (۲۸۴۷)(۸) = ۲۲۷۷۰ \frac{W}{m^{۲}} = ۲۲/۸ \frac{kW}{m^{۲}}$$

این مقدار در محدودهٔ کاربرد معادله به کار رفته است $\left(۱۶ < \frac{q}{A} < ۲۴۰ \frac{kW}{m^{۲}}\right)$. از جدول ۹-۲ متوجه می‌شوید که مقادیر C_{sf} برای ترکیب آب - پلاتین یا آب - فولاد ضدزنگ تقریباً ۰/۰۱۳ است پس می‌توان فکر کرد شار گرمایی نشان داده شده در شکل ۹-۸ تقریباً باید برابر مقدار مربوط به سطح از جنس فولاد ضدزنگ باشد. با برون‌یابی شکل در $\Delta T_x = ۸°C$ مقدار شار گرمایی به‌دست می‌آید که تقریباً با $۲۲/۸ \frac{kW}{m^{۲}}$ محاسبه شده در بالا یکی است.

مقدار h از معادله (۹-۴۴) برای کار به عنوان دیگ زودپز برابر است با:

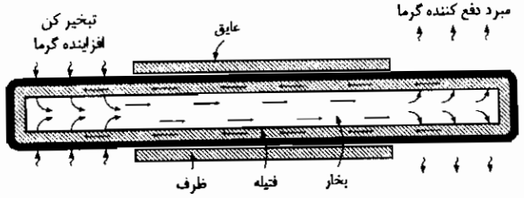
$$h_p = h_۱\left(\frac{p}{p_۱}\right)^{۰/۴} = (۲۸۴۷)\left(\frac{۰/۱۷}{۰/۱۰۱}\right)^{۰/۴} = ۳۵۰۶ \frac{W}{m^{۲}.°C}$$

که ۲۳ درصد بیش‌تر از مقدار به‌دست آمده در ۱ atm است. شار گرمایی متناظر آن برابر است با:

$$\frac{q}{A} = h\Delta T = (۳۵۰۶)(۸) = ۲۸ \frac{kW}{m^{۲}}$$

۹-۷ لولهٔ گرمایی

لوله گرمایی، مطابق شکل ۹-۱۰ که در موقعیت افقی تصویر شده است، وسیله‌ای است که در آن از انتقال گرمای تغییر فاز به طرز نویی استفاده شده است. لوله‌ای دایروی دارای لایه‌ای از ماده فتیله است که سطح داخلی را می‌پوشاند و مرکز آن خالی است. در لوله نیز مایع قابل چگالش وجود دارد و مایع در اثر کنش مویینگی در ماده فتیله نفوذ می‌کند. وقتی یک سر لوله را گرم کنیم (تبخیرکن)، مایع داخل فتیله تبخیر شده و بخار به مرکز لوله حرکت می‌کند. گرما از سر دیگر لوله (چگالنده) گرفته می‌شود و بخار دوباره به داخل فتیله چگالیده می‌شود. مایع در اثر مویینگی دوباره به تبخیرکن می‌رود.



شکل ۹-۱۰ شکل‌بندی اصلی لولهٔ گرمایی در حالت افقی. افزودن گرما در تبخیرکن موجب رها شدن بخار از فتیله می‌شود. گرفتن گرما در چگالنده موجب چگالش بخار، برگشت مایع به فتیله در اثر مویینگی می‌شود.

گرچه کار اصلی در غیاب گرانش (ثقل) انجام می‌شود اما می‌توان به لوله گرمایی شیب داد تا چگالنده در سطح بالاتری از تبخیرکن قرار گیرد. در این حالت اثر گرانش به سرعت پایین آمدن مایع از فتیله کمک می‌کند. این شیب را **شیب مناسب** می‌نامند. برعکس وقتی چگالنده را در سطحی پایین‌تر از تبخیرکن قرار دهیم، اثر گرانش جلوگیری از جریان مایع در فتیله است و می‌گوییم که لوله گرمایی دارای **شیب معکوس** است.

مواد مختلفی برای سیال و لوله در ساخت لولهٔ گرمایی به کار گرفته شده است و بعضی از مشخصات کاری نمونه در جدول ۹-۴ خلاصه شده‌اند. شارهای گرمایی بسیار بالایی را می‌توان به‌دست آورد؛ به این دلیل تلاش‌های پژوهشی به طرح‌های بهینه فتیله، شکل بندی جدید برای کاربردهای خاص و غیره متوجه است. در عمل از مواد متعدد فتیله استفاده شده است که از صافی‌های توری، الیاف فولاد ضدزنگ، و الیاف و پودرهای ترکیبی تا شیارهای ریز کانال‌های حکّاری شده ادامه دارد.

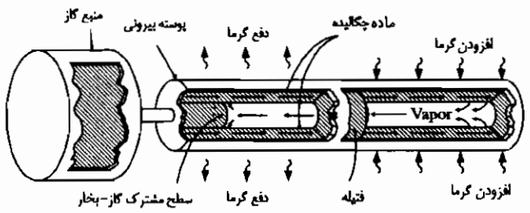
لولهٔ گرمایی تصویر شده در شکل ۹-۱۰ را لولهٔ گرمایی با **ضریب هدایت ثابت** می‌نامند زیرا مقاومت گرمایی آن وقتی از

یک سیال چگالنده استفاده می‌شود تابع شدید بار گرمایی نیست. طرح اصلی را می‌توان اصلاح کرد تا به صورت لولهٔ گرمایی با **ضریب هدایت متغیر** مطابق شکل ۹-۱۱ عمل کند.

☑**جدول ۹-۴** شارهای گرمایی محوری نمونه برای لوله‌های گرمایی

دما، °C	سیال	جنس لوله	شار گرمایی محوری، $\frac{kW}{cm^2}$
۱۶۰ −	ازت مایع	فولاد ضدزنگ	۰/۰۶۷
۶۰ + تا ۷۰ −	آمونیاک مایع	فولاد ضدزنگ	۰/۳
۱۰۰ −	متانول	مس	۰/۴۵
۲۰۰	آب	مس	۰/۶۷
۷۵۰	پتاسیم	فولاد ضدزنگ نیکل‌دار	۵/۶
۸۵۰	سدیم	فولاد ضدزنگ نیکل‌دار	۹/۳

مخزنی حاوی گاز غیر قابل چگالشی به انتهای گرماگیر لولهٔ گرمایی وصل است. سپس این گاز می‌تواند با بخار تشکیل میان سطح داده و بخشی از چگالش به فتیله را مسدود کند (Choke off). با زیادکردن گرما، بخار بیش‌تری تولید شده، فشار بخار بالا می‌رود و گاز غیر قابل چگالش به مخزن پس رانده می‌شود و در نتیجه، سطح چگالندهٔ بیش‌تری برای گرفتن گرمای اضافی باز می‌شود. با کاهش گرمای افزوده، عمل عکس ملاحظه می‌شود. اگر دمای منبع گرما به زیر مقدار کمینهٔ معینی افت کند، بسته به ترکیبات سیال و گاز خاص، می‌تواند گرفتگی کامل به وجود آید. پس این جنبه کنترلی می‌تواند مخصوصاً در کاربردهای گرم‌کردن علاوه بر ارزش آن به عنوان کنترل‌کننده دما در شرایط بار متغیر، مفید باشد.



شکل ۹-۱۱ شکل‌بندی لوله گرمایی با ضریب هدایت متغیر. مخزن گاز غیر قابل چگالش را برای ایجاد وسیله کنترل دما به کار برد.

کاربرد لوله‌های گرمایی مخصوصاً در تجهیزات بقای انرژی مفید است که می‌خواهیم گرما را از گازهای گرم برای پیش‌گرم کردن هوا یا کاربردهای گرمایش کمکی بازیافت کنیم. در بعضی از کاربردها، لولهٔ گرمایی می‌تواند جای ترکیبات پرهزینه‌تر پمپ، لوله‌کشی و شکل‌بندی‌های مبدل گرمایی دوتایی را بگیرد. اطلاعات بیش‌تر در زمینه نظریه و طراحی لولهٔ گرمای در مرجع‌های ۵۱ تا ۵۶ داده شده است.

مثال ۹-۶ مقایسه شار گرمایی

با استفاده از داده‌های جدول ۹-۴، شارگرمایی محوری در لولهٔ گرمایی با سیال عامل آب (در حدود ۲۰۰°C) را با شار گرمایی در میله مسی توپر به طول ۸cm و اختلاف دمای ۱۰۰°C مقایسه کنید.

حل :

شار گرمایی واحد سطح چنین بیان می‌شود:

$$\frac{q}{A} = -k\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)$$

ضریب هدایت گرمایی مس از جدول A-۲ برابر ۳۷۴ $\frac{W}{m.^\circ C}$ است. پس برای طول ۸cm داریم:

$$\frac{q}{A} = -\frac{(۳۷۴)(-۱۰۰)}{۰/۰۸} = ۴۶۷/۵\ \frac{kW}{m^2} = ۰/۰۴۶۷۵\ \frac{kW}{cm^2}$$

شار گرمایی محوری نمونه برای لوله گرمایی آبی از جدول ۹-۴ برابر است با:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{محوری}} = ۰/۶۷\ \frac{kW}{cm^2}$$

پس لولهٔ گرمایی نسبت به میلهٔ مسی خالص با اختلاف دمای بالا ۱۰ بار بیش‌تر گرما منتقل می‌کند. این مثال نشان می‌دهد که چرا از لولهٔ گرمایی در کاربردهای متعدد استفاده می‌شود.

☑**جدول ۹-۵** مقادیر تقریبی ضرایب انتقال گرمای چگالشی برای بخار در ۱atm، طبق مراجع ۳ و ۴۵

سیال	شکل هندسی	h $\frac{W}{m^2.^\circ C}$	h $\frac{Btu}{h.ft^2.^\circ F}$	$T_g - T_w$، °C
بخار	سطح عمودی	۴۰۰۰−۱۱۳۰۰	۷۰۰−۲۰۰۰	۳−۲۲
	لوله‌های افقی، به‌قطر ۱۵ تا ۷۶mm	۹۶۰۰−۲۴۴۰۰۰	۱۷۰۰−۴۳۰۰	۲−۲۰
دی فنیل	سطوح عمودی، نا آرام، ۳/۶۶m	۶۸۰−۲۴۰۰	۱۲۰−۴۳۰	۱۳−۷۲
	لوله افقی، به قطر ۴۳mm	۱۲۸۰−۲۲۷۰	۲۲۵−۴۰۰	۵−۱۵
دو ترم A	سطح عمودی، ۳/۶۶m ناآرام	۶۸۰−۳۰۶۰	۱۲۰−۵۴۰	۲۰−۴۰
اتانول	سطح عمودی، ۱۵۲mm	۱۱۳۰−۲۰۰۰	۲۰۰−۳۵۰	۱۱−۵۵
	لوله‌افقی، به قطر ۵۱mm	۱۸۰۰−۲۵۵۰	۳۲۰−۴۵۰	۶−۲۲
پروپانول	لوله افقی، به قطر ۵۱mm	۱۴۰۰−۱۷۰۰	۲۵۰−۳۰۰	۱۳−۲۶
بوتانول	لوله افقی، به قطر ۵۱mm	۱۴۰۰−۱۷۰۰	۲۵۰−۳۰۰	۱۳−۲۶
بنزن	لوله‌های افقی به قطر ۱۵ تا ۳۳mm	۱۳۰۰−۲۱۵۰	۲۳۰−۳۸۰	۱۳−۴۵

☑**جدول ۹-۶** مقادیر نسبی ضریب انتقال گرما در جوش هسته‌ای در فشار ۱atm نسبت به مقدار آب، طبق مرجع ۴۲

سیال	$\frac{h_{\text{سیال}}}{h_{\text{آب}}}$
آب	۱/۰
۲۰٪ شکر	۰/۸۷
۱۰٪ Na_2SO_4	۰/۹۴
۲۶٪ گلیسرین	۰/۸۳
۵۵٪ گلیسرین	۰/۷۵
۲۴٪ $NaCl$	۰/۶۱
ایزوپروپانول	۰/۷۰
متانول	۰/۵۳
تولوئن	۰/۳۶
تتراکلرید کربن	۰/۳۵
بوتانول n	۰/۳۲

☑**جدول ۹-۷** شار گرمایی اتمام سوخت تقریبی در ۱atm طبق مراجع ۳، ۴۳ و ۴۴

ترکیب سطح - سیال	$\left(\frac{q}{A}\right)_{max}$ $\frac{kW}{m^2}$	$\left(\frac{q}{A}\right)_{max}$ $\frac{Btu}{h.ft^2} \times 10^{-3}$	ΔT_x، °C
آب، مس	۶۲۰−۸۵۰	۲۰۰−۲۷۰	
مس - با روکش کرم	۹۴۰−۱۲۶۰	۳۰۰−۴۰۰	۲۳−۲۸
فولاد	۱۲۹۰	۴۱۰	۳۰
بنزن، مس	۱۳۰	۴۳/۵	
آلومینیم	۱۶۰	۵۰/۵	
پروپانول،مس با روکش نیکل	۲۱۰−۳۴۰	۶۷−۱۱۰	۴۲−۵۰
بوتانول، مس با روکش نیکل	۲۵۰−۳۳۰	۷۹−۱۰۵	۳۳−۳۹
اتانول، آلومینیم	۱۷۰	۵۵	
مس	۲۵۰	۸۰/۵	
متانول، مس	۳۹۰	۱۲۵	
مس با روکش کرم	۳۵۰	۱۱۱	
فولاد	۳۹۰	۱۲۵	
مایع H_2	۳۰	۹/۵۳	۲
مایع N_2	۱۰۰	۳۱/۷	۱۱
مایع o_2	۱۵۰	۴۷/۵	۱۱

۹-۸ خلاصه و اطلاعات طرح

پدیده‌های جوش و چگالش همان‌طور که در بخش‌های گذشته نشان دادیم خیلی پیچیده‌اند. معادلات ارائه شده در این بخش‌ها را می‌توان برای محاسبه ضرایب انتقال گرما برای شکل‌ها و ترکیبات سطح - مایع مختلف به‌کار برد. در بسیاری از طرح‌های مقدماتی تنها مقادیر تقریبی شار گرمایی یا ضریب انتقال گرما مورد نیازند و جدول‌های ۹-۵ تا ۹-۷ خلاصه‌ای از این اطلاعات را به‌دست می‌دهند. البته برای طرح نهایی دستگاه انتقال گرما باید اعداد دقیق‌تری به‌دست آورد.

سؤالات مرور فصل

۱ چرا آهنگ انتقال گرما در جوش قطره‌ای بزرگ‌تر از مقدار آن در جوش فیلمی است؟

۲ در چگالش فیلمی عدد رینولدز چگونه تعریف می‌شود؟

۳ معنی جوش زیر سرد و اشباع چیست؟

۴ جوش هسته‌ای و فیلمی چه فرقی دارند؟

۵ جوش جابه‌جایی اجباری چگونه حساب می‌شود؟

۶ چرا در انتقال گرمای جوش فیلمی، تابش نقش مهمی دارد؟

فهرست مثال‌های حل شده

۹-۱ چگالش روی صفحه عمودی

۹-۲ چگالش روی رشته لوله

۹-۳ جوش روی صفحهٔ برنجی

۹-۴ جوش جریان

۹-۵ جوش آب در تابه

مسائل

۹-۱ با استفاده از معادلهٔ (۹-۲۸) به عنوان نقطه شروع، رابطه‌ای برای ضریب انتقال گرمای متوسط در چگالش ناآرام، به صورت تابعی از تنها خواص سیال، طول صفحه و اختلاف دما به‌دست آورید؛ یعنی عدد رینولدز را از معادلهٔ (۹-۲۸) حذف کنید تا رابطه‌ای شبیه معادلهٔ (۹-۱۰) برای چگالش آرام به‌دست آید.

۹-۲ نشان دهید که عدد رینولدز چگالش آرام روی صفحه‌ای عمودی را می‌توان چنین بیان کرد:

$$Re_f = ۳/۷۷\left[\frac{L^3(T_g - T_w)^3 \rho_f(\rho_f - \rho_v) g k_f^3}{\mu_f^5 h_{fg}^3}\right]^{\frac{1}{3}}$$

۹-۳ برای جریان چگالیدهٔ کل در فیلمی ناآرام رابطه‌ای بر حسب خواص سیال، اختلاف دما و ابعاد صفحه به‌دست آورید.

۹-۴ معادلات (۹-۲۶) و (۹-۲۸) را به صورت:

$$\log\left\{\bar{h}\left[\frac{\mu_f^{\ 2}}{k_f^{\ 3}\rho_f(\rho_f-\rho_v)g}\right]^{\frac{1}{4}}\right\}$$

نسبت به $\log \mathrm{Re}_f$ رسم کنید. در مورد این ترسیم بحث کنید.

۹-۵ صفحه‌ای عمودی به عرض ۳۰ cm و ارتفاع ۱/۲ m را در ۷۰°C نگه‌داشته و در معرض بخار اشباع به فشار ۱ atm قرار می‌دهند. انتقال گرما و جرم کل بخار چگالیده در ساعت را حساب کنید.

۹-۶ شیب صفحه‌ای به ابعاد ۴۰ cm × ۴۰ با عمود برابر ۳۰° بوده و در معرض بخار به فشار ۱ atm است. دمای صفحه ۹۸°C است. مقدار انتقال گرما و آهنگ جریان جرمی چگالیده را بیابید.

۹-۷ دمای صفحه‌ای قائم و مربعی به ابعاد ۵۰ cm × ۵۰ برابر ۹۵°C بوده و در معرض بخار اشباع به فشار ۱ atm است. مقدار بخار چگالیده را در ساعت حساب کنید.

۹-۸ آهنگ چگالش روی صفحه‌ای عمودی به ابعاد ۱/۵ m × ۱/۵ و به دمای ۴۰°F را حساب کنید که در معرض بخار آب اشباع به دمای ۵۵°F و $h_{fg} = ۲۳۷۶ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$ در ۵۵°F است.

۹-۹ صفحه‌ای عمودی به ابعاد ۴۰ cm × ۴۰ در معرض بخار آمونیاک اشباع به دمای ۱۰۰°F بوده و دمای سطح صفحه ثابت و برابر ۳۰°C است. آهنگ چگالش را در صورتی حساب کنید که $h_{fg} = ۴۷۷/۸ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb_m}}$ در ۱۰۰°F باشد.

۹-۱۰ بخار اشباع در فشار abs $۱۰۰ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}$ روی سطح بیرونی لوله‌ای افقی به قطر ۱ in چگالیده می‌شود. دمای دیواره لوله ۲۸۰°F است. ضریب انتقال گرما و جریان چگالیده واحد طول لوله را بیابید. ۳۲۸°F = اشباع T و $h_{fg} = ۸۸۹ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb}}$ در نظر بگیرید.

۹-۱۱ لوله آب خنک عایق نشده‌ای حامل آب به دمای ۲°C است و از منطقه‌ای داغ و مرطوب به دمای ۳۵°C و رطوبت نسبی ۸۰ درصد کارخانه عبور می‌کند. علت رطوبت و دمای بالا آنست که در این کارخانه تجهیزاتی وجود دارد که با بخار کار می‌کند. اگر قطر لوله ۵ cm و طول در معرض هوا ۷/۵ m باشد مقدار چگالیده‌ای را به‌دست آورید که از روی لوله خواهد چکید. برای این منظور فرض کنید که لوله در معرض بخار اشباع به فشار جزئی بخار آب در هوا قرار دارد.

۹-۱۲ دیگ زودپزی را برای کار در فشار gauge $۲۰ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}$ طرح کرده‌اند. خوب می‌دانیم که در چنین وسیله‌ای ماده خوراکی به دلیل آنکه در فشار بالاتر، دمای بخار بالاتر است، سریع‌تر پخته می‌شود. ماده‌ای خوراکی را به صورت استوانهٔ افقی به قطر ۴ in و دمای ۹۵°F در این دیگ در نظر بگیرید. درصد افزایش انتقال گرما به این استوانه برای فشار gauge $۲۰ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}$ را در مقایسه با چگالش روی استوانه در فشار جو استاندارد حساب کنید.

۹-۱۳ بخار اشباع در فشار abs $۱۰۰ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}$ روی سطح بیرونی لوله‌ای افقی به قطر ۱ in چگالیده می‌شود. دمای دیوارهٔ لوله در ۲۸۰°F نگه‌داشته می‌شود. ضریب انتقال گرما و جریان چگالیده واحد طول لوله را حساب کنید. (مثل مسألهٔ ۹-۱۰ است. م)

۹-۱۴ بخار اشباع در فشار ۱ atm روی سطح بیرونی به دمای ۹۵°C لوله‌ای به قطر ۳۰ cm چگالیده می‌شود. طول لوله ۱۵ m است. مقدار بخار چگالیده را در ساعت حساب کنید.

۹-۱۵ سطح بیرونی لوله‌ای افقی به قطر ۱۰ cm و دمای ۱۵°C در تماس با دی‌اکسید کربن چگالنده به دمای ۲۰°C است. آهنگ چگالش متر طول لوله را حساب کنید. $h_{fg} = ۱۵۳/۲ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$ در ۲۰°C.

۹-۱۶ آرایشی مربعی از چهارصد لوله به قطر ۶/۳۵ mm را برای چگالیدن بخار در فشار جو به کار می‌برند. دیوارهای لوله به وسیله ماده خنک‌کننده‌ای که در داخل لوله‌ها جریان دارد، در دمای ۸۸°C نگه‌داشته می‌شود. مقدار بخار چگالیده در ساعت به ازای واحد طول لوله‌ها را بیابید.

۹-۱۷ بخار آب اشباع با فشار ۱ atm وارد لوله‌ای افقی به قطر ۵ cm و طول ۱/۵ m می‌شود. وقتی دمای دیواره لوله ۹۸°C باشد، چگالش چه‌قدر می‌شود؟

۹-۱۸ بخار به فشار ۱ atm باید روی سطح رشته لوله‌های افقی ۱۰ × ۱۰ به‌قطر ۲/۵۴ cm چگالیده شود. دمای سطح لوله‌ها ۹۵°C است. مقدار بخار چگالیده را به ازای ۰/۶۱ m طول لوله بیابید.

۹-۱۹ آرایشی مربعی از لوله‌هایی به قطر ۲/۵۴ cm مرکب از ۱۰۰ لوله است که طول هر یک ۰/۹۱ m می‌باشد. فاصلهٔ مرکز به مرکز لوله‌ها ۴۵/۷ mm و دمای دیواره لوله ۹۷°C است. لوله‌ها در معرض بخار به فشار ۱ atm اند. آهنگ چگالش را به کیلوگرم بر ساعت بیابید.

۹-۲۰ در سردخانهٔ بزرگی از آمونیاک به عنوان مبرّد استفاده می‌شود و باید با چگالیدن آمونیاک در ۸۵°F مقدار $۱۰۷ \times ۱/۲ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{h}}$ گرما را در آرایش لوله‌ای به دمای دیوارهٔ ۷۸°F دفع کنند. قطرها و طول‌ها و ابعاد آرایش‌های مختلف لوله را انتخاب کنید تا این دفع گرما انجام گیرد. $h_{fg} = ۱۱۴۸ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$ در ۸۵°F در نظر بگیرید.

۹-۲۱ در یک چگالندهٔ آمونیاکی، از آرایش ۲۰ × ۲۰ لوله‌هایی به قطر ۶/۳۵ mm و طول ۰/۳۰۵ m استفاده می‌شود. آمونیاک در ۳۲/۲°C چگالیده و دمای دیوارهٔ لوله‌ها با جریان آب در داخلشان ۲۷/۸°C می‌شود. آهنگ چگالش آمونیاک را بیابید. $h_{fg} = ۱۱۳۵ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg_m}}$ در ۳۲/۲°C.

۹-۲۲ برای چگالیدن $۱۰۰۰۰ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}$ مبرّد ۱۲ (CCl_2F_2) در ۳۷/۸°C، باید چگالنده‌ای طراحی شود و برای این منظور از یک آرایش ۲۵ × ۲۵ از لوله‌هایی به قطر ۱۲ mm استفاده می‌شود که در داخل لوله‌ها آب جاری‌است و دمای دیواره‌هایشان ۳۲/۲°C است. طول لوله‌ها را بیابید. $h_{fg} = ۱۳۰ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg_m}}$ در ۳۷/۸°C است.

۹-۲۳ در داخل لوله‌ای افقی به قطر ۱۲ mm مبرّد ۱۲ (CCl_2F_2) با سرعت بخار پایین چگالیده می‌شود. دمای چگالش ۳۲/۲°C و دمای دیواره ۲۶/۷°C است. جرم چگالیده به ازای متر طول لوله را بیابید. $h_{fg} = ۱۳۳/۵ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg_m}}$ در ۳۲/۲°C است.

۹-۲۴ صفحهٔ قائم گرمادیده‌ای به دمای ۱۰۷°C در مخزن آبی فرو برده می‌شود که در معرض فشار جو قرار دارد. دمای آب ۱۰۰°C بوده، در سطح صفحه پدیده جوش اتفاق می‌افتد. مساحت صفحه ۰/۳ m² است. گرمای تلف‌شده از صفحه را به وات بیابید.

۹-۲۵ کشش سطحی آب به دمای ۲۱۲°F برابر $۵۸/۸ \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}}$ برای بخار در تماس با مایع است. به فرض دمای بخار اشباع داخل حباب ۲۱۳°F باشد در حالی که مایع احاطه کنندهٔ آن در دمای ۲۱۲°F اشباع است، قطر حباب را بیابید.

۹-۲۶ به فرض حباب مسأله ۹-۲۷ با سرعت $۴/۵ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در مایع حرکت کند، زمان لازم برای خنک کردن این حباب به میزان ۰/۳°C را با محاسبهٔ ضریب انتقال گرما برای جریان روی کره و استفاده از آن در تحلیل ظرفیت فشردهٔ فصل ۴؛ به‌دست آورید.

۹-۲۷ یک صفحهٔ مسی مربعی‌گرم به ابعاد ۳۰ cm × ۳۰، کف یک تغار آب به فشار ۱ atm را تشکیل می‌دهد. دمای این صفحه ۱۱۷°C است. گرمای انتقال یافته توسط صفحه را در ساعت بیابید.

۹-۲۸ نمودار گرمایی محاسبه شده از روابط سادهٔ جدول ۹-۳ را با منحنی فشار جو شکل ۹-۸ مقایسه کنید. مقایسه را برای دو یا سه مقدار اختلاف دما انجام دهید.

۹-۲۹ آب در فشار ۴ atm در داخل لوله‌ای به قطر ۲ cm تحت شرایط جوش موضعی جریان دارد دمای دیوارهٔ لوله ۱۲°C بیش‌تر از دمای اشباع است. انتقال گرما در ۶۰ cm طول لوله را بیابید.

۹-۳۰ ضرایب انتقال گرمای جوش هسته‌ای آب شکل ۹-۸ را با روابط سادهٔ جدول ۹-۳ مقایسه کنید.

۹-۳۱ با استفاده از معادلات (۹-۱۴)و(۹-۷)، معادلهٔ (۹-۲۶) را به‌دست آورید.

۹-۳۲ سیمی پلاتینی در آب اشباع به فشار ۵/۳ MPa فرو برده می‌شود. شار گرمایی وقتی که اختلاف دما ۱۱°C باشد، چقدر است ؟

۹-۳۳ آب به فشار ۱ atm در لولهٔ برنجی به قطر ۱/۲۵ cm با سرعت $۱/۲ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ جاری است، دمای دیواره لوله برابر ۱۱۰°C و دمای کپه‌ای متوسط آب ۹۶°C است. آهنگ انتقال گرما به ازای واحد طول لوله را بیابید.

۹-۳۴ یک کتری با کف تخت به قطر ۳۰ cm موجود است. می‌خواهیم $۲/۳ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}$ آب‌را در فشار جو در این کتری بجوشانیم. برای این منظور دمای کف کتری باید چه‌قدر باشد؟

۹-۳۵ میله گرم‌کنی مسی به قطر ۵ mm در آب به فشار ۱ atm فرو برده می‌شود. اختلاف دما ۱۱°C است. اتلاف گرما به ازای واحد طول میله را به‌دست آورید.

۹-۳۶ ضرایب انتقال گرمای جوش آب و چگالش بخار روی لوله‌ای افقی را در فشار جو عادی مقایسه کنید.

۹-۳۷ دیگی دارای یک‌صد لوله به قطر ۲ cm و طول ۱ m است. این دیگ برای تولید جوش جابه‌جایی اجباری موضعی آب در فشار ۳ MPa و اختلاف دمای $\Delta T_x = ۱۰°C$ طرح شده است. آهنگ انتقال گرمای کُل و مقدار بخار اشباع تولیدی در فشار ۳ MPa را بیابید.

۹-۳۸ لوله‌ای افقی به قطر ۳ mm و طول ۷/۵ cm در آب به فشار ۱/۶ atm فرو برده می‌شود. دمای سطحی مورد نیاز برای تولید شار گرمایی $۰/۲ \frac{\mathrm{MW}}{\mathrm{m}^2}$ را بیابید.

۹-۳۹ برای تولید بخار به فشار gauge $۵ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}$ در آرایش جوش - مخزنی - هسته‌ای که $\Delta T_x = ۴°C$ است، میله‌های مسی به قطر ۱/۰ in به‌کار می‌رود که به طریق برقی گرم می‌شود. طول میلهٔ مورد نیاز را برای تولید $۹۰۸ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}$ بخار اشباع بیابید.

۹-۴۰ ضریب انتقال گرمای جوش - مخزنی - هسته‌ای را برای مخلوط آبی - ۲۶٪ گلیسرین در فشار ۱ atm در تماس با یک سطح مسی و $\Delta T_x = ۱۵°C$ بیابید.

۹-۴۱ معادلات (۹-۳۵) و (۹-۳۶) را با معادلهٔ (۹-۴۵) مقایسه کنید.

۹-۴۲ شار گرمایی جوش مخزنی هسته‌ای را برای آب در فشار ۱atm در تماس با فولاد ضدزنگ سنگ‌خورده و صیقلی و $\Delta T_x = ۳۰°F$ به‌دست آورید.

۹-۴۳ شار گرمایی اوج را برای جوش آب در فشار جو روی استوانه‌ای افقی به قطر خارجی ۱/۲۵ cm حساب کنید. از رابطهٔ لین هارد استفاده کنید.

۹-۴۴ سیمی افقی از جنس پلاتین به قطر ۱/۰ mm و طول ۱۲ cm در آب به فشار جو فروبرده شده و دمای سطح سیم ۲۳۲°F است. چه‌قدر گرما از سیم به هدر خواهد رفت؟

۹-۴۵ لوله‌ای افقی به دمای ۹۴°C و در معرض بخار به فشار جو و دمای ۱۰۰°C است. قطر لوله ۴/۰ cm می‌باشد. آهنگ چگالش به ازای متر طول لوله را بیابید.

۹-۴۶ در لوله‌ای برنجی و افقی به قطر ۲/۵ cm، آب به فشار ۱ atm و دمای ۹۸°C جاری‌است. دمای لوله ۱۱۰°C است. ضریب انتقال گرما را در صورتی حساب کنید که عدد رینولدز بر پایه کپه‌ای مایع ۴۰۰۰۰ باشد.

۹-۴۷ میله‌ای به قطر ۱/۲۵ cm و طول ۵ cm را از کوره‌ای به دمای ۱۲۰۰°C بیرون آورده، در ظرف آبی به فشار جو قرار می‌دهیم. آهنگ انتقال گرما از میله را در ابتدای قرارگیری در آب بیابید.

۹-۴۸ شار گرمایی اوج را برای آبی که در فشار جو عادی می‌جوشد به‌دست آورید.

۹-۴۹ معمولاً ضرایب انتقال گرمای جوش در مقایسه با ضرایب جابه‌جایی عادی بزرگ هستند. اگر مقدار h جابه‌جایی اجباری در یک لولهٔ صاف برنجی به قطر ۶/۵ mm برابر با h جوش مخزنی با $\Delta T_x = ۱۶/۷°C$ و $p = ۱۰۰ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}$ abs و آب به عنوان سیال باشد، سرعت جریان لازم در حالت اول چه‌قدر است؟ مقدار خواص فیزیکی را در مسألهٔ ۹-۱۰ ملاحظه کنید.

۹-۵۰ لوله‌ای افقی به قطر خارجی ۱/۲۵ cm در آب به فشار ۱ atm و دمای ۱۰۰°C فرو برده می‌شود. شار گرمایی را وقتی دمای سطح (الف) ۵۴۰°C، (ب) ۶۵۰°C و (پ) ۸۰۰°C است، بیابید. فرض کنید $\varepsilon = ۰/۸$ است و از معادلهٔ (۹-۴۱) استفاده کنید.

۹-۵۱ آب با آهنگ $۱/۰ \frac{\text{لیتر}}{\mathrm{h}}$ به صورت قطراتی به قطر ۰/۴ mm در دمای ۲۵°C روی سطحی داغ به دمای ۲۸۰°C با سرعت برخورد $۳ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ پاشیده می‌شود. حداکثر انتقال گرمایی را حساب کنید که با این روش به‌دست می‌آید.

۹-۵۲ آرایشی مربعی شامل ۱۹۶ لوله به قطر ۱/۲۵ cm را برای چگالش بخار در فشار ۱ atm به کار می‌برند. آب جاری در لوله‌ها دمای سطح بیرون را در ۹۲°C نگه‌می‌دارد. آهنگ چگالش لوله‌های به طول ۲/۰ m را بیابید.

۹-۵۳ دمای صفحه‌ای عمودی ۹۱°C است و در معرض بخار اشباع به فشار ۱ atm قرار دارد. ارتفاع صفحه را برای ایجاد عدد رینولدز ۱۸۰۰ تعیین کنید. آهنگ چگالش در این شرایط چه‌قدر است؟

۹-۵۴ شار گرمایی جوش ترکیب آب-فولاد ضدزنگ صیقلی و صاف را برای اختلاف دمای ۱۵°C در ۱ atm تعیین کنید.

۹-۵۵ ضریب انتقال گرمای جوش موضعی جابه‌جایی اجباری آب در ۵ atm را در لوله‌ای عمودی حساب کنید. اختلاف دما ۱۲°C است.

۹-۵۶ آهنگ چگالش بخار اشباع به فشار ۱ atm در معرض استوانه‌ای به قطر ۳۰ cm و دمای ۹۴°C را حساب کنید.

۹-۵۷ دمای صفحه‌ای عمودی و مربعی به ضلع ۲۰ cm برابر ۹۳°C و در معرض بخار آب اشباع به فشار ۱ atm است. آهنگ چگالش و ضخامت فیلم در پایین صفحه را حساب کنید.

۹-۵۸ لولهٔ مسی پره‌دار مسأله ۲-۱۱۱ را در نظر بگیرید. انتقال گرمای حاصل از فرو بردن این لوله در آب به دمای ۱ atm را وقتی ارزیابی کنید که دمای لولهٔ پایه ۱۰۸°C، ۱۱۱°C و ۱۱۷°C است.

۹-۵۹ تابه‌ای از جنس فولاد ضدزنگ پرآب را روی اجاق آشپزخانه قرار می‌دهیم. آهنگ انتقال گرما از تابه‌ای به قطر ۲۵ cm را وقتی حساب کنید. که سطح کف در دمای ۱۰۴°C است.

۹-۶۰ اطراف تابه‌ای از جنس فولاد ضدزنگ و خالی به قطر کف ۱۲/۵ cm و ارتفاع دیواره ۵ cm را شعله گاز می‌گیرند. می‌توان فرض کرد که شعله گاز گرمایش یکنواختی تولید می‌کند و تابه تا ارتفاع ۲/۵ cm آب دارد. آهنگ انتقال گرمای آب را به شرطی حساب کنید که دمای سطحی تابه ۱۰۴°C باشد.

۹-۶۱ ضریب انتقال گرما از لوله افقی (از جنس فولاد ضدزنگ با روکش تفلون) به آب با فشار جو را به ازای اختلاف دمای ۱۷°C حساب کنید. انتقال گرما برای لوله به قطر ۱ cm و طول ۱ m چه‌قدر است؟

۹-۶۲ رشته لوله‌ای افقی دارای ۱۰ ستون لوله است که هر ستون دارای ۲۰ ردیف ارتفاع است. لوله‌های به قطر ۱۲ mm در معرض بخار چگالنده به فشار ۱ atm است. اگر دمای لوله ۸۶°C باشد. آهنگ چگالش متر طول لوله را بیابید.

۹-۶۳ صفحه‌ای افقی به عرض ۲۵ cm و ارتفاع ۵۰ cm و دمای ۸۵°C در معرض بخار به فشار ۱ atm است. آهنگ چگالش را به $\frac{kg}{hr}$ حساب کنید. ضخامت فیلم در کف صفحه را نیز ارزیابی کنید.

مسائل طراحی

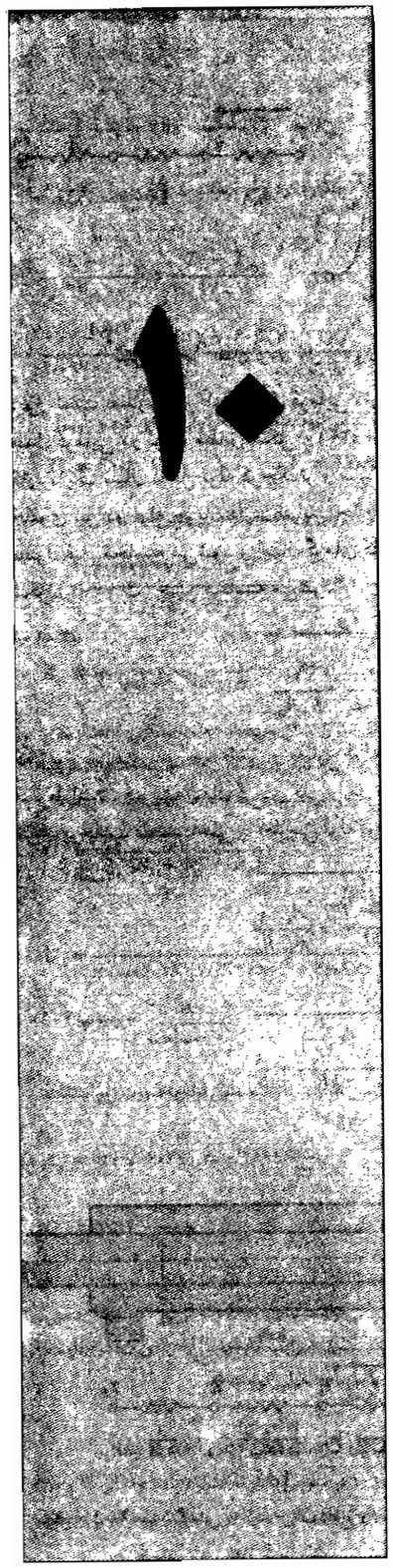
۹-۶۴ چگالنده‌ای باید طوری طراحی شود که مقدار $۱/۳ \frac{kg}{s}$ بخار در فشار جو را چگالیده کند. برای این منظور از یک آرایش مربعی از لوله‌هایی به قطر خارجی ۱/۲۵ cm استفاده می‌شود که دمای بیرونی دیواره‌هایشان ۹۳°C است. فاصلهٔ مرکز به مرکز لوله‌ها ۱/۹ cm و طولشان ۳ برابر ضلع مربع است. این چگالنده به چند لوله نیاز دارد و ابعاد بیرونی آن چیست؟

۹-۶۵ برای چگالیدن $۶۰۰ \frac{kg}{h}$ بخار در فشار جو باید مبدلی گرمایی طراحی شود و برای این منظور از آرایشی مربعی متشکل از چهارصد لوله به قطر ۱/۰ cm استفاده می‌شود و دمای دیواره لوله‌ها ۹۷°C است. طول لوله‌های مورد نیاز را بیابید.

❑ مراجع

1. Nusselt, W.: Die Oberflachenkondensation des Wasserdampfes. *VDI Z.*, vol. 60, p. 541, 1916.
2. Kirkbride, C. G.: Heat Transfer by Condensing Vapors on Vertical Tubes, *Trans. AIChE,* vol. 30, p. 170, 1934.
3. MeAdams, W. H.: "Heat Transmission," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New york, 1954.
4. Kern, D. Q.: "Process Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.
5. Rohsenow, W.M.: A Method of Correlating Heat Transfer Data for Surface Boiling Liquids, *Trans. ASME,* vol. 74, p. 969, 1952.
6. Rohsenow, W. M., and P. Griffith: Correlation of Maximum Heat Flux Data for Boiling of Saturated Liquids, *AIChE-ASME Heat Transfer Symp.*, Louisville, KY., 1955.
7. Zuber, N.: On the Stability of Boiling Heat Transfer, *Trans. ASME,* vol. 80, p. 711, 1958.
8. Bromley, L. A.: Heat Transfer in Stable Film Boiling, *Chem. Eng. Prog.* vol. 46, p. 221, 1950.
9. Farber, E.A.,and E. L. Scorah: Heat Transfer to Water Boiling under Pressure, *Trans. ASME,* vol. 70, p. 369, 1948.
10. "Handbook of Chemistry and Physics," Chemical Rubber Publishing Company, Cleve-land, Ohio, 1960.
11. Piret, E. L., and H. S. Isbin: Natural Circulation Evaporation Two-Phase Heat Transfer, *Chem. Eng. Prog.*, vol. 50, p. 305, 1954.
12. Addoms, J. N.: Heat Transfer at High Rates to Water Boiling outside Cylinders, Sc. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1948.
13. Cryder, D. S., and A. C. Finalbargo: Heat Transmission from Metal Surfaces to Boiling Liquids: Effect of Temperature of the Liquid on Film Coefficient, *Trans. AIChE,* vol. 33, p. 346, 1937.
14. Cichelli, M. T., and C. F. Bonilla: Heat Transfer to Liquids Boiling under Pressure, *Trans. AIChE,* vol. 41, p. 755, 1945.
15. Jakob, M., and G. Hawkins: "Elements of Heat Transfer," 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
16. Jakob, M.: Heat Transfer," vol. 2, p. 584, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
17. Haley, K. W., and J. W. Westwater: Heat Transfer from a Fin to a Boiling Liquid, *Chem. Eng. Sci.,* vol. 20, p. 711, 1965.
18. Rohsenow, W. M. (ed.): "Developments in Heat Transfer," The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1964.
19. Leppert, G., and C. C. Pitts: Boiling, *Adv. Heat Transfer,* vol. 1, 1964.
20. Gebhart, C.: "Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
21. McAdams, W. H., et al.: Heat Transfer at High Rates to Water with Surface Boiling, *Ind. Eng. Chem.,* vol. 41, pp. 1945-1955, 1949.
22. Levy, S.: Generalized Correlation of Boiling Heat Transfer, J. Heat Transfer, *J. Heat Transfer,* vol. 81C, PP. 37-42, 1959.
23. Tong, L. S.: "Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flaw," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
24. Gambill, W. R.: Generalized Prediction of Burnout Heat Flux for FloWing, Sub-cooled, Wetting Liquids, *AIChE Rep. 17, 5th Nat. Heat Transfer Conf., Houston, 1962.*
25. LevY, S.: Prediction of the Critieal Heat Flux in Forced Convection Flow, *USAEC Rep.* 3961, 1962.
26. Schmidt, E., W. Schurig, and W. Sellschop: Versuche über die Kondensation von Wasserdampf in Film-und Tropfenform, *Tech. Mech. Thermodyn. Bull.,* vol. 1, p.53, 1930.
27. Citakoglu, E., and J. W. Rose: Dropwise Condensation: Some Factors Influencing the Validity of Heat Transfer Measurements, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 11, p. 523, 1968.
28. Wallis, G. B.: "One-Dimensional Two-Phase Flow," McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
29. Vachon, R. I., G. H. Nix, and G. E. Tanger: Evaluation of Constants for the Rohsenow Pool-Boiling

Correlation, *J. Heat Transfer,* vol. 90, p. 239, 1968.
30. McGinnis, F. K., and J. P. Holman: Individual Droplet Heat Transfer Rates for Splattering on Hot Surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 12, p. 95, 1969.
31. Bell, K. J.: The Leidenfrost Phenomenon: A Survey, *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.,* no. 79, p. 73, 1967.
32. Rohsenow, W. M.: Nucleation With Boiling Heat Transfer, *ASME Pap.* 70-HT-18.
33. Zuber. N., M. Tribus, and J. W. WestWater: The Hydrodynamic Crises in Pool Boiling of Saturated and Subcooled Liquids, *Int. Dev. Heat Transfer,* pp. 230-235, 1963.
34. Sun, K. H., and J. H. Lienhard:The Peak Boiling Heat Flux on Horizontal CYlinders, *Int. J. Heat Mass Trans.,* vol. 13, P. 1425, 1970.
35. Graham, C., and p. Griffith, Drop Size Distributions and Heat Transfer in Dropwise Condenstion, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 337, 1973.
36. Ruch, M. A., and J. P. Holman: Boiling Heat Transfer to a Freon-113 Jet Impinging Upward onto a Flat Heated Surface, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 51, 1974.
37. Rohsenow, W. M.:Film Condensation, chap. 12 in "Handbook of Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
38. Chato, J. C.: *J. Am. Soc. Refrig. Air Cond. Eng.,* February 1962, p. 52.
39. Akers, W. W., H. A. Deans, and O. K. Crosser: Condensing Heat Transfer Within Horizontal Tubes, *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.,* vol. 55, no. 29, p. 171, 1958.
40. Westwater, J. W., and J. G. Santangelo: *Ind. Eng. Chem.,* vol. 47, p. 1605, 1955.
41. Westwater, J. W.: *Am. Sci.,* vol. 47, p, 427, 1959, photo by Y. Y. Hsu.
42. Fritz, W.: Verdampfen und Kondensieren, *Z. VDI, Beih, Verfahrenstech.,* no. 1, 1943.
43. Sauer, F. T., H. B. Cooper, and W. H. McAdams: Heat Transfer to Boiling Liquids, *Mech. Eng.,* vol. 60, p. 669, 1938.
44. Weil, L.: Échanges thermiques dans les liquides bouillants, *Fourth Int. Congr. Ind. Heating, group* I, sec.13, Rep. 210, Paris, 1952.
45. Chilton, T. H., A. P. Colburn, R. P. Genereaux, and H. C. Vernon: *Trans. ASME, Pet. Mech. Eng.,* vol. 55, p. 7, 1933.
46. Bjorge, R. W., G. R. Hall, and W. M. Rohsenow: Correlations of Forced Convection Boiling Heat Transfer Data, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 25, p. 753, 1982.
47. Westwater, J. W.: "Gold Surfaces for Condensation Heat Transfer," *Gold Bulletion,* vol. 14,pp. 95-101, 1981.
48. Dhir, V. K., and J. H. Lienhard: Laminar Film Condensation on Plans and Axisymmetric Bodies in Non-Uniform Gravity, *J. Heat Trans.,* vol. 93, P. 97, 1971.
49. Rohsenow, W. M., and J. P. Hartnett (eds), "Handbook of Heat Transfer," Chap. 13, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
50. Lienhard, J. H.: "A Heat Transfer Textbook," chap. 10, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J., 1981.
51. Peterson, G. P.: "Introduction to Heat Pipes," John Wiley, New York, 1994.
52. Feldman, K. T., and G.H. Whiting: Applications of the Heat Pipe, *Mech. Eng.,* vol. 90, P. 48, November 1968.
53. Dutcher, C. H., and M. R. Burke: Heat Pipes: A Cool Way of Cooling Circuits, *Electronics,* pp. 93-100, February 16, 1970.
54. Grover, G. M., T. P. Cotter, and G. F. Erickson: Structures of Very High Thermal Conductance, *J. Appl. Phys.,* vol. 35, p. 1990, 1964.
55. Tien, C. L. Fluid Mechanics of Heat Pipes, *Ann. Rev. Fluid Mechanics,* vol. 7, p. 167, 1975.
56. Chi, S. W.: "Heat Pipe Theory and Practice," Hemisphere Publishing Co., New York, 1979.



۱۰ مبدل‌های گرمایی

❑ ۱۰-۱ مقدمه

کاربرد اصول انتقال گرما در طراحی تجهیزاتی که منظور مهندسی معینی را به انجام برساند بسیار اهمیت دارد، زیرا هدف از کاربرد این اصول در طراحی، توسعه تولید برای بهرهٔ اقتصادی است. مآلاً اقتصاد نقش اصلی را در طرح و انتخاب تجهیزات انتقال گرما دارد و مهندس طراح باید در برخورد با هر مسأله طراحی جدید انتقال گرما این امر را درنظر داشته باشد. وزن و اندازه مبدل‌های گرمایی در کاربردهای فضایی و هوانوردی سنجه‌های خیلی مهمی هستند و اغلب در این موارد هزینه‌های مصالح و ساخت مبدل گرمایی فرعی تلقی می‌شود. وزن و اندازه از عوامل مهم هزینه‌ساز است و از این‌رو ممکن است باز هم به‌عنوان متغیرهای اقتصادی درنظر گرفته شوند.

یک کاربرد خاص، قواعدی را تحمیل می‌کند که برای به‌دست آوردن بهترین طرح متناسب با ملاحظات اقتصادی، اندازه، وزن و غیره باید آن را مدنظر داشت . تحلیل تمام این عوامل خارج از بحث حاضر ماست ولی خوب است به‌خاطر داشته باشیم که همه اینها را در عمل باید مورد بررسی قرار دهیم. بحث مبدل‌های گرمایی ما شکل تحلیل فنی دارد؛ یعنی، روش‌های محاسبه عملکرد مبدل گرمایی را عرضه کرده، همراه با آن در بارهٔ روش‌های به‌کار رفته در ارزیابی اندازه و نوع مبدل گرمایی موردنیاز برای انجام یک منظور خاص بحث می‌کنیم. بدین منظور بحث را به مبدل‌های گرمایی محدود می‌کنیم که هدایت و جابه‌جایی حالت‌های اصلی انتقال گرما در آنها است. این بدان معنی نیست که تابش در طرح مبدل گرمایی مهم نباشد، زیرا در بسیاری از کاربردهای فضایی تابش عامل غالب در انتقال انرژی است. برای بررسی مشروح طرح مبدل گرمایی تابشی خواننده را به بحث‌های انجام شده توسط سیگال و هوول [۱] و اسپرووسس [۷] رجوع می‌دهیم.

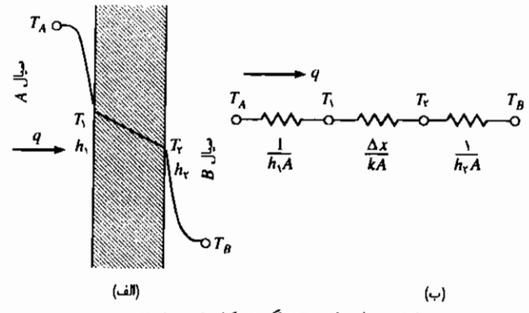
❑ ۱۰-۲ ضریب انتقال گرمای کلی

ضریب انتقال گرمای کلی را در بخش ۲-۴ بحث کردیم. انتقال گرما از دیوار تخت شکل ۱۰-۱ چنین بیان می‌شود:

$$q = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\Delta x}{kA} + \frac{1}{h_2 A}} \qquad (۱-۱۰)$$

که T_A و T_B دماهای سیال در طرفین دیوار است. ضریب انتقال گرمای کلی U با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$q = UA\,\Delta T_{\text{کل}} \qquad (۲-۱۰)$$



شکل ۱۰-۱ انتقال گرمای کلی از دیوار تخت.

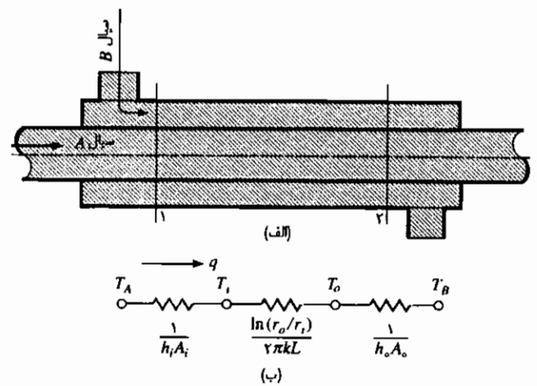
دیوار تخت به‌ندرت در طرح مبدل گرمایی کاربرد دارد و بررسی مبدل گرمایی دو لوله، مطابق شکل ۱۰-۲، مهم‌تر است. در این کاربرد یک سیال داخل لوله کوچک‌تر و سیال دیگر در فضای حلقوی بین دو لوله جریان دارد. ضرایب جابه‌جایی از روش‌های فصول قبل محاسبه می‌شود و انتقال گرمای کلی از شبکه گرمایی شکل (۲-۱۰ ب) چنین محاسبه می‌شود:

$$q = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o A_o}} \qquad (۳-۱۰)$$

که زیرنویس‌های i و o به داخل و خارج لوله داخلی کوچک‌تر مربوط است. ضریب انتقال گرمای کلی را می‌توان بسته به نظر طراح، برحسب سطح داخلی یا خارجی لوله نوشت. در نتیجه:

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL} + \frac{A_i}{A_o}\frac{1}{h_o}} \qquad (۴-۱۰ \text{الف})$$

$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i}\frac{1}{h_i} + \frac{A_o \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o}} \qquad (۴-۱۰ \text{ب})$$



شکل ۱۰-۲ مبدل گرمایی دو لوله: (الف) طرح واره؛ (ب) شبکه مقاومت گرمایی برای انتقال گرمای کلی.

طرح‌های نهایی مبدل گرمایی براساس محاسبات دقیق U انجام می‌شود ولی داشتن جداولی از مقادیر ضریب انتقال گرمای کلی برای وضعیت‌های مختلف عملی، مفید است. اطلاعات جامعی از این دست در مراجع ۵ و ۶ موجود است و فهرست خلاصه‌ای از مقادیر U در جدول ۱۰-۱ داده شده است. خاطر نشان می‌کنیم که مقدار U در بسیاری از موارد تنها تحت الشعاع یکی از ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی است. در بسیاری از مسائل عملی، مقاومت هدایتی در مقایسه با مقاومت‌های جابه‌جایی کوچک است. بنابراین اگر یک مقدار h خیلی کوچک‌تر از دیگری باشد، در معادله مربوط به U نقش عمده خواهد داشت. مثال‌های ۱۰-۱ و ۱۰-۲ این مفهوم را نشان می‌دهد.

مثال ۱۰-۱ ضریب انتقال گرمای کلی برای لوله در هوا

آب داغ به دمای ۹۸°C در لوله‌ای فولادی افقی نمره ۴۰ به قطر ۲in $\left[k = 54 \frac{W}{m.°C}\right]$ جریان دارد و لوله در معرض هوای جو به دمای ۲۰°C است. سرعت آب $25 \frac{cm}{s}$ می‌باشد. ضریب انتقال گرمای کلی را برای این وضعیت براساس مساحت بیرونی لوله حساب کنید.

حل:

از پیوست A ابعاد لوله نمره ۴۰ به قطر ۲in به‌صورت زیر اند:

$$ID = 2/067 \text{ in} = 0/0525 \text{ m}$$
$$OD = 2/375 \text{ in} = 0/0603 \text{ m}$$

ضریب انتقال گرما برای جریان آب داخل لوله از شرایط جریان با خواص ارزیابی شده در دمای کپه‌ای تعیین می‌شود. ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد خارج لوله به اختلاف دمای سطح و هوای محیط بستگی دارد. این اختلاف دما به موازنه انرژی کلی بستگی دارد. نخست h_i را به‌دست آورده و سپس برای تعیین h_o از یک روش تکراری استفاده می‌کنیم.

خواص آب در ۹۸°C چنین است:

$$\rho = 960 \frac{kg}{m^3} \qquad \mu = 2/82 \times 10^{-4} \frac{kg}{m.s}$$
$$k = 0/68 \frac{W}{m.°C} \qquad Pr = 1/76$$

عدد رینولدز برابر است با:

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(960)(0/25)(0/0525)}{2/82 \times 10^{-4}} = 44680 \qquad \text{(الف)}$$

و چون با جریان ناآرام روبه‌رو هستیم، می‌توانیم از معادلهٔ ۶-۴ استفاده کنیم:

$$Nu = 0/023\, Re^{0/8}\, Pr^{0/4}$$
$$= (0/023)(44680)^{0/8}(1/76)^{0/4} = 151/4$$

$$h_i = Nu \frac{k}{d} = \frac{(151/4)(0/68)}{0/0525} = 1961 \frac{W}{m^2.°C} \left[345 \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right] \qquad \text{(ب)}$$

مقاومت گرمایی فولاد به ازای واحد طول لوله برابر است با:

$$R_s = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k} = \frac{\ln \frac{0/0603}{0/0525}}{2\pi(54)} = 4/097 \times 10^{-4} \qquad \text{(پ)}$$

جدول ۱۰-۱ مقادیر تقریبی ضرایب انتقال گرمای کلی

وضعیت فیزیکی	U: $\frac{Btu}{h.ft^2.°F}$	U: $\frac{W}{m^2.°C}$
دیوار خارجی آجری، گچ اندود داخلی،		
عایق نشده	۰/۴۵	۲/۵۵
دیوار خارجی چوبی، گچ اندود داخلی،		
عایق نشده	۰/۲۵	۱/۴۲
با عایق پشم - سنگ	۰/۰۷	۰/۴
پنجره با شیشه صاف	۱/۱۰	۶/۲
پنجره با شیشه صاف دوتایی	۰/۴۰	۲/۳
چگالنده بخار	۲۰۰-۱۰۰۰	۱۱۰۰-۵۶۰۰
گرم‌کن آب تغذیه	۲۰۰-۱۵۰۰	۱۱۰۰-۸۵۰۰
چگالنده فریون ۱۲ با خنک کنندهٔ آبی	۵۰-۱۵۰	۲۸۰-۸۵۰
مبدل گرمایی آب به آب	۱۵۰-۳۰۰	۸۵۰-۱۷۰۰
مبدل گرمایی لوله پره‌دار، آب در		
لوله‌ها، هوا در عرض لوله‌ها	۵-۱۰	۲۵-۵۵
مبدل گرمایی آب به روغن	۲۰-۶۰	۱۱۰-۳۵۰
بخار به سوخت سبک	۳۰-۶۰	۱۷۰-۳۴۰
بخار به سوخت سنگین	۱۰-۳۰	۵۶-۱۷۰
بخار به نفت یا گازوئیل	۵۰-۲۰۰	۲۸۰-۱۱۴۰
مبدل گرمایی لوله پره‌دار، بخار در		
لوله‌ها، هوا روی لوله‌ها	۵-۵۰	۲۸-۲۸۰
چگالنده آمونیاکی، آب در لوله‌ها	۱۵۰-۲۵۰	۸۵۰-۱۴۰۰
چگالنده الکلی، آب در لوله‌ها	۴۵-۱۲۰	۲۵۵-۶۸۰
مبدل گرمایی گاز به گاز	۲-۸	۱۰-۴۰

باز هم، مقاومت گرمایی طرف داخلی براساس واحد طول برابر است با:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i 2\pi r_i} = \frac{1}{(1961)\pi(0/0525)}$$
$$= 3/092 \times 10^{-3} \qquad \text{(ت)}$$

هنوز مقاومت گرمایی سطح بیرونی نامعلوم است ولی به‌ازای واحد طول چنین نوشته می‌شود:

$$R_o = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o 2\pi r_o} \qquad \text{(ث)}$$

رابطهٔ ساده شده h_o در جریان آرام، از جدول‌های ۷-۲ چنین است:

$$h_o = 1/32 \left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{\frac{1}{4}} = 1/32 \left(\frac{T_o - T_\infty}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \text{(ج)}$$

که T_o دمای مجهول سطح بیرونی لوله است. دمای داخلی لوله را با T_i و دمای آب را با T_w نشان می‌دهیم؛ بنابراین موازنه انرژی چنین می‌شود:

$$\frac{T_w - T_i}{R_i} = \frac{T_i - T_o}{R_s} = \frac{T_o - T_\infty}{R_o} \qquad \text{(چ)}$$

با ترکیب معادلات (ث) و (ج) داریم:

$$\frac{T_o - T_\infty}{R_o} = 2\pi r_o \frac{1/32}{d^{\frac{1}{4}}} (T_o - T_\infty)^{\frac{5}{4}} \qquad \text{(ح)}$$

این رابطه را می‌توان در معادله (چ) وارد کرد و دو معادله با دو مجهول T_i و T_o به‌دست آورد.

$$\frac{98 - T_i}{3/092 \times 10^{-3}} = \frac{T_i - T_o}{4/097 \times 10^{-4}}$$

$$\frac{T_i - T_o}{4/097 \times 10^{-4}} = \frac{(\pi)(0/0603)(1/32)(T_o - 20)^{\frac{5}{4}}}{(0/0603)^{\frac{1}{4}}}$$

و این دستگاه غیر خطی است که می‌شود به طریق تکرار آن را حل کرد و داریم:

$$T_o = 97/6 \text{ °C} \qquad T_i = 97/65 \text{ °C}$$

در نتیجه، ضریب انتقال گرمای بیرونی و مقاومت گرمایی چنین است:

$$h_o = \frac{(1/32)(97/6 - 20)^{\frac{1}{4}}}{(0/0603)^{\frac{1}{4}}} = 7/91 \frac{W}{m^2.°C} \left[1/39 \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

$$R_o = \frac{1}{(0/0603)(7/91)\pi} = 0/667$$

این محاسبه به وضوح این حقیقت را نشان می‌دهد که جابه‌جایی آزاد، انتقال گرمای کلی را کنترل می‌کند، زیرا R_o خیلی بزرگ‌تر از R_i یا R_s است. ضریب انتقال گرمای کلی برپایه سطح خارجی برحسب این مقاومت‌ها چنین نوشته می‌شود:

$$U_o = \frac{1}{A_o [R_i + R_s + R_o]} \qquad \text{(خ)}$$

وقتی مقادیر عددی را جای‌گزین کنیم:

$$U_o = \frac{1}{\pi(0/0603)[3/092 \times 10^{-3} + 4/097 \times 10^{-4} + 0/667]}$$
$$= 7/87 \frac{W}{\text{مساحت}.°C}$$

در این محاسبه از مساحت خارجی به ازای ۱/۰ m طول لوله به‌صورت زیر استفاده کردیم:

$$A_o = \pi(0/0603) = 0/1895 \frac{m^2}{m}$$

$$U_o = 7/87 \frac{W}{m^2.°C}$$

بنابراین، در می‌یابیم که ضریب انتقال گرمای کلی تقریباً به‌طور کامل با مقدار h_o کنترل شده است. این نتیجه را می‌توانستیم برپایه تجربه‌مان در مورد مقدار نسبی ضرایب جابه‌جایی انتظار داشته باشیم؛ ضرایب جابه‌جایی آزاد برای هوا در مقایسه با ضرایب جابه‌جایی اجباری یا مایعات، خیلی کوچک‌اند.

مثال ۱۰-۲ ضریب انتقال گرمای کلی برای لولهٔ بخار

سیستم لوله و آب داغ مثال ۱۰-۱ در معرض بخار به فشار ۱atm و دمای ۱۰۰°C قرار داده می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی برای این وضعیت را براساس سطح بیرونی لوله حساب کنید.

حل :

ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی داخلی را در مثال ۱۰-۱ برابر مقدار زیر به‌دست آوردیم:

$$h_i = ۱۹۶۱ \ \frac{W}{m^۲.°C}$$

ضریب جابه‌جایی برای چگالش داخل لوله با استفاده از معادله (۹-۱۲) به‌دست می‌آید:

$$h_o = ۰/۷۲۵ \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) g h_{fg} k_f^{۳}}{\mu_f d (T_g - T_o)}\right]^{\frac{۱}{۴}} \qquad \text{(الف)}$$

که T_o دمای سطح خارجی لوله است. خواص فیلم آب عبارتند از:

$$\rho = ۹۶۰ \ \frac{kg}{m^۳} \qquad \mu_f = ۲/۸۲ \times ۱۰^{-۴} \ \frac{kg}{m.s}$$

$$k_f = ۰/۶۸ \ \frac{W}{m.°C} \qquad h_{fg} = ۲۲۵۵ \ \frac{kJ}{kg}$$

بنابراین معادلهٔ (الف) چنین می‌شود:

$$h_o = ۰/۷۲۵ \left[\frac{(۹۶۰)^۲ (۹/۸) (۲/۲۵۵ \times ۱۰^{۶}) (۰/۶۸)^۳}{(۲/۸۲ \times ۱۰^{-۴}) (۰/۰۶۰۳۳) (۱۰۰ - T_o)}\right]^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= ۱۷۹۶۰ (۱۰۰ - T_o)^{-\frac{۱}{۴}} \qquad \text{(ب)}$$

و مقاومت گرمایی خارجی به ازای واحد طول برابر است با:

$$R_o = \frac{۱}{h_o A_o} = \frac{(۱۰۰ - T_o)^{\frac{۱}{۴}}}{(۱۷۹۶۰) \pi (۰/۰۶۰۳۳)} = \frac{(۱۰۰ - T_o)^{\frac{۱}{۴}}}{۳۴۰۳} \qquad \text{(پ)}$$

برای موازنه انرژی باید:

$$\frac{۱۰۰ - T_o}{R_o} = \frac{T_o - T_i}{R_s} = \frac{T_i - T_w}{R_i} \qquad \text{(ت)}$$

از مثال ۱۰-۱:

$$R_i = ۳/۰۹۲ \times ۱۰^{-۳} \qquad R_s = ۴/۰۹۷ \times ۱۰^{-۴} \qquad T_w = ۹۸ \ °C$$

می‌توان معادلات (پ) و (ت) را ترکیب کرد و داریم:

$$۳۴۰۳ (۱۰۰ - T_o)^{۴} = \frac{T_o - T_i}{۴/۰۹۷ \times ۱۰^{-۴}}$$

$$\frac{T_o - T_i}{۴/۰۹۷ \times ۱۰^{-۴}} = \frac{T_i - ۹۸}{۳/۰۹۲ \times ۱۰^{-۳}}$$

این یک دستگاه معادلات غیرخطی است که می‌توان حل کرد و داریم:

$$T_o = ۹۹/۹۱ \ °C \qquad T_i = ۹۹/۶۹ \ °C$$

در این صورت ضریب انتقال گرمای بیرونی و مقاومت گرمایی چنین به‌دست می‌آید:

$$h_o = ۱۷۹۶۰ (۱۰۰ - ۹۹/۹۱)^{-\frac{۱}{۴}} = ۳۲۷۹۰ \ \frac{W}{m^۲.°C} \qquad \text{(ث)}$$

$$R_o = \frac{(۱۰۰ - ۹۹/۹۱)^{\frac{۱}{۴}}}{۳۴۰۳} = ۱/۶۱۰ \times ۱۰^{-۴} \qquad \text{(ج)}$$

ضریب انتقال گرمای کلی واحد طول لوله برابر است با:

$$U_o = \frac{۱}{A_o (R_i + R_s + R_o)}$$

$$= \frac{۱}{\pi (۰/۰۶۰۳۳)[۳/۰۹۲ \times ۱۰^{-۳} + ۴/۰۹۷ \times ۱۰^{-۴} + ۱/۶۱۰ \times ۱۰^{-۴}]} \qquad \text{(چ)}$$

$$= ۱۴۴۱ \ \frac{W}{°C . \text{مساحت}}$$

چون A_o و Rها همگی به ازای واحد طول هستند:

$$U_o = ۱۴۴۱ \ \frac{W}{m^۲.°C} \left[۲۵۴ \ \frac{Btu}{h.ft^۲.°F}\right]$$

در این مسأله، ضریب جابه‌جایی سمت آب عامل کنترل کننده اصلی است زیرا در فرآیند چگالش مقدار h_o خیلی بزرگ است. در حقیقت، مقاومت گرمایی بیرونی از مقاومت هدایتی فولاد کوچک‌تر است. مقادیر نسبی تقریبی مقاومت‌ها عبارتند از:

$$R_o \sim ۱ \qquad R_s \sim ۲/۵ \qquad R_i \sim ۱۹$$

❑ ۱۰-۳ ضریب فولینگ

ممکن است پس از مدتی کار رسوبات مختلف موجود در سیستم‌های جریان سطوح انتقال گرمای مبدل را بپوشاند و یا این سطوح در نتیجه بر هم‌کنش سیال و مادهٔ به‌کار رفته در ساخت مبدل گرمایی خورده شوند. در هر کدام از این حالات، این لایه پوششی، مقاومتی اضافی در مقابل جریان گرما ایجاد کرده، عمل‌کرد را پایین می‌آورد. اثر کلی این عمل را معمولاً با **ضریب فولینگ**، یا مقاومت فولینگ، R_f، نشان می‌دهند که باید در محاسبه ضریب انتقال گرمای کلی همراه سایر مقاومت‌های گرمایی به حساب آید.

ضرایب فولینگ را باید با تعیین مقادیر U در دو حالت تمیز و کثیف مبدل گرمایی به‌طور تجربی به‌دست آورد. بنابراین ضریب فولینگ چنین تعریف می‌شود:

$$R_f = \frac{۱}{U_{\text{کثیف}}} - \frac{۱}{U_{\text{تمیز}}}$$

مقادیر ضریب فولینگ توصیه شده برای سیالات مختلف در جدول ۱۰-۲ ارائه شده‌اند و در مرجع /۹/ بررسی کامل موضوع آورده شده است.

☑**جدول ۱۰-۲** جدول ضرایب فولینگ معمولی، طبق مرجع ۲

نوع سیال	ضریب فولینگ $\frac{h.ft^۲.°F}{Btu}$	ضریب فولینگ $\frac{m^۲.°C}{W}$
آب دریا، زیر ۱۲۵ °F	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۹
بالای ۱۲۵ °F	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲
آب تغذیه دیگ تصفیه شده بالای ۱۲۵ °F	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲
سوخت مایع	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹
روغن آبدهی	۰/۰۰۴	۰/۰۰۷
بخارهای الکل	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۹
بخار بدون روغن	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۹
هوای صنعتی	۰/۰۰۲	۰/۰۰۴
مایع تبرید	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲

مثال ۱۰-۳ اثر ضریب فولینگ

فرض کنید که آب مثال ۱۰-۲ آب دریا به دمای بیش از ۱۲۵°F و ضریب فولینگ $۰/۰۰۰۲ \frac{m^۲.°C}{W}$ باشد. درصد کاهش ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی چه‌قدر است؟

حل :

ضریب فولینگ بر ضریب انتقال گرمایی داخل لوله اثر می‌گذارد. داریم:

$$R_f = ۰/۰۰۰۲ = \frac{۱}{h_{\text{کثیف}}} - \frac{۱}{h_{\text{تمیز}}}$$

با استفاده از $h_{\text{تمیز}} = ۱۹۶۱ \ \frac{W}{m^۲.°C}$ داریم:

$$h_i = ۱۴۰۹ \ \frac{W}{m^۲.°C}$$

که ۲۸ درصد به دلیل ضریب فولینگ، کم شده است.

❑ ۱۰-۴ انواع مبدل‌های گرمایی

مبدل گرمایی دو لوله، شکل ۱۰-۲، را ذکر کردیم. در این نوع مبدل گرمایی ممکن است جریان مخالف یا جریان موازی به‌کار رود که سیال گرم یا سرد، فضای حلقوی را اشغال کرده و سیال دیگر در لوله داخلی جریان می‌یابد.

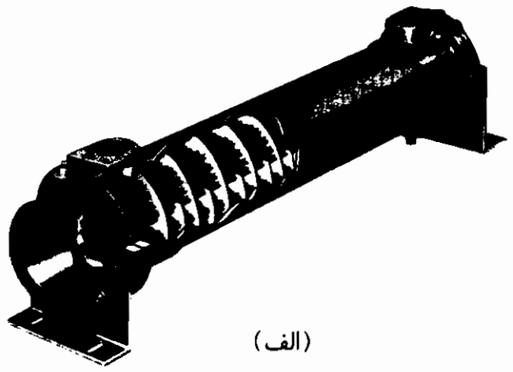
نوعی مبدل گرمایی که به‌طور وسیعی در صنایع فرآوری شیمیایی به‌کار می‌رود به‌صورت آرایش پوسته و لوله شکل ۱۰-۳ است. یک سیال داخل لوله‌ها و دیگری داخل پوسته و روی لوله‌ها به زور رانده می‌شود. برای آنکه سیال قسمت پوسته در عرض لوله‌ها جریان داشته باشد و موجب انتقال گرمای بیش‌تری شود، در پوسته مطابق شکل دیوارک‌هایی قرار داده می‌شود. بسته به نوع آرایش سرهای دو انتهای مبدل، از یک یا چند پاس لوله استفاده می‌شود. در شکل (۱۰-۳ الف) از یک پاس لوله استفاده شده و آرایش سر مربوط به دو پاس لوله در شکل (۱۰-۳ ب) نشان داده شده است. در عمل دیوارک‌ها را در انواع مختلف آرایش می‌دهند و خواننده می‌تواند برای کسب اطلاع بیش‌تر در این باره، به مرجع ۲ مراجعه کند.

در کارهای گرمایش و سرمایش هوا و گاز معمولاً از مبدل‌های جریان متقاطع استفاده می‌شود. نمونه‌ای از این مبدل در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده که در آن می‌توان یک گاز را در عرض کلاف لوله و سیال دیگر را برای گرمایش یا سرمایش، داخل لوله‌ها به گردش درآورد. در این مبدل، گازی را که در عرض لوله‌ها جریان دارد، جریان ***آمیخته*** و سیال داخل لوله‌ها را ***نیامیخته*** می‌گویند. گاز آمیخته است زیرا ضمن مبادله گرما آزادانه داخل مبدل به این طرف و آن طرف حرکت می‌کند. سیال دیگر در کانال‌های لوله‌ای مجزا در مبدل محدود است و بنابراین نمی‌تواند ضمن فرآیند انتقال گرما با خودش مخلوط گردد.

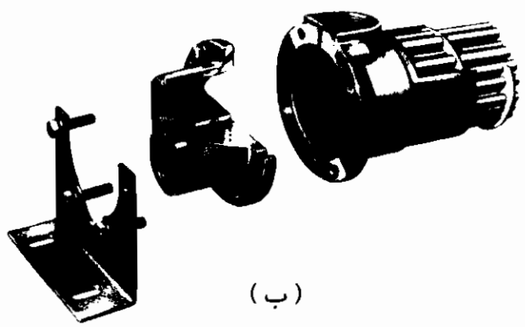
نوع دیگری از مبدل جریان متقاطع در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است. در این مورد، گاز در عرض و روی کلاف‌هایی از لوله پره‌دار جریان داشته و در نتیجه ***نیامیخته*** است زیرا ضمن عبور از مبدل، در کانال‌های مجزا در بین پره‌ها محبوس می‌شود. این مبدل نمونه‌ای از انواع به کار رفته در کاربردهای تهویه مطبوع است.

چنان‌چه سیالی نیامیخته باشد، گرادیان دما هم موازی و هم عمود بر جهت جریان وجود دارد، در حالی‌که وقتی سیال آمیخته است تمایل به آن است که دمای سیال در جهت عمود بر جریان، به دلیل این آمیزش، یکسان باشد. نیم‌رخ دمایی تقریبی برای گاز جاری در مبدل شکل ۱۰-۵ در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده و در آن فرض شده که گاز ضمن عبور از مبدل، گرما می‌بیند. اینکه سیالی آمیخته یا نیامیخته باشد بر انتقال گرمای کلی مبدل تأثیر می‌گذارد زیرا این انتقال گرما به اختلاف دمای سیالات گرم و سرد بستگی دارد. مواردی وجود دارد که جریان‌های مبدل گرمایی را باید تنها به‌صورت "بخشی" آمیخته درنظر گرفت که خارج از بحث ماست. این موارد در مرجع ۱۱ بحث می‌شود.

شکل بندی‌های متعدد دیگری وجود دارد به‌نام ***مبدل‌های گرمایی فشرده*** که عمدتاً در سیستم‌های جریان گاز استفاده می‌شود که ضرایب انتقال گرما پایین‌اند و می‌خواهیم سطح بزرگی را در حجمی کوچک داشته باشیم. این مبدل‌ها عموماً دارای مساحتی بیش از ۶۵۰ $m^۲$ در متر مکعب حجم‌اند و در بخش ۱۰-۷ آنها را مشروح‌تر بحث می‌کنیم.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۳ (الف) مبدل گرمایی پوسته و لوله با یک پاس لوله؛ (ب) آرایش گرمایی مبدل گرمایی پوسته و لوله با دو پاس لوله.

۱۰-۵ اختلاف دمای متوسط لگاریتمی

مبدل گرمایی دو لوله شکل ۱۰-۲ را درنظر بگیرید. سیال‌ها می‌توانند به‌صورت جریان موازی یا مخالف جریان یابند و نیم‌رخ‌های دمایی این دو حالت در شکل ۱۰-۷ نشان داده شده‌اند. پیشنهاد می‌کنیم که برای محاسبه انتقال گرمای این آرایش دو لوله‌ای از فرمول زیر استفاده شود:

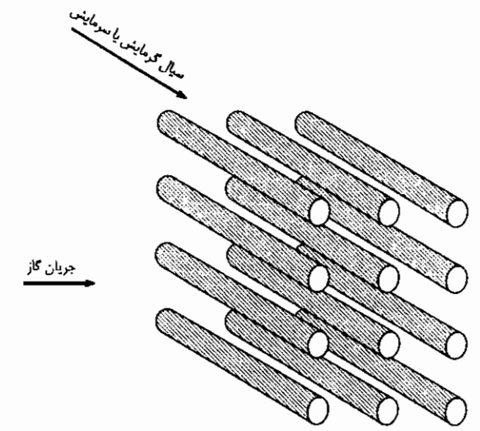
$$q = UA\ \Delta T_m \qquad (۱۰-۵)$$

که U = ضریب انتقال گرمای کلی

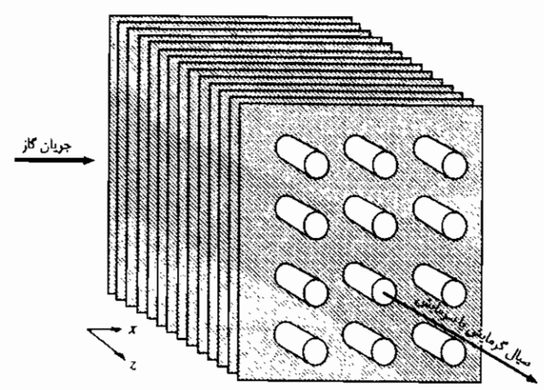
A = مساحت سطح انتقال گرما سازگار با تعریف U

ΔT_m = متوسط اختلاف دمای مناسب در عرض مبدل گرمایی

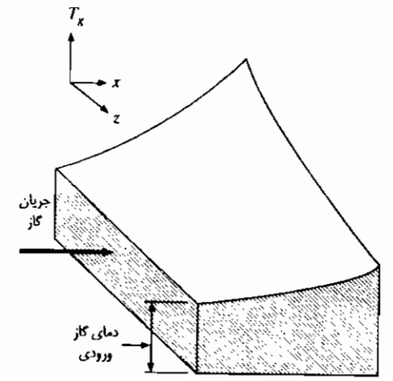
بررسی شکل ۱۰-۷ نشان می‌دهد که اختلاف دمای سیال‌های سرد و گرم در خروجی و ورودی فرق دارد و باید متوسط آن را برای



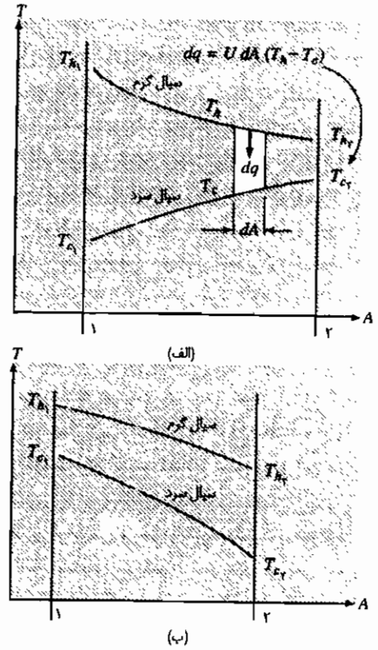
شکل ۱۰-۴ مبدل گرمایی جریان متقاطع، یک سیال آمیخته و یکی نیامیخته.



شکل ۱۰-۵ مبدل گرمایی جریان متقاطع، هردو سیال نیامیخته‌اند.



شکل ۱۰-۶ نیم‌رخ دمایی نمونه برای مبدل گرمایی جریان متقاطع شکل ۱۰-۵.



شکل ۱۰-۷ نیم‌رخ‌های دمایی (الف) جریان مخالف و(ب) جریان موازی در مبدل گرمایی دو لوله.

استفاده در معادله (۱۰-۵) معین کنیم. گرمای انتقال یافته از جزئی به مساحت dA در مبدل گرمایی جریان موازی شکل ۱۰-۷ را می‌توان چنین نوشت:

$$dq = -\dot{m}_h\, c_h\, dT_h = \dot{m}_c\, c_c\, dT_c \qquad (۱۰-۶)$$

که زیرنویس‌های h و c به ترتیب سیال‌های گرم و سرد را نشان می‌دهند. انتقال گرما را می‌توان چنین نیز بیان کرد:

$$dq = U\,(T_h - T_c)\,dA \qquad (۱۰-۷)$$

از معادلهٔ (۱۰-۶) داریم:

$$dT_h = \frac{-dq}{\dot{m}_h\, c_h}$$

$$dT_c = \frac{dq}{\dot{m}_c\, c_c}$$

که $\dot{m}$ آهنگ جریان جرمی و c گرمای ویژه سیال را مشخص می‌کند. بنابراین:

$$dT_h - dT_c = d(T_h - T_c) = -dq\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) \qquad (۱۰-۸)$$

با به‌دست آوردن dq از معادله (۱۰-۷) و قرار دادن آن در معادلهٔ (۱۰-۸) داریم:

$$\frac{d\,(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = -U\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) dA \qquad (۱۰-۹)$$

حال می‌توان معادله دیفرانسیل فوق را بین شرایط ۱ و ۲ شکل ۱۰-۷ انتگرال گرفت. نتیجه چنین است:

$$\ln = \frac{T_{h۲} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}} = -UA\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) \qquad (۱۰-۱۰)$$

حاصل ضرب‌های $\dot{m}_c c_c$ و $\dot{m}_h c_h$ را می‌توان با مراجعه به معادلهٔ (۱۰-۶) برحسب انتقال گرمای کل q و اختلاف دمای کلی سیال‌های گرم و سرد نوشت. بنابراین:

$$\dot{m}_h c_h = \frac{q}{T_{h۱} - T_{h۲}}$$

$$\dot{m}_c c_c = \frac{q}{T_{c۲} - T_{c۱}}$$

با جای‌گزینی این روابط در معادلهٔ (۱۰-۱۰) داریم:

$$q = UA\,\frac{(T_{h۲} - T_{c۲}) - (T_{h۱} - T_{c۱})}{\ln\left(\dfrac{T_{h۲} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}}\right)} \qquad (۱۰-۱۱)$$

با مقایسه معادله (۱۰-۱۱) و (۱۰-۵) در می‌یابیم که اختلاف دمای متوسط برابر گروه عبارات داخل کروشه است. بنابراین:

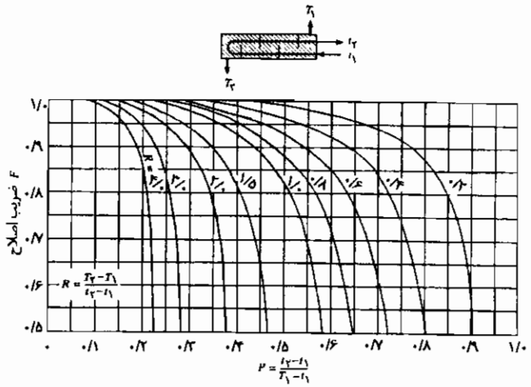
$$\Delta T_m = \frac{(T_{h۲} - T_{c۲}) - (T_{h۱} - T_{c۱})}{\ln\left(\dfrac{T_{h۲} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}}\right)} \qquad (۱۰-۱۲)$$

این اختلاف دما را ***اختلاف دمای متوسط لگاریتمی*** (LMTD) می‌نامند و عبارت است از اختلاف دما در یک طرف مبدل گرمایی منهای اختلاف دما در طرف دیگر تقسیم بر لگاریتم طبیعی نسبت این دو اختلاف دما. خواننده باید به‌عنوان تمرین نشان دهد که می‌توان از این رابطه در محاسبه LMTD های شرایط جریان متقاطع استفاده کرد.

در به‌دست آوردن رابطه بالا برای LMTD دو فرض مهم درنظر گرفته شده است: (۱) گرماهای ویژه سیال با دما تغییر نمی‌کند و (۲) ضرایب انتقال گرمای جابه‌جایی در سراسر مبدل گرمایی ثابت‌اند. فرض دوم معمولاً به دلیل تغییر ضریب هدایت گرمایی، لزجت سیال و آثار مدخل و غیره بیش‌ترین اهمیت را دارد. معمولاً برای اصلاح مربوط به این آثار باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

بخش ۱۰-۸ یک طریق تحلیل خواص - متغیر را توضیح می‌دهد.

انتقال گرمای مبدل‌های گرمایی غیر از دو لوله، با استفاده از ضریب اصلاح LMTD ***آرایش دو لوله جریان مخالف با همان دماهای سیال گرم و سرد*** محاسبه می‌شود. بنابراین معادلهٔ انتقال



شکل ۱۰-۸ منحنی ضریب اصلاح مبدل با یک پاس پوسته و دو، چهار یا ضریبی از دو پاس لوله.

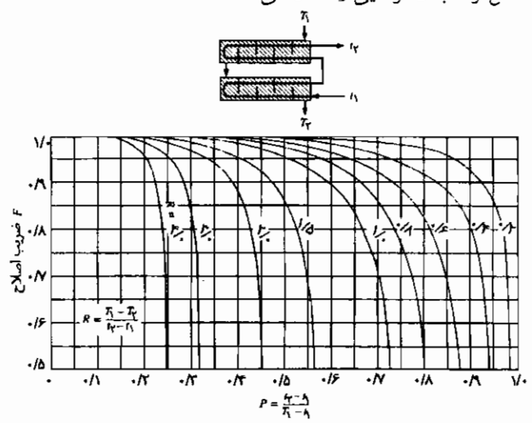
گرما چنین می‌شود:

$$q = UAF\ \Delta T_m \qquad (۱۰-۱۳)$$

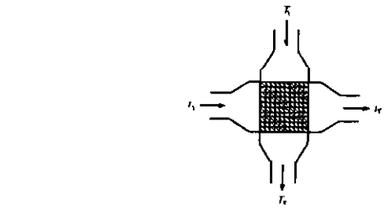
ضریب اصلاح F چند نوع مبدل گرمایی طبق مرجع ۴ در شکل‌های ۱۰-۸ تا ۱۰-۱۱ رسم شده‌اند. وقتی تغییر فاز وجود دارد، مثلاً در چگالش یا جوش (تبخیر)، معمولاً سیال در دمای ثابتی باقی می‌ماند و روابط ساده می‌شود. در این حالت P یا R صفر شده و:

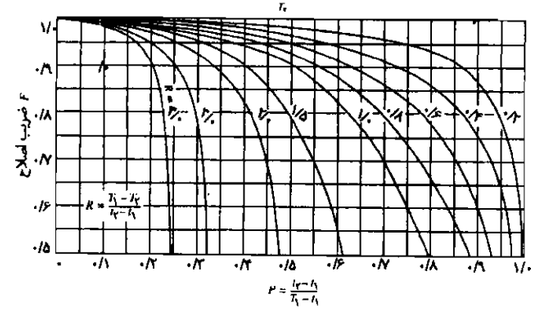
برای جوش یا چگالش $F = ۱/۰$

مثال‌های ۱۰-۴ تا ۱۰-۸ استفاده از LMTD در محاسبه عمل‌کرد مبدل گرمایی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰-۹ منحنی ضریب اصلاح مبدل با دو پاس پوسته و چهار، هشت یا ضریبی از چهار پاس لوله.

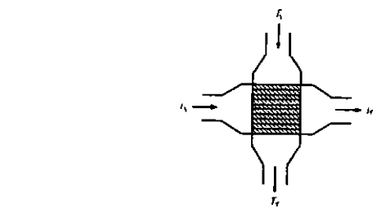


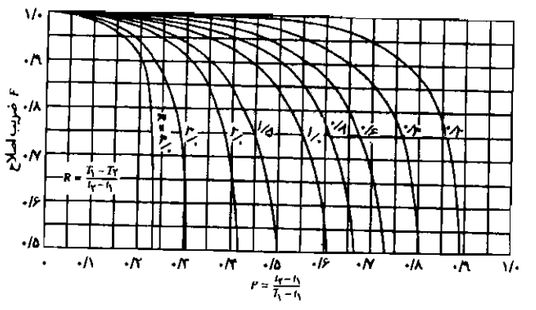


شکل ۱۰-۱۰ منحنی ضریب اصلاح مبدل جریان متقاطع یک پاس، هر دو سیال نیامیخته‌اند.

مثال ۱۰-۴ محاسبه اندازه مبدل گرمایی از روی دماهای معلوم

آب با آهنگ $\frac{kg}{min}$ ۶۸ از ۳۵ °C تا ۷۵ °C با روغنی به گرمای ویژه $\frac{kJ}{kg.°C}$ ۱/۹ گرم می‌شود. سیال‌ها در مبدل گرمایی دو لوله جریان مخالف به‌کار رفته‌اند و روغن به دمای ۱۱۰ °C وارد مبدل و در ۷۵ °C از آن خارج می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $\frac{W}{m^2.°C}$ ۳۲۰ است. مساحت مبدل گرمایی را بیابید.





شکل ۱۰-۱۱ منحنی ضریب اصلاح مبدل جریان متقاطع یک پاس، یک سیال آمیخته و دیگری نیامیخته.

حل :

انتقال گرمای کل از انرژی جذب شده توسط آب تعیین می‌شود:

(الف) $q = \dot{m}_w c_w \Delta T_w = (۶۸)(۴۱۸۰)(۷۵-۳۵) = ۱۱/۳۷ \frac{MJ}{min}$

$= ۱۸۹/۵ \text{ kW} \left[۶/۴۷ \times ۱۰^۵ \frac{Btu}{h}\right]$

چون تمام دماهای سیال معلوم هستند، می‌توان LMTD را با استفاده از طرح دمایی شکل (۱۰-۷ ب) حساب کرد:

(ب) $\Delta T_m = \frac{(۱۱۰ - ۷۵) - (۷۵ - ۳۵)}{\ln\left(\frac{۱۱۰ - ۷۵}{۷۵ - ۳۵}\right)} = ۳۷/۴۴ \text{ °C}$

بنابراین، چون $q = UA \Delta T_m$ پس:

$A = \frac{۱/۸۹۵ \times ۱۰^۵}{(۳۲۰)(۳۷/۴۴)} = ۱۵/۸۲ \text{ m}^۲ [۱۷۰ \text{ ft}^۲]$

مثال ۱۰-۵ مبدل گرمایی پوسته و لوله

می‌خواهیم به‌جای مبدل گرمایی دو لولهٔ مثال ۱۰-۴ از مبدل پوسته و لوله‌ای استفاده کنیم که آب در یک پاس پوسته و روغن در دو پاس لوله جریان دارد. مساحت مورد نیاز برای این مبادله را با این فرض حساب کنید که ضریب انتقال گرمای کلی همان $\frac{W}{m^2.°C}$ ۳۲۰ باشد.

حل :

برای حل این مسأله، باید ضریب اصلاحی را از شکل ۱۰-۸ تعیین کنیم که با LMTD محاسبه شده براساس مبدل جریان مخالف به کار می‌رود. سنجه‌های مورد نظر طبق نام‌گذاری شکل ۱۰-۸ چنین است:

$T_۱ = ۳۵ \text{ °C} \quad T_۲ = ۷۵ \text{ °C} \quad t_۱ = ۱۱۰ \text{ °C} \quad t_۲ = ۷۵ \text{ °C}$

$P = \frac{t_۲ - t_۱}{T_۱ - t_۱} = \frac{۷۵ - ۱۱۰}{۳۵ - ۱۱۰} = ۰/۴۶۷$

$R = \frac{T_۱ - T_۲}{t_۲ - t_۱} = \frac{۳۵ - ۷۵}{۷۵ - ۱۱۰} = ۱/۱۴۳$

بنابراین ضریب اصلاح برابر است با:

$F = ۰/۸۱$

و انتقال گرما برابر است با:

$q = UAF \Delta T_m$

بنابراین:

$A = \frac{۱/۸۹۵ \times ۱۰^۵}{(۳۲۰)(۰/۸۱)(۳۷/۴۴)} = ۱۹/۵۳ \text{ m}^۲ [۲۱۰ \text{ ft}^۲]$

مثال ۱۰-۶ طراحی مبدل گرمایی پوسته و لوله

آب با آهنگ $\left[۳/۷۸۳ \frac{kg}{s}\right]$ ۳۰۰۰۰ $\frac{lb_m}{h}$ از ۱۰۰ تا ۱۳۰ °F [۳۷/۷۸ تا ۵۴/۴۴ °C] در مبدلی گرمایی پوسته و لوله گرما می‌بیند. پوسته یک پاس است و در آن آب به‌عنوان سیال گرمایش به میزان $\left[۱/۸۹۲ \frac{kg}{s}\right]$ ۱۵۰۰۰ $\frac{lb_m}{h}$ با دمای ورودی ۲۰۰ °F [۹۳/۳۳ °C] جریان دارد. ضریب انتقال گرمای کلی $\left[۱۴۱۹ \frac{W}{m^۲.°C}\right]$ ۲۵۰ $\frac{Btu}{h.ft^۲.°F}$ و سرعت متوسط آب در لوله‌های به قطر [۱/۹۰۵ cm] $\frac{۳}{۴}$ in برابر $\left[۰/۳۶۶ \frac{m}{s}\right]$ ۱/۲ $\frac{ft}{s}$ است. به‌خاطر محدودیت جا، طول لوله‌ها نباید از

۸ ft [۲/۴۳۸ m] بلندتر باشد. تعداد پاس‌های لوله، تعداد لوله‌ها در هر پاس و طول لوله‌ها را با توجه به این محدودیت حساب کنید.

حل :

نخست فرض می‌کنیم که یک پاس لوله وجود دارد و سپس بررسی می‌کنیم ببینیم که آیا این با شرایط مسأله جور درمی‌آید. دمای خروجی آب داغ را از فرمول زیر حساب می‌کنیم:

$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = \dot{m}_h c_h \Delta T_h$

(الف) $\Delta T_h = \frac{(۳۰۰۰۰)(۱)(۱۳۰ - ۱۰۰)}{(۱۵۰۰۰)(۱)} = ۶۰ \text{ °F} = ۳۳/۳۳ \text{ °C}$

بنابراین:

$T_{h,\text{خروجی}} = ۹۳/۳۳ - ۳۳/۳۳ = ۶۰ \text{ °C}$

کل انتقال گرمای مورد نیاز برای سیال سرد از معادلهٔ (الف) به‌دست می‌آید:

$q = (۳/۷۸۳)(۴۱۸۲)(۵۴/۴۴ - ۳۷/۷۸) = ۲۶۳/۶ \text{ kW} \left[۸/۰۸ \times ۱۰^۵ \frac{Btu}{h}\right]$

برای مبدل جریان مخالف با دمای لازم:

$\text{LMTD} = \Delta T_m = \frac{(۹۳/۳۳ - ۵۴/۴۴) - (۶۰ - ۳۷/۷۸)}{\ln\left(\frac{۹۳/۳۳ - ۵۴/۴۴}{۶۰ - ۳۷/۷۸}\right)} = ۲۹/۷۸ \text{ °C}$

$q = UA \Delta T_m$

(ب) $A = \frac{۲/۶۳۶ \times ۱۰^۵}{(۱۴۱۹)(۲۹/۷۸)} = ۶/۲۳۸ \text{ m}^۲ [۶۷/۱ \text{ ft}^۲]$

مساحت جریان کل را با استفاده از سرعت متوسط آب در لوله‌ها و آهنگ جریان چنین حساب می‌کنیم:

$\dot{m}_c = \rho A u$

(پ) $A = \frac{۳/۷۸۳}{(۱۰۰۰)(۰/۳۶۶)} = ۰/۰۱۰۳۴ \text{ m}^۲$

این مساحت برابر حاصل ضرب تعداد لوله‌ها در مساحت جریان هر لوله است:

$۰/۰۱۰۳۴ = n \frac{\pi d^۲}{۴}$

$n = \frac{(۰/۰۱۰۳۴)(۴)}{\pi (۰/۰۱۹۰۵)^۲} = ۳۶/۳$

یا $n = ۳۶$ لوله. سطح جانبی یک متر لوله برابر است با:

$\pi d = \pi (۰/۰۱۹۰۵) = ۰/۰۵۹۸ \frac{\text{m}^۲}{\text{متر لوله}}$

به‌خاطر داریم که مساحت کل لازم برای مبدل یک پاس لوله از معادله (ب) محاسبه و برابر ۶/۲۳۸ $\text{m}^۲$ شد. بنابراین می‌توانیم طول لوله را برای این نوع مبدل چنین حساب کنیم:

$n \pi d L = ۶/۲۳۸$

$L = \frac{۶/۲۳۸}{(۳۶)(۰/۰۵۹۸)} = ۲/۸۹۸ \text{ m}$

این طول بزرگ‌تر از طول مجاز ۲/۴۳۸ m می‌باشد، بنابراین باید تعداد پاس‌ها را از یکی بیش‌تر کنیم. با افزایش تعداد پاس‌ها متناسباً مساحت کل مورد نیاز را افزایش می‌دهیم زیرا مقدار LMTD به‌خاطر ضریب اصلاح F کاهش می‌یابد. حال دو پاس لوله را آزمایش می‌کنیم. از شکل ۱۰-۸، $F = ۰/۸۸$ و بنابراین:

$A_{\text{کل}} = \frac{q}{UF \Delta T_m} = \frac{۲/۶۳۶ \times ۱۰^۵}{(۱۴۱۹)(۰/۸۸)(۲۹/۷۸)} = ۷/۰۸۹ \text{ m}^۲$

تعداد لوله‌های هر پاس هنوز به‌خاطر شرط سرعت برابر ۳۶ عدد است. اکنون مساحت کل مبدل دو پاس لوله به‌صورت زیر با طول رابطه دارد:

$A_{\text{کل}} = ۲n \pi d L$

بنابراین: $L = \frac{۷/۰۸۹}{(۲)(۳۶)(۰/۰۵۹۸)} = ۱/۶۴۶ \text{ m} [۵/۴ \text{ ft}]$

و این طول کم‌تر از ۲/۴۳۸ m و مورد قبول است. بنابراین انتخاب طرح نهایی چنین است:

تعداد لوله‌ها در هر پاس = ۳۶

تعداد پاس‌ها = ۲

طول لوله در هر پاس = ۱/۶۴۶ m [۵/۴ ft]

مثال ۱۰-۷ مبدل جریان متقاطع با یک سیال آمیخته

برای گرم کردن روغن در لوله‌ها $\left(c = ۱/۹ \frac{kJ}{kg.°C}\right)$ از ۱۵ °C تا ۸۵ °C از مبدلی گرمایی مثل شکل ۱۰-۴ استفاده می‌کنیم. روی سطح خارجی لوله‌ها جریانی وجود دارد که در دمای ۱۳۰ °C وارد و در ۱۱۰ °C از آن خارج و آهنگ جرمی آن $\frac{kg}{s}$ ۵/۲ است. ضریب انتقال گرمای کلی $\frac{W}{m^۲.°C}$ ۲۷۵ و c بخار $\frac{kJ}{kg.°C}$ ۱/۸۶ است. مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

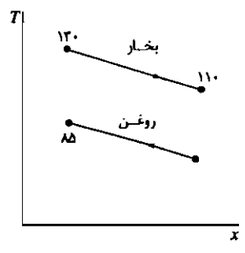
حل :

مقدار انتقال گرمای کل را می‌توان از موازنه انرژی روی بخار به‌دست آورد:

$q = \dot{m}_s c_s \Delta T_s = (۵/۲)(۱/۸۶)(۱۳۰ - ۱۱۰) = ۱۹۳ \text{ kW}$

می‌توانیم مساحت را از معادلهٔ (۱۰-۱۳) حساب کنیم. مقدار ΔT_m *مثل اینکه مبدل دو لوله جریان مخالف باشد*، یعنی مثل شکل زیر،حساب می‌شود. بنابراین:

$\Delta T_m = \frac{(۱۳۰ - ۸۵) - (۱۱۰ - ۱۵)}{\ln\left(\frac{۱۳۰ - ۸۵}{۱۱۰ - ۱۵}\right)} = ۶۶/۹ \text{ °C}$



شکل مثال ۱۰-۷.

حال، از شکل ۱۰-۱۱، $t_۱$ و $t_۲$ نماینده دماهای سیال نیامیخته (روغن) و $T_۱$ و

$T_۲$ دمای سیال آمیخته (بخار) خواهند بود و در نتیجه:

$$T_۱ = ۱۳۰ \qquad T_۲ = ۱۱۰ \qquad t_۱ = ۱۵ \qquad t_۲ = ۸۵\ ^\circ C$$

و داریم:

$$R = \frac{۱۳۰ - ۱۱۰}{۸۵ - ۱۵} = ۰/۲۸۶ \qquad P = \frac{۸۵ - ۱۵}{۱۳۰ - ۱۵} = ۰/۶۰۹$$

با مراجعه به شکل ۱۰-۱۱ درمی‌یابیم که:

$$F = ۰/۹۷$$

و لذا مساحت چنین به‌دست می‌آید:

$$A = \frac{q}{UF\,\Delta T_m} = \frac{۱۹۳۰۰۰}{(۲۷۵)(۰/۹۷)(۶۶/۹)} = ۱۰/۸۲\ m^۲$$

مثال ۱۰-۸ آثار آهنگ جریان‌های خارج از طرح در مبدل مثال ۱۰-۷

عملکرد انتقال گرمای مبدل مثال ۱۰-۷ را در صورتی بررسی کنید که آهنگ جریان روغن نصف شود ولی آهنگ جریان بخار ثابت بماند. فرض کنید U در $۲۷۵\ \frac{W}{m^{۲}\,^\circ C}$ ثابت بماند.

حل:

آهنگ جریان روغن را در مثال ۱۰-۷ حساب نکردیم و حالا آن را حساب می‌کنیم:

$$q = \dot m_o\, c_o\, \Delta T_o$$

$$\dot m_o = \frac{۱۹۳}{(۱/۹)(۸۵ - ۱۵)} = ۱/۴۵\ \frac{kg}{s}$$

آهنگ جریان جدید نصف این مقدار یعنی برابر $۰/۷۲۵\ \frac{kg}{s}$ است. فرض کرده‌ایم که دماهای ورودی ثابت و ۱۳۰ °C برای بخار و ۱۵ °C برای روغن باشند. رابطهٔ جدید انتقال گرما چنین است:

$$q = \dot m_o c_o\,(T_{e,o} - ۱۵) = \dot m_s\, c_{ps}\,(۱۳۰ - T_{e,s}) \qquad \text{(الف)}$$

ولی دماهای خروجی، $T_{e,o}$ و $T_{e,s}$ مجهولند. به علاوه ΔT_m بدون این دماها مجهول است، همان طور که مقادیر R و P شکل ۱۰-۱۱ مجهولند. این بدان معنی است که برای به‌دست آوردن دماهای خروجی از معادلهٔ (الف) و معادلهٔ زیر باید از روش تکراری استفاده کنیم:

$$q = UAF\,\Delta T_m \qquad \text{(ب)}$$

روش کلی آنست که دماهای خروجی را فرض کنیم تا q حاصل از معادلات (الف) و (ب) با هم یکی شود.

هدف این مثال نشان دادن این نکته است که وقتی دماهای ورودی و خروجی مجهولند و یا به سادگی به‌دست نمی‌آیند نیاز به استفاده از روش تکراری است. لازم نیست در مورد این تکرار بحث کنیم زیرا می‌توان با استفاده از فنون بخش ۱۰-۶ از آن اجتناب کرد.

۱۰-۶ روش NTU - ضریب تأثیر

روش LMTD وقتی در تحلیل مبدل گرمایی مفید است که دماهای ورودی و خروجی معلوم یا به سادگی تعیین شود. در نتیجه LMTD به‌سادگی تعیین شده، مقدار جریان گرما، مساحت سطح، یا ضریب انتقال گرمای کلی را می‌توان تعیین کرد. غالباً در تعیین دماهای ورودی و خروجی مبدل گرمایی اغلب به دلیل وجود تابع لگاریتمی در LMTD از یک روش تکراری استفاده می‌کنیم. تحلیل این موارد را می‌توان به‌سادگی با استفاده از روشی پیش برد که اساسش بر ضریب تأثیر مبدل گرمایی در انتقال مقدار معینی گرما است. روش ضریب تأثیر در تحلیل مسائلی نیز خوب است که مقایسه بین انواع مختلف مبدل‌های گرمایی به‌منظور انتخاب بهترین نوع برای انجام منظوری خاص در آنها صورت می‌گیرد.

ضریب تأثیر مبدل گرمایی را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon = \text{ضریب تأثیر} = \frac{\text{انتقال گرمای واقعی}}{\text{بیشینه انتقال گرمای ممکن}}$$

انتقال گرمای واقعی را می‌توان با محاسبه انرژی تلف‌شده به‌وسیله سیال گرم یا انرژی کسب شده توسط سیال سرد، حساب کرد. مبدل‌های گرمای جریان موازی و جریان مخالف شکل ۱۰-۷ را درنظر بگیرید. در مبدل جریان موازی:

$$q = \dot m_h c_h\,(T_{h۱} - T_{h۲}) = \dot m_c c_c\,(T_{c۲} - T_{c۱}) \qquad (۱۴\text{-}۱۰)$$

و در مبدل جریان مخالف:

$$q = \dot m_h c_h\,(T_{h۱} - T_{h۲}) = \dot m_c c_c\,(T_{c۱} - T_{c۲}) \qquad (۱۵\text{-}۱۰)$$

در تعیین بیشینهٔ انتقال گرمای ممکن مبدل، نخست می‌دانیم که این مقدار وقتی به‌دست می‌آید که یکی از سیالات، تحت تغییر دمایی برابر اختلاف دمای بیشینهٔ موجود در مبدل قرار گیرد که همان اختلاف دمای ورودی سیال‌های گرم و سرد است. سیالی می‌تواند این بیشینه اختلاف دما را بپذیرد که **کمینهٔ** $\dot mc$ را دارد زیرا موازنه انرژی ایجاب می‌کند که انرژی دریافتی یک سیال برابر با انرژی از دست‌رفته از سیال دیگر باشد؛ چنان‌چه اجازه دهیم سیالی که $\dot mc$ آن بزرگ‌تر است تحت اختلاف دمای بیشینه قرار گیرد، لازم است سیال دیگر تحت اختلاف دمایی بزرگ‌تر از مقدار بیشینه قرار گیرد، و این غیر ممکن است. بنابراین، بیشینه انتقال گرمای ممکن چنین بیان می‌شود:

$$q_{\max} = (\dot mc)_{\min}\,(T_{h_{\text{ورودی}}} - T_{c_{\text{ورودی}}}) \qquad (۱۶\text{-}۱۰)$$

سیال کمینه می‌تواند، بسته به آهنگ جریان جرمی و گرماهای ویژه، سیال گرم یا سرد باشد. برای مبدل جریان موازی:

$$\varepsilon_h = \frac{\dot m_h c_h\,(T_{h۱} - T_{h۲})}{\dot m_h c_h\,(T_{h۱} - T_{c۱})} = \frac{T_{h۱} - T_{h۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}} \qquad (۱۷\text{-}۱۰)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\dot m_c c_c\,(T_{c۲} - T_{c۱})}{\dot m_c c_c\,(T_{h۱} - T_{c۱})} = \frac{T_{c۲} - T_{c۱}}{T_{h۱} - T_{c۱}} \qquad (۱۸\text{-}۱۰)$$

زیرنویس‌های ضریب تأثیر، سیالی را نشان می‌دهد که کمینهٔ $\dot mc$ را دارد. برای مبدل جریان مخالف:

$$\varepsilon_h = \frac{\dot m_h c_h\,(T_{h۱} - T_{h۲})}{\dot m_h c_h\,(T_{h۱} - T_{c۲})} = \frac{T_{h۱} - T_{h۲}}{T_{h۱} - t_{c۲}} \qquad (۱۹\text{-}۱۰)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\dot m_c c_c\,(T_{c۱} - T_{c۲})}{\dot m_c c_c\,(T_{h۱} - T_{c۲})} = \frac{T_{c۱} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۲}} \qquad (۲۰\text{-}۱۰)$$

به‌طور کلی، ضریب تأثیر چنین بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\Delta T\,(\text{سیال کمینه})}{\text{بیشینه اختلاف دما در مبدل گرمایی}} \qquad (۲۱\text{-}۱۰)$$

می‌توانیم برای ضریب تأثیر جریان موازی عبارتی چنین به‌دست آوریم. معادلهٔ (۱۰-۱۰) را بازنویسی کرده، داریم:

$$\ln\frac{T_{h۲} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}} = -UA\left(\frac{۱}{\dot m_h c_h} + \frac{۱}{\dot m_c c_c}\right)$$

$$= \frac{-UA}{\dot m_c c_c}\left(۱ + \frac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}\right) \qquad (۲۲\text{-}۱۰)$$

یا:

$$\frac{T_{h۲} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}} = exp\left[\frac{-UA}{\dot m_c c_c}\left(۱ + \frac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}\right)\right] \qquad (۲۳\text{-}۱۰)$$

چنان‌چه سیال سرد سیال کمینه باشد:

$$\varepsilon = \frac{T_{c۲} - T_{c۱}}{T_{h۱} - T_{c۱}}$$

نسبت دما در معادله (۱۰-۲۳) را بازنویسی کرده، داریم:

$$\frac{T_{h۲} - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}} = \frac{T_{h۱} + \dfrac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}(T_{c۱} - T_{c۲}) - T_{c۲}}{T_{h۱} - T_{c۱}} \qquad (۲۴\text{-}۱۰)$$

که در آن مقدار:

$$T_{h۲} = T_{h۱} + \frac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}(T_{c۱} - T_{c۲})$$

را از معادله (۱۰-۶) جای‌گزین کرده‌ایم. حال می‌توان معادله (۱۰-۲۴) را بازنویسی کرد:

$$\frac{(T_{h۱} - T_{c۱}) + \dfrac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}(T_{c۱} - T_{c۲}) + (T_{c۱} - T_{c۲})}{T_{h۱} - T_{c۱}} = ۱ - \left(۱ + \frac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}\right)\varepsilon$$

مقدار ضریب تأثیر با جای‌گزینی این رابطه در معادلهٔ (۱۰-۲۳) چنین به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon = \frac{۱ - exp\left[\left(\dfrac{-UA}{\dot m_c c_c}\right)\left(۱ + \dfrac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}\right)\right]}{۱ + \dfrac{\dot m_c c_c}{\dot m_h c_h}} \qquad (۲۵\text{-}۱۰)$$

می‌توان نشان داد که وقتی سیال گرم، سیال کمینه است به عبارتی مشابه این عبارت، برای ضریب تأثیر، می‌رسیم که در آن فقط جای $\dot m_c c_c$ با $\dot m_h c_h$ عوض می‌شود. در نتیجه، معمولاً ضریب تأثیر را چنین می‌نویسند:

$$\varepsilon = \frac{۱ - \exp\left[\left(\dfrac{-UA}{C_{\min}}\right)\left(۱ + \dfrac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)\right]}{۱ + \dfrac{C_{\min}}{C_{\max}}} \qquad (۲۶\text{-}۱۰)$$

که $C = \dot mc$ به عنوان آهنگ ظرفیت تعریف می‌شود.

برای حالت جریان مخالف از تحلیلی مشابه استفاده می‌شود و رابطهٔ زیر برای ضریب تأثیر به‌دست می‌آید:

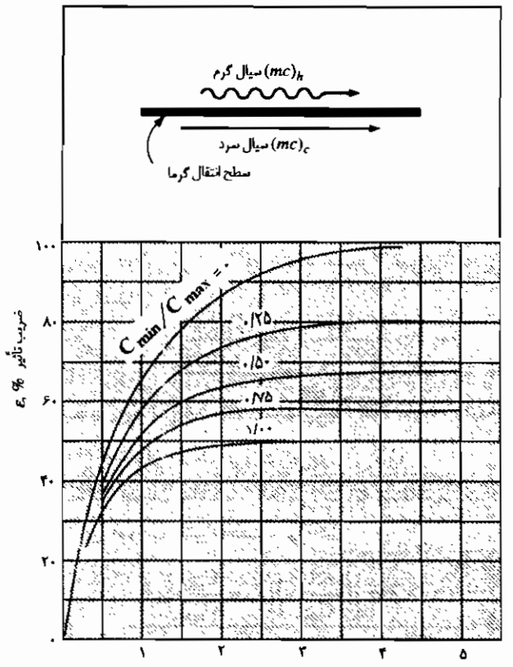
$$\varepsilon = \frac{۱ - \exp\left[\left(\dfrac{-UA}{C_{\min}}\right)\left(۱ - \dfrac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)\right]}{۱ - \left(\dfrac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)\exp\left[\left(\dfrac{-UA}{C_{\min}}\right)\left(۱ - \dfrac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)\right]} \qquad (۲۷\text{-}۱۰)$$

جمله $\frac{UA}{C_{\min}}$ ***تعداد واحدهای انتقال*** (NTU) نامیده می‌شود زیرا نشان دهنده اندازه مبدل گرمایی است.

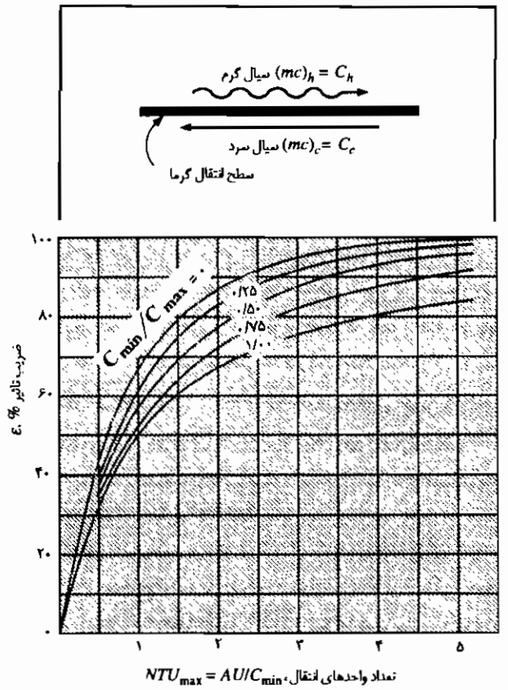
کیز Kays و لاندن [۳] نسبت‌های ضریب تأثیر آرایش‌های مختلف مبدل گرمایی را ارائه کرده‌اند، و بعضی از نتایج تحلیل آنها به صورت نمودار در شکل‌های ۱۰-۱۲ تا ۱۰-۱۷ موجودند. مثال‌های ۱۰-۹ تا ۱۰-۱۴ استفاده از روش NTU - ضریب تأثیر را در تحلیل مبدل گرمایی نشان می‌دهد.

نمودارهای NTU - ضریب تأثیر استفاده عملی زیادی در مسائل طراحی دارد اما در برخی از کاربردها به دقتی بیش‌تر از قرائت نمودارها نیازمندیم. به‌علاوه، ممکن است در بسیاری از روش‌های پرزحمت طراحی از کامپیوتر استفاده شود که در این حالت نیاز به معادلات این منحنی‌ها داریم. خلاصه‌ای از روابط ضریب تأثیر در جدول ۱۰-۳ آمده است. در بعضی موارد هدف از تحلیل، تعیین NTU است و امکان ارائه رابطه‌ای صریح برای NTU برحسب ضریب تأثیر و نسبت ظرفیت وجود دارد. بعضی از این روابط در جدول ۱۰-۴ ارائه شده‌اند.

فرمول‌های یک پاس پوسته و ۲، ۴، ۶ پاس لوله برای ۲ پاس لوله نیز کاملاً صحیح‌اند ولی برای ضرایب بالاتر اندکی خطا به‌وجود می‌آید و این خطا معمولاً کم‌تر از ۱ درصد برای C کم‌تر از ۰/۵ و N کم‌تر از ۳/۰ است. برای $N = ۶/۰$ و $C = ۱/۰$ مقدار خطای این فرمول‌ها حدود ۶/۵ درصد است. کراوس و کرن [۱۰] اطلاعات بیش‌تری داده‌اند.



شکل ۱۰-۱۲ ضریب تأثیر برای عمل‌کرد مبدل جریان موازی.



شکل ۱۰-۱۳ ضریب تأثیر برای عمل‌کرد مبدل جریان مخالف.

دیگ‌ها و چگالنده‌ها

قبلاً گفتیم که دمای سیال در فرآیند جوش یا چگالش اساساً ثابت می‌ماند و یا سیال مثل حالتی عمل می‌کند که گرمای ویژه بی‌نهایت دارد. در این حالات $\frac{C_{min}}{C_{max}} \to 0$ و تمام روابط ضریب تأثیر مبدل گرمایی به معادلهٔ ساده‌ای نزدیک می‌شوند:

$$\varepsilon = 1 - e^{-NTU}$$

این معادله در انتهای جدول ۱۰-۳ نشان داده شده است.

مثال ۱۰-۹ محاسبات خارج از طرح با استفاده از روش $\varepsilon - NTU$

مثال ۱۰-۸ را با استفاده از روش ضریب تأثیر کامل کنید.

حل :

برای بخار:

$$C_s = \dot{m}_s c_s = (۵/۲)(۱/۸۶) = ۹/۶۷ \frac{kW}{°C}$$

و برای روغن:

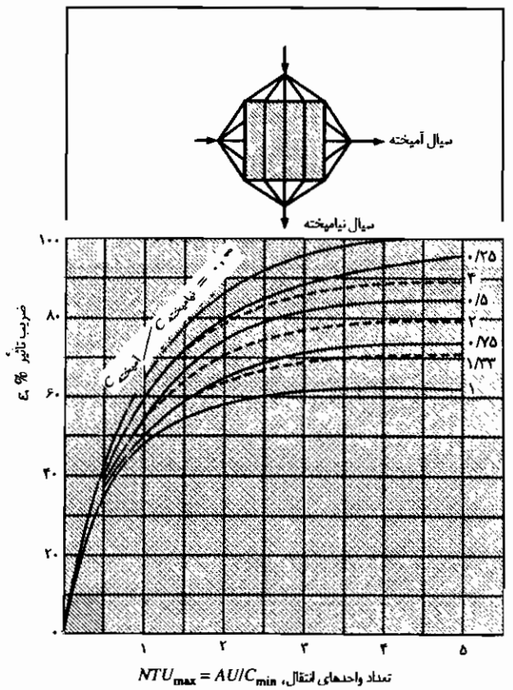
$$C_o = \dot{m}_o c_o = (۰/۷۲۵)(۱/۹) = ۱/۳۸ \frac{kW}{°C}$$

بنابراین روغن، سیال کمینه است و در نتیجه:

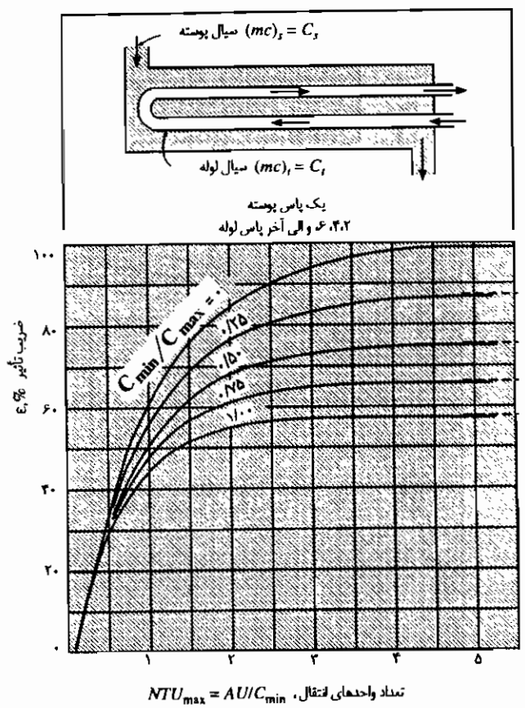
$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{۱/۳۸}{۹/۶۷} = ۰/۱۴۳$$

و :

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}} = \frac{(۲۷۵)(۱۰/۸۲)}{۱۳۸۰} = ۲/۱۵۶$$



شکل ۱۰-۱۴ ضریب تأثیر برای مبدل جریان متقاطع با یک سیال آمیخته.



شکل ۱۰-۱۶ ضریب تأثیر برای عمل‌کرد مبدل جریان موازی مخالف ۱-۲.

از جدول استفاده کرده و توجه داشته باشید که C_{min} (روغن) نیامیخته و C_{max} (بخار) آمیخته است و در نتیجه از رابطهٔ اول جدول استفاده می‌شود. بنابراین ε را چنین حساب می‌کنیم:

$$\varepsilon = \left(\frac{۱}{۰/۱۴۳}\right)\{۱ - \exp[-(۰/۱۴۳)(۱ - e^{-۲/۱۵۶})]\} = ۰/۸۳۱$$

اگر از شکل ۱۰-۱۴ استفاده کرده بودیم به مقدار زیر می‌رسیدیم:

$$\frac{C_{\text{آمیخته}}}{C_{\text{نیامیخته}}} = \frac{۹/۶۷}{۱/۳۸} = ۷/۰۱$$

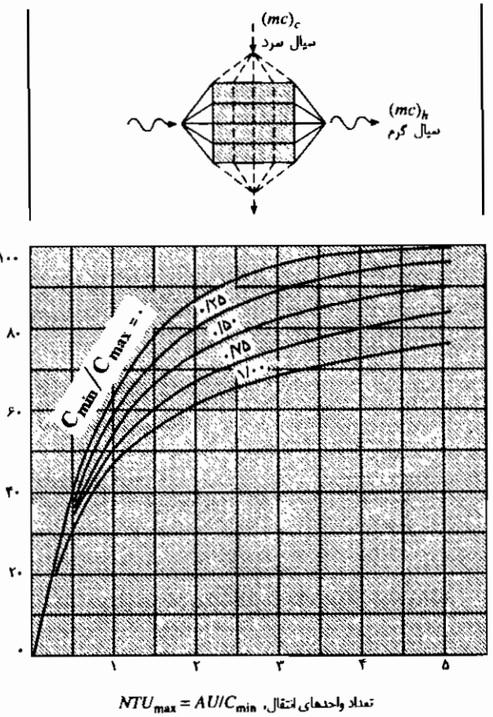
و باز هم باید $\varepsilon \simeq ۰/۸$ را تعیین می‌کردیم. حال با استفاده از ضریب تأثیر می‌توانیم اختلاف دمای سیال کمینه (روغن) را چنین حساب کنیم:

$$\Delta T_o = \varepsilon\,(\Delta T_{max}) = (۰/۸۳۱)(۱۳۰ - ۱۵) = ۹۵/۵°C$$

بنابراین، مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$q = \dot{m}_o c_o\,\Delta T_o = (۱/۳۸)(۹۵/۵) = ۱۳۲\,kW$$

و کاهش ۵۰٪ آهنگ روغن فقط باعث ۳۲٪ کاهش مقدار انتقال گرما می‌شود.



شکل ۱۰-۱۵ ضریب تأثیر برای مبدل جریان متقاطع با سیالات نیامیخته.

مثال ۱۰-۱۰ محاسبه خارج از طرح مبدل مثال ۱۰-۴

از مبدل گرمایی مثال ۱۰-۴ برای گرم کردن آب مثال استفاده می‌شود. با استفاده از همان دماهای سیال ورودی، دمای خروجی آب را وقتی حساب کنید که فقط $۴۰ \frac{kg}{min}$ آب گرم شده، همان مقدار روغن به کار می‌رود. هم‌چنین انتقال گرمای کل در این شرایط تازه را بیابید.

حل :

آهنگ جریان روغن از موازنه انرژی مسأله اصلی به‌دست می‌آید:

(الف)
$$\dot{m}_h c_h\,\Delta T_h = \dot{m}_c c_c\,\Delta T_c$$

$$\dot{m}_h = \frac{(۶۸)(۴۱۸۰)(۷۵ - ۳۵)}{(۱۹۰۰)(۱۱۰ - ۷۵)} = ۱۷۰/۹۷ \frac{kg}{min}$$

حال آهنگ‌های ظرفیت برای شرایط جدید چنین حساب می‌شود:

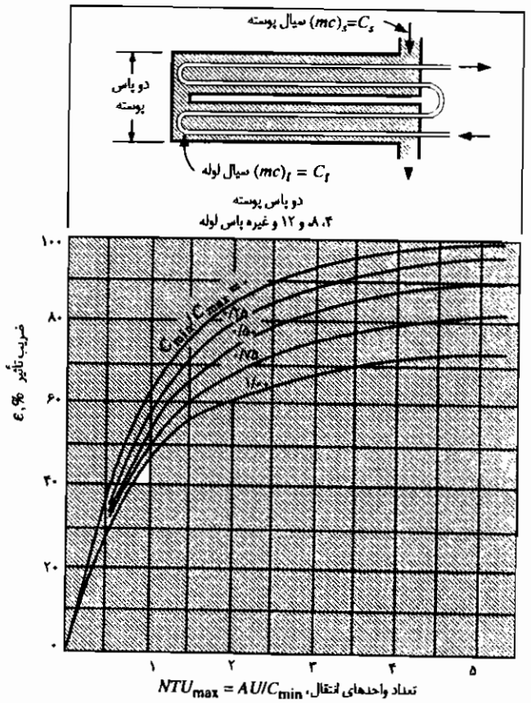
$$\dot{m}_h c_h = \frac{۱۷۰/۹۷}{۶۰}(۱۹۰۰) = ۵۴۱۴ \frac{W}{°C}$$

$$\dot{m}_c c_c = \frac{۴۰}{۶۰}(۴۱۸۰) = ۲۷۸۷ \frac{W}{°C}$$

بنابراین آب (سیال سرد) سیال کمینه است و:

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{۲۷۸۷}{۵۴۱۴} = ۰/۵۱۵$$

(ب)
$$NTU_{max} = \frac{UA}{C_{min}} = \frac{(۳۲۰)(۱۵/۸۲)}{۲۷۸۷} = ۱/۸۱۶$$



شکل ۱۰-۱۷ ضریب تأثیر برای عمل‌کرد مبدل جریان مخالف چندپاس ۴-۲.

جدول ۱۰-۳ روابط ضریب تأثیر مبدل گرمایی

$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} \qquad N = NTU = \frac{UA}{C_{min}}$$

شکل هندسی جریان	رابطه
دولوله:	
جریان موازی	$\varepsilon = \dfrac{1 - \exp[-N(1+C)]}{1+C}$
جریان مخالف	$\varepsilon = \dfrac{1 - \exp[-N(1-C)]}{1 - C\exp[-N(1-C)]}$
جریان مخالف، $C = 1$	$\varepsilon = \dfrac{N}{N+1}$
جریان متقاطع:	
هر دو سیال نیامیخته‌اند	$\varepsilon = 1 - \exp\left[\dfrac{\exp(-NCn) - 1}{Cn}\right]$ که $n = N^{-0.22}$
هر دو سیال آمیخته‌اند	$\varepsilon = \left[\dfrac{1}{1-\exp(-N)} + \dfrac{C}{1-\exp(-NC)} - \dfrac{1}{N}\right]^{-1}$
C_{max} آمیخته و C_{min} نیامیخته	$\varepsilon = \left(\dfrac{1}{C}\right)\{1-\exp[-C(1-e^{-N})]\}$
C_{max} نیامیخته و C_{min} آمیخته	$\varepsilon = 1-\exp\left\{-\left(\dfrac{1}{C}\right)[1-\exp(-NC)]\right\}$
پوسته و لوله:	
یک پاس پوسته، ۲، ۴، ۶ پاس لوله	$\varepsilon = 2\left\{1 + C + (1+C^2)^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1+\exp[-N(1+C^2)^{\frac{1}{2}}]}{1-\exp[-N(1+C^2)^{\frac{1}{2}}]}\right\}^{-1}$
چند پاس پوسته، $2n$، $4n$، $6n$	$\varepsilon = \dfrac{\left[\dfrac{1-\varepsilon_p C}{1-\varepsilon_p}\right]^n - 1}{\left[\dfrac{1-\varepsilon_p C}{1-\varepsilon_p}\right]^n - C}$
پاس لوله (ε_p = ضریب تأثیر هر پاس پوسته و n = تعداد پاس‌های پوسته)	
مورد خاص برای $C = 1$	$\varepsilon = \dfrac{n\varepsilon_p}{1 + (n-1)\varepsilon_p}$
تمام مبدل‌ها با $C = 0$	$\varepsilon = 1 - e^{-N}$

مثال ۱۰-۱۱ مبدل جریان متقاطع با یک سیال نیامیخته

مبدل گرمایی با لولهٔ پره‌دار شکل ۱۰-۵ را برای گرم کردن $5000\ \frac{ft^3}{min}\left[2/36\ \frac{m^3}{s}\right]$ هوا به فشار ۱ atm از ۶۰°F تا ۸۵°F [۱۵/۵۵ تا ۲۹/۴۴°C] به کار می‌برند. آب گرم به دمای ۱۸۰°F [۸۲/۲۲°C] وارد لوله‌ها می‌شود و هوا در عرض لوله‌ها جریان داشته و ضریب انتقال گرمای کلی متوسط $40\ \frac{Btu}{h.ft^{2.\circ}F}\left[227\ \frac{W}{m^{2.\circ}C}\right]$ و مساحت کل مبدل $100ft^2$ [۹/۲۹ m²] است. دمای خروجی آب و آهنگ انتقال گرما را بیابید.

جدول ۱۰-۴ روابط NTU برای مبدل‌های گرمایی

$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} \qquad N = NTU = \frac{UA}{C_{min}} \qquad \text{ضریب تأثیر} = \varepsilon$$

شکل هندسی جریان	رابطه
دو لوله:	
جریان موازی	$N = \dfrac{-\ln[1-(1+C)\varepsilon]}{1+C}$
جریان مخالف	$N = \dfrac{1}{C-1}\ln\left(\dfrac{\varepsilon-1}{C\varepsilon-1}\right)$
جریان مخالف، $C = 1$	$N = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$
جریان متقاطع:	
C_{max} آمیخته و C_{min} نیامیخته	$N = -\ln\left[1 + \dfrac{1}{C}\ln(1-C\varepsilon)\right]$
C_{max} نیامیخته و C_{min} آمیخته	$N = \dfrac{-1}{C}\ln\lvert 1 + C\ln(1-\varepsilon)\rvert$
پوسته و لوله:	
یک پاس پوسته، ۲، ۴، ۶ پاس لوله	$N = -(1+C^2)^{-\frac{1}{2}} \times \ln\left[\dfrac{\frac{2}{\varepsilon} - 1 - C - (1+C^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{\varepsilon} - 1 - C + (1+C^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$
تمام مبدل‌ها، $C = 0$	$N = -\ln(1-\varepsilon)$

حل:

مقدار انتقال گرما را از موازنه انرژی برای هوا حساب می‌کنیم. ابتدا، چگالی هوای ورودی برابر است با:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1/0132 \times 10^5}{(287)(288/7)} = 1/223\ \frac{kg}{m^3}$$

بنابراین جریان جرمی هوا (سیال سرد) برابر است با:

$$\dot{m}c = (2/36)(1/223) = 2/887\ \frac{kg}{s}$$

از این‌رو مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = (2/887)(1006)(29/44 - 15/55)$$

$$= 40/34\,kW\left[1/38 \times 10^5\ \frac{Btu}{h}\right] \qquad \text{(الف)}$$

از فرض مسأله نمی‌دانیم که کدام سیال کمینه است، هوا یا آب. اگر هوا سیال کمینه باشد، می‌توانیم فوراً NTU را حساب کرده، از شکل ۱۰-۱۵ برای تعیین آهنگ جریان آب استفاده کرده، دمای خروجی آب را به‌دست آوریم. اگر آب سیال کمینه باشد، باید از یک روش آزمایش و خطا با شکل ۱۰-۱۵ یا جدول ۱۰-۳ استفاده کنیم. به فرض هوا سیال کمینه است، حال فرض خود را بررسی می‌کنیم. بنابراین:

$$\dot{m}_c C_c = (2/887)(1006) = 2904\ \frac{W}{°C}$$

و:

$$NTU_{max} = \frac{UA}{C_{min}} = \frac{(227)(9/29)}{2904} = 0/726$$

ضریب تأثیر وقتی هوا را به عنوان سیال کمینه در نظر بگیریم برابر است با:

$$\varepsilon\ \frac{\Delta T_{هوا}}{\Delta T_{max}} = \frac{29/44 - 15/55}{82/22 - 15/55} = 0/208 \qquad \text{(ب)}$$

به شکل ۱۰-۱۵ مراجعه می‌کنیم. نمی‌توانیم این مقادیر را با منحنی‌های آن وفق دهیم. این بدان معنی است که سیال گرم کمینه است. بنابراین باید مقادیری برای آهنگ جریان آب فرض کنیم تا با عمل‌کردی که از شکل ۱۰-۵ یا جدول ۱۰-۳ به‌دست می‌آید وفق داشته باشد. نخست توجه دارید که:

$$C_{max} = \dot{m}_c c_c = 2904\ \frac{W}{°C} \qquad \text{(پ)}$$

$$NTU_{max} = \frac{UA}{C_{min}} \qquad \text{(ت)}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta T_h}{\Delta T_{max}} = \frac{\Delta T_h}{82/22 - 15/55} \qquad \text{(ث)}$$

$$\Delta T_h = \frac{4/034 \times 10^4}{C_{min}} = \frac{4/034 \times 10^4}{C_h} \qquad \text{(ج)}$$

تکرارها چنین است:

$\frac{C_{min}}{C_{max}}$	$C_{min} = \dot{m}_h C_h$	NTU_{max}	ΔT_h	ε محاسبه‌شده از ب‌اجدول ۱۰-۳	ε محاسبه‌شده از شکل ۱۰-۵ از معادله (ث)
0/5	1452	1/452	27/78	0/65	0/417
0/25	726	2/905	55/56	0/89	0/833
0/22	639	3/301	63/13	0/92	0/947

بنابراین آهنگ جریان آب را حساب می‌کنیم که تقریباً برابر است با:

$$\dot{m}_h c_h = 645\ \frac{W}{°C}$$

و:

$$\dot{m}_h = \frac{645}{4180} = 0/154\ \frac{kg}{s}\left[1221\ \frac{lb_m}{h}\right]$$

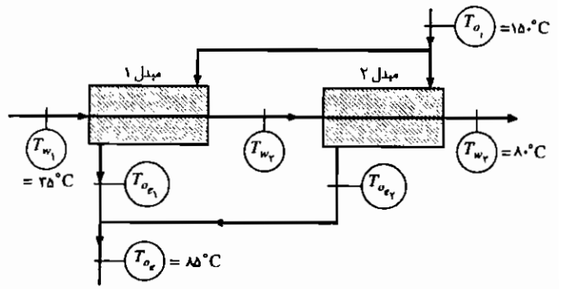
در نتیجه، دمای خروجی آب برابر است با:

$$T_{w,\,خروجی} = 82/22 - \frac{4/034 \times 10^4}{645} = 19/68°C$$

مثال ۱۰-۱۲ مقایسه انتخاب یک مبدل با دو مبدل

از مبدل گرمایی دو لوله جریان مخالفی برای گرم کردن $1/25\ \frac{kg}{s}$ آب از ۳۵ تا ۸۰°C از طریق خنک کردن روغن $\left[c_p = 2/0\ \frac{kJ}{kg.°C}\right]$ از ۱۵۰ به ۸۵°C استفاده می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $150\ \frac{Btu}{h.ft^{2.\circ}F}$ است. می‌خواهند مشابه همین مبدل را در تأسیسات محل دیگری بسازند، ولی در نظر است عمل‌کرد یک مبدل گرمایی جریان مخالف را با عمل‌کرد دو مبدل گرمایی کوچک‌تر جریان مخالف مقایسه

کنند که مطابق شکل از طرف آب به‌طور سری و از طرف روغن به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند، جریان روغن به‌طور مساوی بین دو مبدل تقسیم می‌شود و می‌توان فرض کرد که ضریب انتقال گرمای کلی مبدل‌های کوچک‌تر برابر ضریب مبدل بزرگ‌تر است. چنان‌چه قیمت مبدل‌های کوچک‌تر به ازای واحد سطح ۲۰٪ بیش‌تر باشد -کدام آرایش اقتصادی‌تر است- یک مبدل بزرگ یا دو مبدل کوچک هم اندازه؟



شکل مثال ۱۰-۱۲.

حل :

مساحت مورد نیاز هر دو آرایش را حساب و سپس قیمت‌ها را مقایسه می‌کنیم.

برای یک مبدل بزرگ:

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = \dot{m}_h c_h \Delta T_h$$

$$= (۱/۲۵)(۴۱۸۰)(۸۰ - ۳۵) = \dot{m}_h c_h (۱۵۰ - ۸۵)$$

$$= ۲/۳۵۱ \times ۱۰^۵ \text{ W} \left[۸/۰۲ \times ۱۰^۵ \frac{\text{Btu}}{\text{h}}\right]$$

$$\dot{m}_c c_c = ۵۲۲۵ \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \qquad \dot{m}_h c_h = ۳۶۱۷ \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$$

بنابراین روغن، سیال کمینه است:

$$\epsilon_h = \frac{\Delta T_h}{۱۵۰ - ۳۵} = \frac{۱۵۰ - ۸۵}{۱۵۰ - ۳۵} = ۰/۵۶۵$$

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{۳۶۱۷}{۵۲۲۵} = ۰/۶۹۲$$

از شکل ۱۰-۱۳ یا جدول ۱۰-۴ مقدار $\text{NTU}_{\max} = ۱/۰۹$ است، بنابراین:

$$A = \text{NTU}_{\max} \frac{C_{\min}}{U} = \frac{(۱/۰۹)(۳۶۱۷)}{۸۵۰} = ۴/۶۴۹ \text{ m}^۲ \quad [۵۰/۰۴ \text{ ft}^۲]$$

اکنون می‌خواهیم مقدار سطح مورد نیاز برای دو مبدل کوچک شکل را حساب کنیم.

داریم:

$$\dot{m}_h c_h = \frac{۳۶۱۷}{۲} = ۱۸۰۹ \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$$

$$\dot{m}_c c_c = ۵۲۲۵ \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$$

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{۱۸۰۹}{۵۲۲۵} = ۰/۳۴۷$$

تعداد واحدهای انتقال دو مبدل گرمایی یکسان است زیرا $C_{\min}$ و UA مبدل‌ها یکسان است. این مستلزم آن است که ضریب تأثیر مبدل‌ها یکسان باشد.

بنابراین:

$$\epsilon_۱ = \frac{T_{oi} - T_{oe,۱}}{T_{oi} - T_{w,۱}} = \epsilon_۲ = \frac{T_{oi} - T_{oe,۲}}{T_{oi} - T_{w,۲}}$$

$$\epsilon_۱ = \frac{۱۵۰ - T_{oe,۱}}{۱۵۰ - ۳۵} = \epsilon_۲ = \frac{۱۵۰ - T_{oe,۲}}{۱۵۰ - T_{w,۲}} \qquad \text{(الف)}$$

که نام‌گذاری دماها در شکل نشان داده شده‌اند. چون مقدار جریان روغن در مبدل ها یکسان و دمای متوسط روغن خروجی باید ۸۵°C باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{T_{oe,۱} + T_{oe,۲}}{۲} = ۸۵ \qquad \text{(ب)}$$

و از موازنه انرژی روی مبدل گرمایی دوم داریم:

$$(۵۲۲۵)(T_{w۳} - T_{w۲}) = (۱۸۰۹)(T_{oi} - T_{oe,۲})$$

$$(۵۲۲۵)(۸۰ - T_{w۲}) = (۱۸۰۹)(۱۵۰ - T_{oe,۲}) \qquad \text{(پ)}$$

حال سه معادله (الف)، (ب) و (پ) را داریم که می‌توان آنها را حل کرد و سه مجهول $T_{oe,۱}$، $T_{oe,۲}$ و $T_{w۲}$ را به‌دست آورد. جواب‌ها چنین است:

$$T_{oe,۱} = ۷۶/۹۸^\circ\text{C}$$

$$T_{oe,۲} = ۹۳/۰۲^\circ\text{C}$$

$$T_{w۲} = ۶۰/۲۶^\circ\text{C}$$

بنابراین ضریب تأثیر را می‌توان چنین حساب کرد:

$$\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = \frac{۱۵۰ - ۷۶/۹۸}{۱۵۰ - ۳۵} = ۰/۶۳۵$$

از شکل ۱۰-۱۳ یا جدول ۱۰-۴ مقدار $\text{NTU}_{\max} = ۱/۱۶$ را به‌دست می‌آوریم، بنابراین:

$$A = \text{NTU}_{\max} \frac{C_{\min}}{U} = \frac{(۱/۱۶)(۱۸۰۹)}{۸۵۰} = ۲/۴۷ \text{ m}^۲$$

بنابراین در می‌یابیم که برای هر مبدل کوچک به ۲/۴۷ m² سطح و یا جمعاً به ۴/۹۴ m² سطح نیاز داریم. این مقدار بیش‌تر از ۴/۶۴۹ m² مورد نیاز در مبدل بزرگ‌تر است؛ به‌علاوه، هزینه واحد سطح بیش‌تر است پس انتخاب یک مبدل بزرگ اقتصادی‌تر خواهد بود. اما توجه کنید که هزینه‌های پمپاژ روغن احتمالاً در مورد دو مبدل کوچک‌تر، کم‌تر است و بنابراین چنان‌چه هزینه پمپاژ عامل اقتصادی مهمی باشد، ممکن است به نفع مبدل‌های کوچک‌تر تصمیم گرفته شود.

مثال ۱۰-۱۳ مبدل پوسته و لوله به عنوان گرمکن هوا

برای گرم کردن هوا در مبدل گرمایی پوسته و لوله از روغن داغ به دمای ۱۰۰°C استفاده می‌شود. روغن در شش پاس و لوله و هوا در یک پاس پوسته، جریان دارد؛ مقدار ۲/۰ $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ هوا را از ۲۰ تا ۸۰°C گرم می‌کنند. گرمای ویژه روغن ۲۱۰۰ $\frac{\text{J}}{\text{kg.°C}}$ و آهنگ جریان آن ۳/۰ $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ است. مساحت لازم مبدل گرمایی را به ازای $U = ۲۰۰ \frac{\text{W}}{\text{m}^۲.^\circ\text{C}}$ حساب کنید.

حل :

موازنه انرژی اصلی چنین است:

$$\dot{m}_o c_o \Delta T_o = \dot{m}_a c_{pa} \Delta T_a$$

یا

$$(۳/۰)(۲۱۰۰)(۱۰۰ - T_{oe}) = (۲/۰)(۱۰۰۹)(۸۰ - ۲۰)$$

$$T_{oe} = ۸۰/۷۸^\circ\text{C}$$

داریم:

$$\dot{m}_h c_h = (۳/۰)(۲۱۰۰) = ۶۳۰۰ \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$$

$$\dot{m}_c c_c = (۲/۰)(۱۰۰۹) = ۲۰۱۸ \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$$

بنابراین هوا، سیال کمینه است و:

$$C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{۲۰۱۸}{۶۳۰۰} = ۰/۳۲۰۳$$

ضریب تأثیر برابر است با:

$$\epsilon = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_{\max}} = \frac{۸۰ - ۲۰}{۱۰۰ - ۲۰} = ۰/۷۵$$

حال می‌توانیم از شکل ۱۰-۱۶ و یا از رابطه تحلیلی جدول ۱۰-۴ برای به‌دست آوردن NTU استفاده کنیم. برای این مسأله، جدول را انتخاب می‌کنیم:

$$N = -(۱ + ۰/۳۲۰۳^۲)^{-\frac{۱}{۲}} \ln\left[\frac{\frac{۲}{۰/۷۵} - ۱ - ۰/۳۲۰۳ - (۱ + ۰/۳۲۰۳^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۲}{۰/۷۵} - ۱ - ۰/۳۲۰۳ + (۱ + ۰/۳۲۰۳^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\right]$$

$$= ۱/۹۹$$

حال با $U = ۲۰۰$، مساحت را چنین حساب می‌کنیم:

$$A = \text{NTU} \frac{C_{\min}}{U} = \frac{(۱/۹۹)(۲۰۱۸)}{۲۰۰} = ۲۰/۰۹ \text{ m}^۲$$

مثال ۱۰-۱۴ چگالنده آمونیاک

از مبدل گرمایی پوسته‌ای و لوله‌ای به عنوان چگالنده آمونیاک استفاده می‌شود به نحوی که بخار آمونیاک به دمای ۵۰°C به صورت بخار اشباع وارد پوسته می‌شود. آب به دمای ۲۰°C وارد لوله تک‌پاس شده، لازم است که مقدار گرمای کل ۲۰۰ kW باشد. ضریب انتقال گرمای کل از جدول ۱۰-۱ برابر ۱۰۰۰ $\frac{\text{W}}{\text{m}^۲.^\circ\text{C}}$ به‌دست می‌آید. مساحت مورد نیاز را برای وقتی محاسبه کنید که ضریب تأثیر مبدل ۶۰٪ و دمای آب خروجی ۴۰°C باشد. اگر مقدار آب نصف شده ولی مساحت مبدل گرمایی و U تغییر نکند مقدار انتقال گرما چند درصد کم می‌شود؟

حل :

جریان جرمی را می‌توان از مقدار انتقال گرما حساب کرد:

$$q = ۲۰۰ \text{ kW} = \dot{m}_w c_w \Delta T_w$$

بنابراین:

$$\dot{m}_w = \frac{۲۰۰}{(۴/۱۸)(۴۰ - ۲۰)} = ۲/۳۹ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

چون این مبدل چگالنده است آب سیال کمینه است و:

$$C_{\min} = \dot{m}_w c_w = (۲/۳۹)(۴/۱۸) = ۱۰ \frac{\text{kW}}{^\circ\text{C}}$$

مقدار NTU از انتهای جدول ۱۰-۴ به ازای $\epsilon = ۰/۶$ چنین است:

$$N = -\ln(۱ - \epsilon) = -\ln(۱ - ۰/۶) = ۰/۹۱۶$$

و در نتیجه، مساحت برابر است با:

$$A = \frac{C_{\min} N}{U} = \frac{(۱۰۰۰۰)(۰/۹۱۶)}{۱۰۰۰} = ۹/۱۶ \text{ m}^۲$$

وقتی آهنگ جریان نصف شود مقدار NTU جدید برابر است با:

$$N = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{(۱۰۰۰)(۹/۱۶)}{\left(\frac{۱۰۰۰۰}{۲}\right)} = ۱/۸۳۲$$

و ضریب تأثیر از انتهای جدول ۱۰-۳ حساب می‌شود:

$$\epsilon = ۱ - e^{-N} = ۰/۸۴$$

اختلاف دمای جدید آب چنین حساب می‌شود:

$$\Delta T_w = \epsilon(\Delta T_{\max}) = (۰/۸۴)(۵۰ - ۲۰) = ۲۵/۲^\circ\text{C}$$

و در نتیجه، مقدار انتقال گرما برابر است با:

$$q = C_{\min} \Delta T_w = \left(\frac{۱۰۰۰۰}{۲}\right)(۲۵/۲) = ۱۲۶ \text{ kW}$$

پس با نیمه کردن آهنگ جریان، مقدار انتقال گرما از ۲۰۰ به ۱۲۶ kW یعنی ۳۷٪ کاهش می‌یابد.

۱۰-۷ مبدل‌های گرمایی فشرده

برخی از سطوح تبادل گرمایی ، در مقوله‌های بحث شدهٔ بخش‌های قبلی قرار نمی‌گیرند. قابل ذکرترین آنها مبدل‌های گرمایی فشرده‌اند که مساحت آنها در واحد حجم خیلی زیاد است. این مبدل‌ها برای کاربردهایی مناسب‌ترند که در آنها گاز جریان دارد و مقدار h باید پایین باشد. کیز و لاندن [۳]، این نوع مبدل‌ها را خیلی جامع مطالعه کرده‌اند و چهار نمونه آنها در شکل ۱۰-۱۸ نشان داده شده‌اند. در شکل (۱۰-۱۸ الف) مبدل لوله‌ای پره‌دار با لوله‌های تخت نشان داده شده و شکل (۱۰-۱۸ ب) آرایش لوله‌ای پره‌دار دایروی را نشان می‌دهد. و شکل‌های (۱۰-۱۸ پ) و (۱۰-۱۸ ت) روش‌های رسیدن به مساحت خیلی بالا در دو طرف گرم و سرد مبدل را نشان می‌دهند. این دو نوع آخر در فرآیندهایی استفاده می‌شود که انتقال گرمای گاز به گاز وجود دارد.

انتقال گرما و ضریب اصطکاک دو مبدل فشرده نمونه، در شکل‌های ۱۰-۱۹ و ۱۰-۲۰ نشان داده شده‌اند. اعداد استانتون و رینولدز بر اساس سرعت‌های جرمی در سطح مقطع جریان کمینه و قطر هیدرولیکی شکل به‌دست می‌آیند.

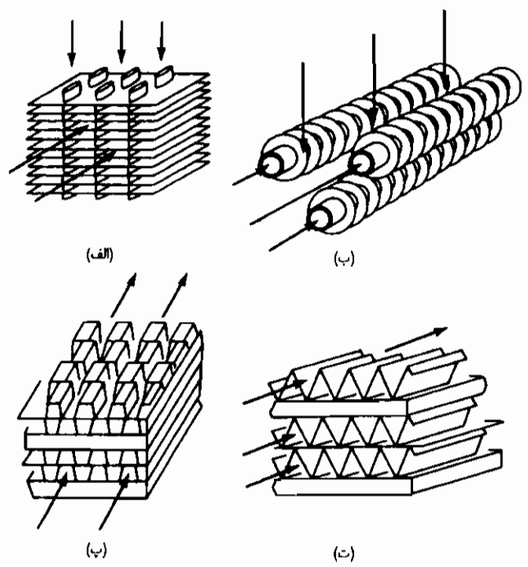
$$G = \frac{\dot{m}}{A_c} \qquad (۲۸-۱۰)$$

نسبت سطح جریان - آزاد به سطح پیشانی نیز در شکل داده شده است:

$$\sigma = \frac{A_c}{A} \qquad (۲۹-۱۰)$$

بنابراین:

$$St = \frac{h}{Gc_p} \qquad \text{Re} = \frac{D_h G}{\mu}$$



شکل ۱۰-۱۸ نمونه‌هایی از شکل‌بندی گرمایی فشرده، طبق مرجع ۳.

گام پره = ۹/۶۸/in.(۳/۸۱/cm)
قطر هیدرولیکی گذرگاه جریان = D_h=۰/۰۱۱۸۰ ft (۳/۶ mm)
ضخامت فلز پره= ۰/۰۰۴ in(۰/۱۰۲mm) مس
سطح آزاد تقسیم بر سطح پیشانی، σ = ۰/۶۹۷
سطح انتقال گرمای کل تقسیم بر حجم کل α =۲۲۹ ft^۲ / ft^۳(۷۵۱m^۲/m^۳)
سطح پره تقسیم بر سطح کل = ۰/۸۶۵

شکل ۱۰-۱۹ ضریب اصطکاک و انتقال گرمای مبدل گرمایی لوله تخت پره‌دار طبق مرجع ۳.

خواص سیال در دمای کپه‌ای متوسط ارزیابی می‌شود. انتقال گرما و اصطکاک سیال *داخل* لوله‌ها با روش قطر هیدرولیکی فصل ۶ ارزیابی می‌شود. افت فشار با استفاده از ضریب اصطکاک نمودار f و رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\Delta p = \frac{v_1 G^2}{2g_c}\left[(1+\sigma^2)\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)+f\frac{A}{A_c}\frac{v_m}{v_1}\right] \qquad (۳۰-۱۰)$$

که v_1 و v_2 به ترتیب حجم مخصوص‌های مدخل و خروجی و v_m حجم مخصوص متوسط در مبدل است که معمولاً برابر $v_m=\frac{(v_1+v_2)}{2}$ است.

روش‌های طراحی خیلی دقیقی برای مبدل‌های گرمایی فشرده وجود دارد که بحث کاملی از آنها در مرجع ۳ ارائه شده است.

مثال ۱۰-۱۵ ضریب انتقال گرما در مبدل فشرده

هوا در فشار ۱ atm و دمای ۳۰۰ K با سرعت $15\frac{m}{s}$ وارد مبدل شکل ۱۰-۱۹ می‌شود. ضریب انتقال گرما را بیابید.

حل:

خواص هوا را از جدول ۵-A چنین به‌دست می‌آوریم:

$$\rho = ۱/۱۷۷۴\ \frac{kg}{m^3} \qquad c_p = ۱/۰۰۵۷\ \frac{kJ}{kg.°C}$$

$$\mu = ۱/۹۸۳\times۱۰^{-۵}\ \frac{kg}{m.s} \qquad Pr = ۰/۷۰۸$$

از شکل ۱۰-۱۹ داریم:

$$\sigma = \frac{A_c}{A} = ۰/۶۹۷ \qquad D_h = ۰/۰۱۱۸\ ft = ۳/۵۹۷mm$$

بنابراین سرعت جرمی برابر است با:

$$G = \frac{\dot m}{A_c} = \frac{\rho u_\infty A}{A_c} = \frac{(۱/۱۷۷۴)(۱۵)}{۰/۶۹۷} = ۳۸/۱۸\ \frac{kg}{m^2.s}$$

و عدد رینولدز برابر است با:

$$Re = \frac{D_h G}{\mu} = \frac{(۳/۵۹۷\times۱۰^{-۳})(۳۸/۱۸)}{۱/۹۸۳\times۱۰^{-۵}} = ۶/۹۲۶\times۱۰^۴$$

از شکل ۱۰-۱۹ می‌توان مقدار زیر را خواند:

$$St\ Pr^{\frac{2}{3}} = ۰/۰۰۳۶ = \frac{h}{Gc_p}Pr^{\frac{2}{3}}$$

ضریب انتقال گرما برابر است با:

$$h = (۰/۰۰۳۶)(۳۸/۱۸)(۱۰۰۵/۷)(۰/۷۰۸)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= ۱۷۴\ \frac{W}{m^2.°C}\ \left[۳۰/۶۴\ \frac{Btu}{h.ft^2.°F}\right]$$

❑ ۱۰-۸ تحلیل حالت خواص متغیر

ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی به سیال مورد بررسی بستگی دارد. در نتیجه، ضریب انتقال گرمای کلی مبدل گرمایی در صورت بستگی شدید خواص سیال به دما ممکن است در سراسر مبدل خیلی تغییر کند. در این حالت، بهتر است تحلیل با روش عددی یا تفاضل محدود انجام شود. برای نشان دادن این روش، مبدل گرمایی دو لولهٔ جریان موازی سادهٔ بخش ۱۰-۵ را در نظر

می‌گیریم. این مبدل گرمایی به نمونه‌های سطح ΔA_j تقسیم می‌شود. دماهای گرم و سرد این نمو مساحت به ترتیب برابرند با T_{hj} و T_{cj} و فرض می‌کنیم که بتوان ضریب انتقال گرمای کلی را به صورت تابعی از این دماها بیان کرد. بنابراین:

$$U_j = U_j\,(T_{hj}\,,\,T_{cj})$$

انتقال گرمای نمو ΔA_j طبق معادله (۱۰-۶) برابر است با:

$$\Delta q_j = -(\dot m_h c_c)_j\,(T_{hj+1}-T_{hj})$$

$$= (\dot m_c c_c)_j\,(T_{cj+1}-T_{cj}) \qquad (۳۱-۱۰)$$

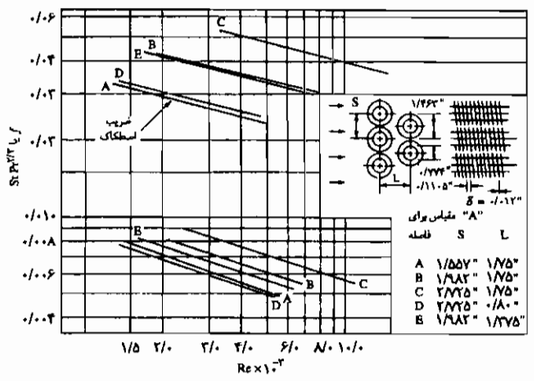
هم چنین:

$$\Delta q_j = U_j\,\Delta A_j\,(T_h - T_c)_j \qquad (۳۲-۱۰)$$

معادله تفاضل محدود مشابه معادلهٔ (۱۰-۹) چنین است:

$$\frac{(T_h-T_c)_{j+1}-(T_h-T_c)_j}{(T_h-T_c)_j} = -U_j\left[\frac{۱}{(\dot m_h c_h)_j}+\frac{۱}{(\dot m_c c_c)_j}\right]\Delta A_j$$

$$= -K_j\,(T_h\,,\,T_c)\,\Delta A_j \qquad (۳۳-۱۰)$$



قطر خارجی لوله = ۰/۷۷۴ in. (۱/۹۶cm)
گام پره = ۹/۰۵per in.(۳/۵۶/cm)
ضخامت پره = ۰/۰۱۲ in.(۰/۳۰۵/mm)
سطح پره تقسیم بر سطح کل =۰/۸۲۵

	A	B	C	D	E
قطر هیدرولیکی گذرگاه جریان D_h =	۰/۰۱۶۸۱	۰/۰۲۶۸۵	۰/۰۴۲۵	۰/۰۱۵۸۷	۰/۰۲۱۰۸ ft
	۵/۱۲	۸/۱۸	۱۳/۵۶	۴/۸۴	۶/۴۳ mm
سطح جریان آزاد تقسیم بر سطح پیشانی σ =	۰/۴۵۵	۰/۵۷۲	۰/۶۸۸	۰/۵۳۷	۰/۵۷۲
سطح انتقال گرما تقسیم بر حجم کل α =	۱۰۸	۸۵/۱	۶۱/۹	۱۲۵	۱۰۸ ft^۲/ft^۳
	۳۵۴	۲۷۹	۲۰۳	۴۱۲	۳۵۴ m^۲/m^۳

نوجه: حداقل سطح جریان آزاد در تمام موارد در فضاهای متقاطع با جریان اتفاق می‌افتد، مگر به ازای D که در آن سطح حداقل در قطرها است.

شکل ۱۰-۲۰ ضریب اصطکاک و انتقال گرمای مبدل گرمایی لوله دایروی پره‌دار، طبق مرجع ۳.

که در آن K_j راباتعریف بالا وارد کرده‌ایم. معادلهٔ (۱۰-۳۳) چنین خلاصه می‌شود:

$$\frac{(T_h-T_c)_{j+1}}{(T_h-T_c)_j} = ۱ - K_j\,\Delta A_j \qquad (۳۴-۱۰)$$

وقتی آهنگ جریان‌ها و دماهای ورودی مشخص باشد، روش تحلیل عددی روشن است:

۱- در این تحلیل مقدار ΔA_j مناسب را انتخاب کنید.

۲- مقدار U را برای شرایط ورودی و از طریق نمو ΔA اولیه حساب کنید.

۳- مقدار q را به ازای این نمو از معادلهٔ (۱۰-۳۲) حساب کنید.

۴- مقادیر T_h، T_c و $T_h - T_c$ را برای **نمو بعدی**، با استفاده از معادله‌های (۱۰-۳۱) و (۱۰-۳۴)، حساب کنید.

۵- مراحل بالا را تکرار کنید تا تمام نموهای ΔA مورد استفاده قرار گیرند.

بنابراین آهنگ انتقال گرمای کل از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$q_{کل} = \sum_{j=1}^{n}\Delta q_j$$

که n تعداد نمودارهای ΔA است.

تحلیل عددی مثل تحلیل فوق با کامپیوتر بهتر انجام می‌شود. اکثراً آهنگ انتقال گرمای حاصل از تحلیل خواص متغیر خیلی با مقادیر حاصل از تحلیل خواص ثابت متفاوت است. البته مشکل‌ترین بخش این تحلیل تعیین مقدار h است. خواننده مشتاق می‌تواند برای کسب اطلاع بیش‌تر در این زمینه پیچیده ولی مهم به نوشته‌های انتقال گرما رجوع کند.

مثال ۱۰-۱۶ پاسخ‌گذاری سیستم ذخیرهٔ انرژی گرمایی

برای گرفتن انرژی از جریان هوای گرم و ذخیرهٔ آن برای استفاده بعدی، از دستگاه ذخیره انرژی گرمایی ریگ‌بستری استفاده شده است. طرح واره این وسیله در شکل نشان داده شده است. سطح با ماده‌ای به مقدار Rکلی $2\ \frac{h.°F.ft^2}{Btu}$ پوشانده شده است. مساحت جریان ورودی $۲۵\ ft^2 = ۵\times۵$ و طول ریگ‌بستر ۱۰ ft است. خواص ریگ چنین است:

$$\rho_r = ۸۰\ \frac{lb_m}{ft^3}\ \left[۱۲۸۱/۴\ \frac{kg}{m^3}\right]$$

$$c_r = ۰/۲۱\ \frac{Btu}{lb_m.°F}\ \left[۰/۸۸\ \frac{kJ}{kg.°C}\right]$$

$$k_r = ۰/۵\ \frac{Btu}{h.ft.°F}\ \left[۰/۸۷\ \frac{W}{m.°C}\right]$$

وقتی هوا در ریگ‌ها جریان می‌یابد، در چنان تماس نزدیکی با آنها است که می‌توان دمای هوا و ریگ را در هر موقعیت x مساوی فرض کرد.

ابتدا دمای بستر ریگ ۴۰°F است و هوا در ۱ atm و ۱۰۰°F وارد می‌شود. دمای محیط اطراف در ۴۰°F باقی می‌ماند. ذخیره انرژی نسبت به دمای ۴۰°F را به صورت تابعی از زمان به ازای سرعت‌های ورودی ۱/۰ و $3/0\ \frac{ft}{s}$ حساب کنید.

انتقال انرژی به ازای اختلاف دمای ۶۰°F برابر است با:

$$q = \dot{m} c_{pa} \Delta T = (۶۳۷۵)(۰/۲۴)(۶۰) = ۹۱۸۰۰ \frac{\text{Btu}}{\text{h}} \quad [۲۶۹۰۴ \text{ W}] \qquad \text{(ت)}$$

و این مقدار خیلی بزرگ‌تر از مقدار حاصل از معادلهٔ (الف) است.

اکنون معادله موازنه انرژی را برای یکی از گره‌های محوری می‌نویسیم:

انرژی هدر رفته به محیط − انرژی انتقالی خروجی − انرژی انتقالی ورودی

آهنگ انرژی جمع شده در گره =

یا:

$$\dot{m}_a c_{pa} (T^P_{m-۱} - T^P_m) - \frac{(T^P_m - T_\infty P) \Delta x}{R_\infty} = \rho_r c_r \Delta V_r \frac{(T_m{}^{P+۱} - T^P_m)}{\Delta \tau} \qquad \text{(ث)}$$

که فرض شده دمای خروجی هوا از گره m برابر دمای ریگ در آن نقطه (T^P_m) باشد. می‌توان معادلهٔ (ث) را حل کرد و داشت:

$$T_m{}^{P+۱} = F \dot{m}_a c_{pa} T^P_{m-۱} + \left[۱ - F\left(\dot{m}_a c_{pa} + \frac{P \Delta x}{R_\infty}\right)\right] T^P_m + \frac{FP \Delta x}{R_\infty} T_\infty \qquad \text{(ج)}$$

که:

$$F = \frac{\Delta r}{\rho_r c_r \Delta V_r}$$

در اینجا P محیط و Δx نمو x است (برای این مسأله $P = ۴ \times ۵ = ۲۰$ ft).

حال دماهای در ریگ‌بستر را ضمن گذشت زمان حساب می‌کنیم.

نیاز پایداری طوری است که ضریب جملات T^P_m نمی‌تواند منفی باشد. با استفاده از $\Delta x = ۲$ft، مقدار F را $۶/۴۴۹۵ \times ۱۰^{-۴}$ به‌دست می‌آوریم که با استفاده از آن بیشینه نمو زمانی $۰/۵۴۱۷۶h$ به‌دست می‌آید. بیشینه نمو زمانی برای پایداری به ازای سرعت $۳ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ برابر $۰/۱۹۲۲h$ است. مقادیر $\Delta \tau$ زیر را برای محاسبات انتخاب می‌کنیم و در نتیجه مقادیر F محاسبه شده عبارتند از:

v	$\Delta \tau$, h	F
۱/۰	۰/۲	$۲/۳۸۰۹۵ \times ۱۰^{-۴}$
۳/۰	۰/۱	$۱/۱۹۰۴۷۶ \times ۱۰^{-۴}$

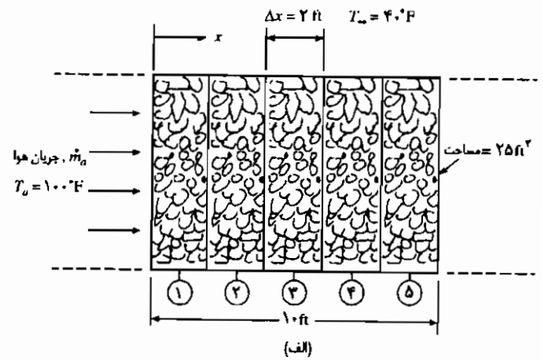
وقتی این مقادیر خواص مناسب را در معادلهٔ (چ) قرار دهیم داریم:

$$T_m{}^{P+۱} = ۰/۳۶۴۲۹۴۳ T^P_{m-۱} + ۰/۶۳۰۹۴۳ T^P_m + ۰/۱۹۰۴۷۶۲ \qquad v = ۱/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad \text{برای} \qquad \text{(چ)}$$

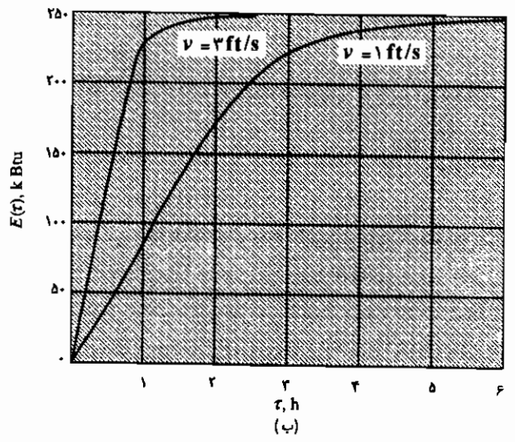
$$T_m{}^{P+۱} = ۰/۵۴۶۴۳۰۶۳۳ T^P_{m-۱} + ۰/۴۵۱۱۸۸ T^P_m + ۰/۰۹۵۲۳۸۱ \qquad v = ۳/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad \text{برای} \qquad \text{(ح)}$$

ذخیره انرژی نسبت به دمای ۴۰°F را می‌توان از فرمول زیر به صورت تابعی از زمان حساب کرد:

$$E(\tau) = \sum_{m=۱}^{۵} \rho_r c_r \Delta V_r [T_m(\tau) - ۴۰] \qquad \text{(خ)}$$



(الف)



(ب)

شکل مثال ۱۰−۱۶ (الف) طرح واره و (ب) انباشتگی انرژی.

حل :

می‌توان نشان داد که هدایت انرژی محوری در مقایسه با انتقال انرژی − جرمی کوچک است. برای اختلاف دمای ۶۰°F طول ۲ ft:

$$q_{cond} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} = (۰/۵)(۲۵) \frac{۶۰}{۲} = ۳۷۵ \frac{\text{Btu}}{\text{h}} \quad [۱۰۹/۹ \text{ W}] \qquad \text{(الف)}$$

چگالی هوا در ۱۰۰°F برابر است با:

$$\rho_a = \frac{(۱۴/۶۹۶)(۱۴۴)}{(۵۳/۳۵)(۵۶۰)} = ۰/۰۷۰۸۳ \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^۳} \left[۱/۱۳۴۶ \frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}\right] \qquad \text{(ب)}$$

و شدت جریان جرمی در سرعت $۱/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ برابر است:

$$\dot{m}_a = \rho A v = (۰/۰۷۰۸۳)(۲۵)(۱/۰) = ۱/۷۷۰۸ \frac{\text{lb}_m}{\text{s}} = ۶۳۷۵ \frac{\text{lb}_m}{\text{h}} \left[۲۸۹۱/۷ \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right] \qquad \text{(پ)}$$

روش محاسبه چنین است:

۱ − نخست تمام T_mها را برابر ۴۰°F و $T_{m-۱}$ گرهٔ ۱ را به‌ازای تمام نمـوههای زمانی برابر ۱۰۰°F بگیرید.

۲ − مقادیر جدید T_m را یا از معادله (چ) یا (ح) حساب و زمان را اضافه کنید تا به یک نقطه توقف مطلوب برسید و یا دما به شرایط حالت پایدار برسد.

۳ − با استفاده از مقادیر محاسبه شده $T_m(\tau)$، $E(\tau)$ را از معادلهٔ (خ) ارزیابی کنید.

نتایج محاسبات در شکل نشان داده شده‌اند. به ازای $v = ۳/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$، در حدود $\tau = ۱/۵$ h به حالت پـایدار مـی‌رسیم، در حـالی‌که بـرای $v = ۱/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ در حـدود $\tau = ۵/۵$ h به این حالت می‌رسیم. توجه داشته باشید که مقدار E حالت پـایدار برای $v = ۱/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ کم‌تر از حالت $v = ۳/۰ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ است زیرا زمان آن بیش‌تر است و مقدار بیش‌تری از عایق «به بیرون نشت می‌کند».

این مثال نشان می‌دهد که چگونه مـی‌توان مسأله‌ای نسـبتاً مشکـل را بـا استفاده از فرمول بندی عددی به روشی ساده حل کرد.

مثال ۱۰−۱۷ تحلیل خواص متغیر کانال گرم‌کن

کانالی به طول ۶۰۰ ft و قطر ۱ ft به عنوان گرم‌کن انباری عمل می‌کند. هوای گرم به دمای ۸۰۰°F وارد کانال شده و ضریب گسیل سطح بیرونی کانال ۰/۶ است. دمای هوای کانال، دمای دیوار و شار گرمایی قسمت بیرونی را در طول کانال به ازای آهنگ جریان‌های ۰/۳، ۱/۰ و $۱/۵ \frac{\text{lb}_m}{\text{s}}$ تعیین کنید. تغییر خواص هوا را به حساب آورید. دمای اتاق برای جابه‌جایی و تابش ۷۰°F است.

حل :

در این مسأله باید از راه‌حل عددی استفاده کرد. بخش نمونه‌ای از کانال به طول Δx و محیط P را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم و مـوازنـه انـرژی را مـی‌نویسیم. از مقاومت هدایتی دیوار کانال صرف‌نظر می‌کنیم. موازنه انرژی داخل کانال چنین است:

$$\dot{m}_a c_p T_{m,a} = h_i P \Delta x (T_{m,a} - T_{m,w}) + \dot{m}_a c_p T_{m+۱,a} \qquad \text{(الف)}$$

که h_i ضریب انتقال گرمایی جابه‌جایی قسمت داخلی است که می‌توان آن را از فرمول زیر حساب کرد (جریان ناآرام است):

$$\text{Nu} = \frac{h_i d}{k} = ۰/۰۲۳ \text{Re}_d^{۰/۸} \text{Pr}^{۰/۴} \qquad \text{(ب)}$$

که خواص در دمای کپه‌ای هوا $(T_{m,a})$ ارزیابی شده‌اند. موازنه انرژی جریان گرما در دیوار چنین است:

$$q_{conv,i} = q_{conv,o} + q_{rad,o}$$

و یا، با استفاده از ضرایب جابه‌جایی و جملات تابش به ازای واحد سطح:

$$h_i(T_{m,a} - T_{m,w}) = h_c(T_{m,w} - T_\infty) + \sigma \varepsilon (T_{m,w}{}^۴ - T_\infty{}^۴) \qquad \text{(پ)}$$

که ضریب جابه‌جایی قسمت بیرون را می‌توان از رابطهٔ جابه‌جایی آزاد حساب کرد:

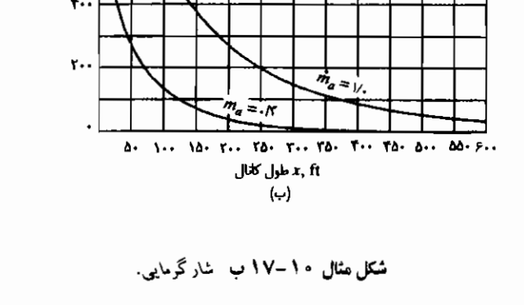
$$h_c = ۰/۲۷ \left(\frac{T_{m,w} - T_\infty}{d}\right)^{\frac{۱}{۴}} \frac{\text{Btu}}{\text{h.ft}^۲.^\circ\text{F}} \qquad \text{(ت)}$$

با جای‌گزینی این رابطه در معادلهٔ (پ) داریم:

$$h_i(T_{m,a} - T_{m,w}) = \frac{۰/۲۷}{d^{\frac{۱}{۴}}} (T_{m,w} - T_\infty)^{\frac{۵}{۴}} + \sigma \varepsilon (T_{m,w}{}^۴ - T_\infty{}^۴) \qquad \text{(ث)}$$

می‌توان $T_{m+۱,a}$ را از معادله (الف) به‌دست آورد:

$$T_{m+۱,a} = \left(۱ - \frac{h_i P \Delta x}{\dot{m}_a c_p}\right)_m T_{m,a} + \left(\frac{h_i P \Delta x}{\dot{m}_a c_p}\right)_m T_{m,w} \qquad \text{(ج)}$$



(الف)

شکل مثال ۱۰−۱۷ الف طرح واره.

(ب)

شکل مثال ۱۰−۱۷ ب شار گرمایی.

اکنون با داشتن این معادلات می‌توانیم الگوریتم محاسباتی را به صورت زیر فرموله کنیم. می‌دانید که تمام دماها به دلیل وجود جمله مربوط به تابش باید بر حسب کلوین باشد:

۱ – Δx را انتخاب کنید.

۲ – با شروع در $x = 0$، شرایط مدخل، مقدار h_i را از معادلهٔ (ب) با خواص ارزیابی شده در $T_{m,\,a}$ به‌دست آورید. (در مدخل $T_{m,\,a} = 8^{\circ}\text{F} = 1260^{\circ}R$)

۳ – معادلهٔ (ث) را حل و $T_{m,\,w}$ را به‌دست آورید (به طریق تکرار).

۴ – $T_{m+1,a}$ را از معادلهٔ (ج) به‌دست آورید.

۵ – عملیات بالا را برای نمومهای متوالی تکرار کنید تا به انتهای کانال ($x = 600$ ft) برسید.

۶ – اتلاف گرمادر هر نمو برابر است با:

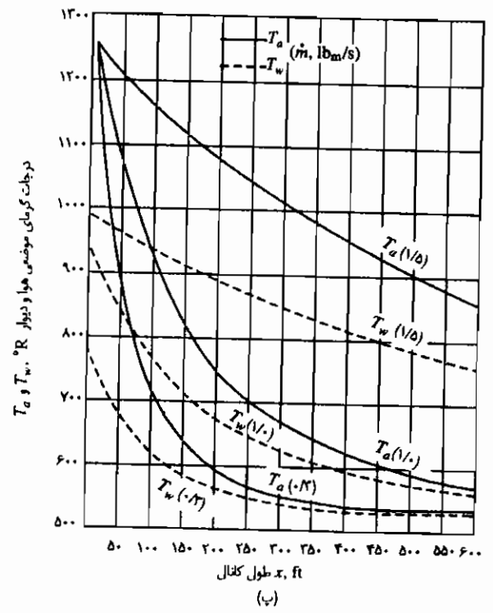
$$q = P\,\Delta x\,h_i\,(T_{m,\,a} - T_{m,\,w})$$

یا شار گرمایی برابر است با:

$$\frac{q}{A} = h_i\,(T_{m,\,a} - T_{m,\,w}) \qquad \text{(ج)}$$

۷ – می‌توان $T_{m,\,a}$، $T_{m,\,w}$ و $\left(\frac{q}{A}\right)_m$ را مثل شکل‌های فوق رسم کرد.

در این محاسبات $\Delta x = 50$ ft را انتخاب کرده‌ایم. توجه کنید که هوا در آهنگ جریان کم $\left(0/3\ \frac{\text{lb}_m}{\text{s}}\right)$ اساساً در نیمه طول کانال به دمای اتاق می‌رسد ودر نتیجه گرمایش اندکی از آن نقطه به بعد وجود دارد. وقتی آهنگ جریان $1/0\ \frac{\text{lb}_m}{\text{s}}$ است هنوز هم مقداری گرما در انتهای کانال وجود دارد، گرچه مقدار آن اندک است. به ازای آهنگ جریان $1/5\ \frac{\text{lb}_m}{\text{s}}$ در تمام طول کانال گرمایش خوبی وجود دارد.



شکل مثال ۱۰–۱۷ پ. نیم رخ‌های دمایی

۱۰–۹ ملاحظات مربوط به طراحی مبدل گرمایی

در صنایع فرآوری و قدرت یا فعالیت‌های وابسته، بسیاری از مبدل‌های گرمایی را به صورت اقلام تجاری آماده و خریداری می‌کنند و انتخاب بر اساس قیمت و مشخصات ارائه شده توسط سازندگان مختلف صورت می‌گیرد. در کارهای تخصصی‌تر، مثل صنایع فضاپیمایی و الکترونیک، غالباً طرحی مخصوص نیاز است. وقتی مبدل گرمایی قسمتی از ماشین یا وسیله مورد ساخت را تشکیل می‌دهد، می‌توان مبدل استانداردی خریداری کرد؛ یا چنان‌چه ملاحظات قیمت و کمیت‌های ساخت اجازه دهد، می‌توان برای این کاربرد مبدل گرمایی مخصوصی را طراحی کرد. چه مبدل گرمایی به صورت قلم تجاری آماده انتخاب شود یا مخصوصاً برای آن کاربرد طراحی شود، باید عوامل زیر را تقریباً همیشه در نظر داشت:

۱ – نیازهای انتقال گرما

۲ – قیمت

۳ – اندازه فیزیکی

۴ – مشخصات افت فشار

در انتخاب یا طرح هر مبدل گرمایی باید نیازهای انتقال گرما را رعایت کرد. طرز رعایت این نیازها به اهمیت نسبی داده شده به اقلام ۲ تا ۴ بستگی دارد. وقتی سیال را در مبدل گرمایی با سرعت‌های بالا به جریان درآورند، ممکن است ضریب انتقال گرمای کل افزایش یابد، ولی این سرعت بالاتر موجب افت فشار بیش‌تر در مبدل و در نتیجه هزینه پمپاژ بیش‌تر می‌شود. اگر مساحت مبدل افزایش یابد، نیازی نیست که ضریب انتقال گرمای کلی، و در نتیجه افت فشار، خیلی زیاد باشد؛ گرچه، از نظر اندازه فیزیکی ممکن است محدودیت‌هایی وجود داشته باشد که می‌توان آن را اصلاح کرد و اندازه فیزیکی بزرگ‌تر موجب قیمت بیش‌تر مبدل گرمایی می‌شود. قضاوت صحیح و رسیدگی به تمام این عوامل به یک طراحی درست منجر می‌شود اطلاعات جامع مرجع ۸ می‌تواند برای علاقه‌مندان خیلی مفید باشد.

سؤالات مرور فصل

۱ ضریب انتقال گرمای کلی را تعریف کنید.

۲ ضریب فولینگ چیست؟

۳ چرا آرایش سیال «آمیخته» یا «نیامیخته» بر عمل‌کرد مبدل گرمایی اثر می‌گذارد؟

۴ چه موقع روش LMTD در محاسبات مبدل گرمایی بیش‌ترین کاربرد را دارد؟

۵ ضریب تأثیر را تعریف کنید.

۶ روش NTU ضریب تأثیر چه مزیتی بر روش LMTD دارد؟

۷ معنی سیال «کمینه» چیست؟

۸ چرا مبدل جریان مخالف مؤثرتر از مبدل جریان موازی است؟

فهرست مثال‌های حل شده

۱۰–۱ ضریب انتقال گرمای کلی برای لوله در هوا

۱۰–۲ ضریب انتقال گرمای کلی برای لوله در بخار

۱۰–۳ اثر ضریب فولینگ

۱۰–۴ محاسبه اندازه مبدل گرمایی از روی دماهای معلوم

۱۰–۵ مبدل گرمایی پوسته و لوله

۱۰–۶ طراحی مبدل گرمایی پوسته و لوله

۱۰–۷ مبدل جریان متقاطع با یک سیال آمیخته

۱۰–۸ آثار آهنگ جریان‌های خارج از طرح در مبدل مثال ۱۰–۷

۱۰–۹ محاسبات خارج از طرح با استفاده از روش $\varepsilon - \text{NTU}$

۱۰–۱۰ محاسبه خارج از طرح مبدل مثال ۱۰–۴

۱۰–۱۱ مبدل جرَیان متقاطع با یک سیال نیامیخته

۱۰–۱۲ مقایسه انتخاب یک مبدل با دو مبدل

۱۰–۱۳ مبدل پوسته و لوله به‌عنوان گرم‌کن هوا

۱۰–۱۴ چگالنده آمونیاک

۱۰–۱۵ ضریب انتقال گرما در مبدل فشرده

۱۰–۱۶ پاسخ‌گذاری سیستم ذخیرهٔ انرژی گرمایی

۱۰–۱۷ تحلیل خواص متغیر کانال گرم‌کن

مسائل

۱۰–۱ لوله‌ای فولادی و بلند به قطر داخلی 5 cm و ضخامت دیوارهٔ 3/2 mm از اتاق بزرگی به دمای 30°C و فشار جو عبور می‌کند؛ $0/6\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ آب گرم به دمای 82°C از یک سر لوله وارد می‌شود. اگر طول لوله 15 m باشد، دمای آب خروجی را با در نظر گرفتن اتلاف گرمای جابه‌جایی و تابشی از لوله حساب کنید.

۱۰–۲ هوا به فشار 207 kPa و دمای 200°C با سرعت $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ وارد لوله‌ای به قطر داخلی 2/5 cm می‌شود. جنس لوله از مس به ضخامت 0/8 mm و طول آن 3 m است. هوای جو به فشار 1 atm و دمای 20°C عمود بر لوله باسرعت جریان آزاد $12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌وزد. دمای هوا در خروج از لوله را بیابید. نصف شدن مقدار هوای گرم چه اثری دارد؟

۱۰–۳ مسألهٔ ۱۰–۲ را برای وقتی که آب با سرعت $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و دمای 95°C وارد لوله شود، تکرار کنید. نصف شدن جریان آب چه اثری دارد؟

۱۰–۴ آب گرم به دمای 90°C داخل لوله‌ای فولادی به قطر داخلی 2/5 cm و ضخامت دیوارهٔ 0/8 mm با سرعت $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ جریان دارد. روغن موتور به دمای 20°C را با سرعت $7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ روی لوله و در عرض آن به جریان وامی‌دارند. ضریب انتقال گرمای کلی را برای این آرایش بیابید.

۱۰–۵ آب‌گرم در دمای 90°C در داخل لوله‌ای فولادی به قطر داخلی 2/5 cm و ضخامت 0/8 mm با سرعت $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ جریان دارد. این لوله در داخل مبدلی دو لوله قرار دارد. لولهٔ بیرونی به قطر داخلی 3/75 cm بوده، روغن موتور به دمای 20°C در فضای حلقوی با سرعت $7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ جریان دارد. ضریب انتقال گرمای کلی را برای این آرایش بیابید. طول لوله 6/0 متر است.

۱۰–۶ هوا به فشار 2 atm و دمای 200°C در داخل یک لوله نمرهٔ schedule 80 فولادی به قطر 1 in با $h = 65\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}$ جریان دارد. روی لوله و در عرض آن گاز گرم با $h = 180\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}$ به دمای 400°C جاریست. ضریب انتقال گرمای کل را بیابید.

۱۰–۷ برای گرم کردن $2/5\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ آب از 35°C تا 85°C از گازهای اگزوز گرم در یک مبدل گرمایی جریان متقاطع لوله‌ای پره‌دار استفاده می‌شود. گازها $\left[c_p = 1/09\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right]$ در 200°C وارد و در 93°C خارج می‌شوند. ضریب انتقال گرمای کل $180\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}$ است. مساحت مبدل گرمایی را با استفاده از (الف) روش LMTD و (ب) روش NTU – ضریب تأثیر، حساب کنید.

۱۰–۸ به فرض مبدلی به صورت دو لوله با جریان مخالف باشد، معادلهٔ (۱۰–۱۲) را به‌دست آورید.

۱۰–۹ معادلهٔ (۱۰–۲۷) را به‌دست آورید.

۱۰–۱۰ آب با آهنگ $2300\ \frac{\text{kg}}{\text{h}}$ و دمای 35°C به عنوان یک خنک‌کن در مبدلی گرمایی دو لوله به مساحت $1/4\ \text{m}^2$ استفاده می‌شود. برای خنک کردن روغن $\left[c_p = 2/1\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right]$ از دمای اولیهٔ 120°C از این آب استفاده می‌شود. به دلیل سایر مقتضیات نمی‌توان دمای خروجی آب را بیش از 99°C کرد. دمای خروجی روغن نباید کم‌تر از 60°C باشد. ضریب انتقال گرمای کلی $280\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}$ است. به فرض آهنگ جریان آب در $2300\ \frac{\text{kg}}{\text{h}}$ ثابت باشد، حداکثر آهنگ جریان روغنی را ارزیابی کنید که می‌شود خنک نمود.

۱۰–۱۱ یک مبدل پوسته و لولهٔ کوچک با یک‌پاس لوله $\left[U = 280\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}\right.$ و $\left.A = 4/64\ \text{m}^2\right]$ را برای گرم کردن آب فشار بالا به دمای اولیهٔ 20°C به وسیلهٔ هوای گرم به دمای اولیهٔ 260°C، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر دمای آب خروجی از 93°C تجاوز نکند و آهنگ جریان هوا $0/45\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ باشد آهنگ جریان آب را بیابید.

۱۰–۱۲ یک مبدل گرمایی دو لولهٔ جریان مخالف را برای گرم کردن $0/6\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ آب از 35 تا 90°C به وسیلهٔ روغنی با آهنگ $0/9\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ به کار می‌برند. گرمای ویژهٔ روغن $2/1\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}$ بوده، در دمای 175°C وارد مبدل گرمایی می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی برابر $425\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}$ است. مساحت مبدل گرمایی و ضریب تأثیر را بیابید.

۱۰–۱۳ مثال ۶–۹ را با استفاده از مفهوم LMTD دوباره حل کنید. دمای هوای ورودی را 37°C گرفته، مسأله را تکرار کنید.

۱۰-۱۴ یک مبدل گرمایی پوسته و لوله دارای دو پاس پوسته و چهار پاس لوله است. سیال داخل پوسته اتیلن گلیکول است که در دمای $140^\circ C$ وارد و در $80^\circ C$ با آهنگ $4500 \frac{kg}{h}$ خارج می‌شود. آب در لوله‌ها جریان دارد که در $35^\circ C$ وارد و در $85^\circ C$ خارج می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی برای این آرایش $850 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. آهنگ جریان آب مورد نیاز و سطح مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۱۵ آهنگ گلیکول در مبدل مسأله ۱۰-۱۴ را به نصف کاهش داده‌ایم در حالی‌که درجات گرمای ورودی هردو سیال تغییری نکرده‌اند. دمای خروجی آب در این شرایط جدید چه‌قدر است و آهنگ انتقال گرما چه‌قدر کاهش می‌یابد؟

۱۰-۱۶ در مبدل مسأله ۱۰-۷ آهنگ جریان آب به نصف تقلیل می‌یابد، در حالی که آهنگ جریان گاز و دماهای ورودی سیال ثابت نگه‌داشته‌می‌شود. در صد کاهش انتقال گرما را در نتیجهٔ این کاهش‌آهنگ بیابید، به فرض ضریب انتقال گرمای کلی تغییری نکند.

۱۰-۱۷ مسأله ۱۰-۷ را برای یک پوسته و لوله با دو پاس لوله تکرار کنید. گاز در پوسته جریان دارد.

۱۰-۱۸ مسأله ۱۰-۱۶ را با استفاده از مبدل پوسته و لوله مسأله ۱۰-۱۷ تکرار کنید.

۱۰-۱۹ می‌خواهیم $230 \frac{kg}{h}$ آب را از $35^\circ C$ تا $93^\circ C$ با روغن $\left[c_p = 2/1 \frac{kJ}{kg.^\circ C}\right]$ که دمای اولیهٔ آن $175^\circ C$ است، گرم کنیم. آهنگ جریان جرمی روغن نیز $230 \frac{kg}{h}$ است. دو مبدل گرمایی دو لوله موجودند:

مبدل ۱: $A = 0/47\ m^2$ ، $U = 570 \frac{W}{m^2.^\circ C}$

مبدل ۲: $A = 0/94\ m^2$ ، $U = 370 \frac{W}{m^2.^\circ C}$

کدام مبدل را باید به‌کار برد؟

۱۰-۲۰ چگالنده‌ای بخاری کوچک را برای چگالیدن $0/76 \frac{kg}{min}$ بخار در فشار $83\ kPa$ با آب خنک به دمای $10^\circ C$ طرح کرده‌اند. دمای آب خروجی نباید از $57^\circ C$ تجاوز کند. ضریب انتقال گرمای کلی $3400 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. سطح لازم برای یک مبدل گرمایی دو لوله را بیابید.

$T_{sat}=95/6^\circ C$ و $h_{fg}=2/27\times10^6 \frac{kJ}{kg}$

۱۰-۲۱ فرض کنید که دمای آب ورودی مبدل مسأله ۱۰-۲۰ را تا $30^\circ C$ بالا ببرند. آهنگ جریان را چند درصد باید بالا برد تا همان مقدار چگالش ایجاد شود.

۱۰-۲۲ برای گرم کردن آب از $20^\circ C$ تا $40^\circ C$ به وسیلهٔ خنک کردن روغن از $90^\circ C$ تا $55^\circ C$ از یک مبدل گرمایی دو لوله جریان مخالف استفاده شده است. مبدل مزبور را برای یک انتقال گرمای کل $340\ kW$ با یک ضریب انتقال گرمای کلی $29 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ طراحی کرده‌اند. مساحت سطح مبدل را حساب کنید.

۱۰-۲۳ گرم‌کن آب تغذیه دیگی از یک مبدل گرمایی پوسته و لوله تشکیل شده که بخار چگالنده در تک پاس پوسته با دمای $120^\circ C$ جریان دارد. آب در $30^\circ C$ وارد لوله‌ها شده، برای ایجاد مقدار U کلی $2000 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ چهار پاس را طی می‌کند. سطح مبدل را برای وقتی حساب کنید که آهنگ جریان جرمی آب $2/5 \frac{kg}{s}$ و دمای خروجی آب $100^\circ C$ باشد.

۱۰-۲۴ فرض کنید که مبدل مسأله ۱۰-۲۳ به مدتی طولانی استفاده شده، به طوری که ضریب فولینگ به $0/0002 \frac{m^2.^\circ C}{W}$ رسیده است. دمای آب خروجی در این شرایط چه‌قدر است؟

۱۰-۲۵ یک دستگاه بازیابنده گرمای هوا به هوا شامل مبدل گرمایی جریان متقاطع است که هر دو سیال نیامیخته‌اند و آهنگ جریان هوا در دو طرف $0/5 \frac{kg}{s}$ است. هوای گرم در $400^\circ C$ وارد می‌شود در حالی که هوای خنک در $20^\circ C$ وارد می‌گردد. دماهای خروجی را برای $U = 40 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و سطح مبدل کل $20\ m^2$ حساب کنید.

۱۰-۲۶ در تأسیسات بزرگ تهویه مطبوعی مقدار $1500 \frac{m^3}{min}$ هوا به فشار $1\ atm$ و دمای $10^\circ C$ در لوله پره‌دار مبدل گرمایی که آب داغ به دمای $80^\circ C$ وارد آن می‌شود، باید گرم شود. ضریب انتقال گرمای کلی $50 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. مساحت مورد نیاز مبدل گرمایی برای آنکه دمای خروجی هوا $35^\circ C$ و دمای خروجی آب $50^\circ C$ باشد را بیابید.

۱۰-۲۷ از یک مبدل گرمایی لوله پره‌دار جریان متقاطع برای گرم کردن هوا از $20^\circ C$ تا $45^\circ C$ از آب گرم استفاده می‌شود. آب در دمای $75^\circ C$ وارد مبدل گرمایی و در $45^\circ C$ از آن خارج می‌شود و آهنگ انتقال گرمای کل باید $100000 \frac{Btu}{h}$ باشد. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $50 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ باشد، مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۲۸ برای گرم کردن $55 \frac{kg}{min}$ آب که با دمای $30^\circ C$ وارد یک مبدل گرمایی پوسته و لوله با تک پاس پوسته و دو پاس لوله می‌شود از روغن داغ به دمای $120^\circ C$ و آهنگ $95 \frac{kg}{min}$ استفاده می‌شود. مساحت این مبدل $14\ m^2$ است. مقدار انتقال گرما و دمای خروجی هر دو سیال را در صورتی که ضریب انتقال گرمای کلی $250 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ باشد، بیابید.

۱۰-۲۹ برای گرم کردن آمونیاک مایع از $10^\circ C$ تا $30^\circ C$ با آب گرمی که در دمای $60^\circ C$ وارد مبدل گرمایی می‌شود از مبدلی دو لوله جریان مخالف استفاده می‌شود. آهنگ آب $5/0 \frac{kg}{s}$ و ضریب انتقال گرمای کلی $800 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. مساحت این مبدل گرمایی $30\ m^2$ است. آهنگ جریان آمونیاک را بیابید.

۱۰-۳۰ بخار چگالنده به دمای $100^\circ C$ در طرف پوسته تک پاس یک مبدل گرمایی پوسته و لوله جریان دارد. این مبدل دو پاس لوله دارد و هوا به دمای $150^\circ C$ وارد آنها می‌شود. کل مساحت مبدل $30\ m^2$ و ضریب انتقال گرمای کلی را می‌توان $60 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ گرفت. اگر ضریب تأثیر مبدل $85٪$ باشد، آهنگ انتقال گرمای کل چه‌قدر است؟

۱۰-۳۱ فرض کنید که هر دو آهنگ جریان در مسأله ۱۰-۲۵ به نصف کاهش داده شود. دمای خروجی در این مورد با فرض عدم تغییر U چه‌قدر

می‌شود؟ وقتی آهنگ جریان‌ها دو برابر شود، دماهای خروجی چه‌قدر می‌شود؟

۱۰-۳۲ در لوله‌های یک مبدل گرمایی لوله پره‌دار از آب‌گرم به دمای $90^\circ C$ استفاده می‌شود در عرض پره‌ها هوا جریان داشته، با فشار $1\ atm$ و دمای $30^\circ C$ و آهنگ $65 \frac{kg}{min}$ وارد می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $52 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ و دمای هوای خروجی باید $45^\circ C$ باشد. دمای آب خروجی را وقتی سطح کل $8/0\ m^2$ است، بیابید.

۱۰-۳۳ یک ریزپردازنده را باید برنامه‌ریزی کنند تا با تغییر آهنگ جریان آب، دمای هوای خروجی را به ازای تغییرات در دمای آب ورودی بدون تغییر نگه‌داشته و مبدل مسأله ۱۰-۳۲ را کنترل کند. درصد تغییرات لازم در آهنگ جریان آب را برای دمای آب ورودی ۶۰، ۷۰، ۸۰ و $100^\circ C$ بیابید. فرض کنید U ثابت می‌ماند.

۱۰-۳۴ آب گرم در $99^\circ C$ وارد یک مبدل گرمایی جریان مخالف می‌شود. از این آب برای گرم کردن یک جریان آب خنک از ۴ تا $32^\circ C$ استفاده می‌شود. آهنگ جریان آب سرد $1/3 \frac{kg}{s}$ است و آهنگ جریان آب گرم $2/6 \frac{kg}{s}$ می‌باشد. ضریب انتقال گرمای کلی $830 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. مساحت مبدل گرمایی چه‌قدر است؟ ضریب تأثیر مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۳۵ با استفاده از موازنهٔ انرژی، عبارتی برای ضریب تأثیر یک مبدل گرمایی بیابید که در آن از یک بخار چگالنده برای گرم کردن یک سیال سردتر استفاده می‌شود. به فرض سیال گرم (بخار چگالنده) در سراسر فرآیند در دمای ثابتی می‌ماند.

۱۰-۳۶ آب در $75^\circ C$ وارد مبدل گرمایی جریان مخالف شده و در $30^\circ C$ از آن خارج می‌شود. برای گرم کردن یک روغن از ۲۵ تا $48^\circ C$ از این مبدل استفاده می‌شود. ضریب تأثیر مبدل گرمایی چه‌قدر است؟

۱۰-۳۷ شکل‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳ را به صورت ε نسبت به NTU_{max} در محدودهٔ $0/1 < NTU_{max} < 100$ مجدداً رسم کنید و در صورت امکان از کامپیوتر استفاده کنید.

۱۰-۳۸ فرض کنید که روغن مسأله ۱۰-۲۲ به حد کافی کثیف است و باید از ضریب فولینگ $0/004$ استفاده کرد. در این شرایط مساحت سطح چه‌قدر است؟ اگر مبدل مسأله ۱۰-۲۲ را با این ضریب فولینگ و همان دمای سیال ورودی به کار برند، مقدار انتقال گرما چه‌قدر کاهش می‌یابد؟

۱۰-۳۹ یک مبدل پوسته و لوله با تک پاس پوسته و دو پاس لوله را به عنوان یک سیستم انتقال گرمای آب به آب که سیال گرم در پوسته جریان دارد به کار برده‌اند. آب گرم از $80^\circ C$ تا $60^\circ C$ خنک و سیال خنک از ۵ تا $60^\circ C$ گرم می‌شود. مساحت سطح را برای انتقال گرما $60\ kW$ و ضریب انتقال گرمای $1100 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ حساب کنید.

۱۰-۴۰ مقدار انتقال گرما در مبدل مسأله ۱۰-۳۹ چه‌قدر است اگر آهنگ جریان سیال گرم به نصف مقدار خود کاهش یابد ولی شرایط ورودی و ضریب انتقال گرما تغییر نکند؟

۱۰-۴۱ از یک مبدل گرمایی لوله پره‌دار جریان متقاطع برای گرم کردن مقدار مناسبی هوا از ۱۵ تا $25^\circ C$ از آب گرم استفاده می‌شود. آب به دمای $70^\circ C$ وارد مبدل گرمایی شده، در $40^\circ C$ از آن خارج می‌شود و آهنگ انتقال گرمای کل باید $29\ kW$ باشد. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $45 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ باشد، مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۴۲ آهنگ انتقال گرما برای مبدل مسأله ۱۰-۴۱ را وقتی آهنگ جریان آب به نصف مقدار طرح کاهش یابد، حساب کنید.

۱۰-۴۳ بازیابندهٔ یک توربین گازی یک مبدل گرمایی است که برای پیش‌گرم کردن هوای مورد نیاز اتاق احتراق از گازهای حاصل از سوخت استفاده می‌کند. در یک تحلیل استاندارد - هوای چرخه‌های توربین گاز، فرض می‌شود که جرم سوخت در مقایسه با جرم هوا کوچک است و در نتیجه آهنگ گاز گرم توربین اساساً مساوی با آهنگ جریان هوا به داخل اتاق احتراق است. با استفاده از این فرض و هم چنین فرض اینکه گرمای ویژهٔ گازهای گرم حاصل از سوخت مساوی گرمای ویژهٔ هوای ورودی است، عبارتی برای ضریب تأثیر یک بازیابنده در حالت جریان مخالف و موازی بیابید.

۱۰-۴۴ آب به دمای $90^\circ C$ وارد یک مبدل گرمایی دو لوله شده و از آن در $55^\circ C$ خارج می‌شود. از این آب برای گرم کردن مقدار معینی روغن از ۲۵ تا $50^\circ C$ استفاده می‌شود. ضریب تأثیر مبدل گرمایی را حساب کنید.

۱۰-۴۵ آهنگ جریان سیال در مبدل مسأله ۱۰-۱۴ و ۱۰-۱۵ را باید به دلیل نیازی که داشته‌اند به مقدار ۴۰٪ کاهش دهند و همان مقدار آب‌را باید از ۳۵ تا $85^\circ C$ گرم کنند. برای انجام این کار باید از یک پیش‌گرم‌کن بخاری پوسته و لوله استفاده شود که بخار چگالنده به دمای $150^\circ C$ در آن جریان داشته و ضریب انتقال گرمای کلی $2000 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. مساحت سطح و جریان بخار لازم برای این پیش‌گرم‌کن چه‌قدر است؟

۱۰-۴۶ در گرم‌کن روغن موتوری، اتیلن گلیکول به دمای $100^\circ C$ وارد یک کلاف لوله شامل ۵۰ لولهٔ مسی، ۵ ردیف ارتفاع و قطر خارجی $2/5\ cm$ و ضخامت دیوارهٔ $0/8\ mm$ می‌شود. طول لوله‌ها $70\ cm$ و $S_p = S_n = 3/75\ cm$ و در آرایش در یک خط قرار گرفته‌اند. روغن در $20^\circ C$ بسا سرعت $1 \frac{m}{s}$ وارد کلاف لوله می‌شود. گلیکول با سرعت $1/5 \frac{m}{s}$ وارد لوله‌ها می‌گردد. انتقال گرمای کل دمای روغن خروجی را حساب کنید. وقتی سرعت گلیکول ورودی $1/0 \frac{m}{s}$ باشد، مسأله را تکرار کنید.

۱۰-۴۷ گرم‌کن نیروگاهی شامل یک مبدل گرمایی جریان متقاطع است که برای گرم‌کردن، از هوای ورودی به فشار $1\ atm$ و دمای $300\ K$ به وسیلهٔ گازهای گرم حاصل از سوخت استفاده می‌شود. گازها در $375^\circ C$ با آهنگ جریان $5 \frac{kg}{s}$ وارد می‌شود. آهنگ جریان هوا $5/0 \frac{kg}{s}$ است و مبدل گرمایی دارای $A = 110 m^2$ و $U = 50 \frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. آهنگ انتقال گرما و دماهای خروجی برای دو مورد، هر دو سیال نیامیخته باشند و یک سیال آمیخته باشد، حساب کنید. به فرض خواص گازهای گرم مثل هواست.

۱۰-۴۸ برای گرم کردن $3\frac{kg}{s}$ آب از ۲۰ تا ۴۰°C به وسیلهٔ روغن داغ به دمای ۲۰۰°C، از یک مبدل گرمایی دو لوله جریان مخالف استفاده می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $275\frac{W}{m^2.°C}$ است. ضریب تأثیر و NTU را به‌ازای دمای روغن خروجی ۱۹۰، ۱۸۰، ۱۴۰ و ۸۰°C معین کنید.

۱۰-۴۹ برای چگالیدن بخار در دمای ۲۰۰°C در پوسته یک پاس، مبدل گرمایی از نوع پوسته و لوله را طرح کرده‌اند؛ $50\frac{kg}{s}$ آب از ۶۰ تا ۹۰°C گرم می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $4500\frac{W}{m^2.°C}$ است. در روی لوله ورودی بخار، کنترل‌کننده‌ای نصب شده است که با کنترل فشار، دما را تغییر می‌دهد و می‌خواهیم دمای آب خروجی را کنترل کنیم. ضریب تأثیر و دمای آب خروجی را وقتی دمای ورودی بخار ۱۸۰، ۱۶۰، ۱۴۰ و ۱۲۰°C باشد، بیابید. برای به‌دست آوردن رابطه‌ای جهت دمای آب خروجی به صورت تابعی از دمای ورودی بخار از عبارات تحلیلی استفاده کنید.

۱۰-۵۰ برای گرم کردن $0/5\frac{kg}{s}$ آب از ۳۰°C تا ۸۰°C از یک مبدل گرمایی پوسته و لولهٔ دارای یک پاس پوسته و دو پاس لوله استفاده می‌شود و در لوله‌ها آب جاری است. در پوسته بخار چگالنده به فشار ۱atm جریان دارد. مساحت مبدل گرمایی را در صورتی که ضریب انتقال گرمای کلی $900\frac{W}{m^2.°C}$ باشد، حساب کنید. به فرض در همین مبدل آب به دمای ۳۰°C وارد شده و $U = 900$ و آهنگ آب $1/3\frac{kg}{s}$ باشد. دمای آب خروجی در این شرایط را به‌دست آورید.

۱۰-۵۱ برای گرم کردن آب از ۲۰°C تا ۴۰°C با روغن داغی که در دمای ۱۸۰°C وارد مبدل و در ۱۴۰°C از آن خارج می‌شود، از یک مبدل گرمایی دو لوله جریان مخالف استفاده می‌شود. آهنگ آب $3/0\frac{kg}{s}$ و ضریب انتقال گرمای کلی $130\frac{W}{m^2.°C}$ است. گرمای ویژهٔ روغن را $2100\frac{J}{kg.°C}$ در نظر بگیرید. به فرض آهنگ آب نصف شود. آهنگ روغن جدید چه‌قدر باید باشد تا دمای خروجی آب 40°C شود؟ (آهنگ روغن نصف نشده است.)

۱۰-۵۲ در سیستم تهویه مطبوع خانه‌ای از یک مبدل گرمایی لوله پره‌دار جریان متقاطع برای سرد کردن $0/8\frac{kg}{s}$ هوا از 85°F تا 45°F استفاده می‌شود. آهنگ آب $0/75\frac{kg}{s}$ و با دمای 3°C وارد می‌شود. مساحت مبدل گرمایی را به فرض که ضریب انتقال گرمای کلی $55\frac{W}{m^2.°C}$ باشد، بیابید. اگر آهنگ آب نصف شود ولی آهنگ هوا ثابت بماند درصد کاهش مقدار انتقال گرما چه‌قدر است؟

۱۰-۵۳ در مسأله ۱۰-۵۲ همان مقدار هوا باید در یک مبدل لوله پره‌دار با تبخیر فریون در لوله‌ها خنک شود. می‌توان فرض کرد که دمای فریون در 35°F ثابت می‌ماند. و ضریب انتقال گرمای کلی $125\frac{W}{m^2.°C}$ است. مساحت مبدل مورد نیاز در این حالت را بیابید. مقدار کاهش انتقال گرما را در حالتی که آهنگ هوا یک سوم می‌شود نیز حساب کنید.

۱۰-۵۴ برای گرم کردن $4000\frac{kg}{h}$ روغن موتور از دمای 40°C به دمای 80°C با روغن در سمت لوله‌ها از یک مبدل گرمایی پوسته و لوله با یک پاس پوسته و چهار پاس لوله استفاده می‌شود. در سمت پوسته بخار چگالنده به فشار 1atm جاری است و ضریب انتقال گرمای کلی $1200\frac{W}{m^2.°C}$ می‌باشد. آهنگ جرمی بخار چگالیده را در صورتی که آهنگ جریان روغن نصف شود ولی دمای ورودی و مقدار U ثابت بماند، بیابید.

۱۰-۵۵ برای گرم کردن $5\frac{kg}{s}$ آب از 50°C با چگالیدن بخار به فشار 1atm از یک مبدل گرمایی به ضریب تأثیر ۸۰٪ استفاده می‌شود. مساحت مبدل را به ازای $U = 1200\frac{W}{m^2.°C}$ بیابید.

۱۰-۵۶ اگر آهنگ جریان آب در مسأله ۱۰-۵۵ نصف شود دمای خروجی آب و انتقال گرمای کلی را حساب کنید.

۱۰-۵۷ برای گرم کردن هوا از 45°F تا 115°F در یک مبدل گرمایی جریان متقاطع لوله پره‌دار از آب به دمای 180°F استفاده می‌شود. دمای خروجی آب 125°F است. ضریب تأثیر این مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۵۸ اگر آهنگ آب در مبدل گرمایی مسألهٔ ۱۰-۵۷ برابر $150\frac{kg}{min}$ و ضریب انتقال گرمای کلی $50\frac{W}{m^2.°C}$ باشد. مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۵۹ برای گرم کردن $10\frac{kg}{s}$ اتیلن گلیکول از ۲۰ تا 40°C در سمت پوسته از یک مبدل گرمایی پوسته و لوله با یک پاس پوسته و چهار پاس لوله استفاده می‌شود. $15\frac{kg}{s}$ آب به دمای 70°C وارد لوله‌ها می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $40\frac{W}{m^2.°C}$ است. مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۶۰ از همان مبدل گرمایی مسأله ۱۰-۵۹ باهمان شرایط دمایی ورودی استفاده می‌شود ولی آهنگ آب به $10\frac{kg}{s}$ کاهش می‌یابد. چون آهنگ جریان آب کاهش یافته است، ضریب انتقال گرما به $35\frac{W}{m^2.°C}$ کاهش می‌یابد. دمای گلیکول را بیابید.

۱۰-۶۱ برای انتقال گرما 800 MW انرژی از بخار چگالنده به فشار 1atm، یک چگالنده بزرگ باید طراحی شود. برای انجام این عمل، آب خنک‌کننده در دمای 25°C وارد چگالنده و در 30°C از آن خارج می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $2000\frac{W}{m^2.°C}$ است. مساحت مبدل گرمایی مورد نیاز را بیابید.

۱۰-۶۲ فرض کنید که آهنگ آب در مسأله ۱۰-۶۱ نصف شود. آهنگ چگالش آب را برحسب کیلوگرم بر ساعت در این شرایط و با شرطی که U تغییر نکند، حساب کنید.

۱۰-۶۳ برای گرم کردن اتیلن گلیکول در لوله‌ها از 20°C به 60°C از یک مبدل گرمایی پوسته و لوله با یک پاس پوسته و دو پاس لوله استفاده می‌شود. آهنگ گلیکول $1/2\frac{kg}{s}$ است. برای تأمین گرمایش، آب در دمای 90°C وارد پوسته شده، در 50°C از آن خارج می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $600\frac{W}{m^2.°C}$ است. مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۶۴ هوا به دمای 300 K وارد یک مبدل گرمایی فشرده مثل شکل ۱۰-۱۹ می‌شود. در داخل لوله‌ها بخار در دمای ثابت 100°C و $h = 9000\frac{W}{m^2.°C}$ چگالیده می‌شود. اگر هوا با سرعت $10\frac{m}{s}$ وارد شود مقدار بخار چگالیده شده را برای یک آرایش مربعی 30×30 cm و طول 60 cm حساب کنید.

۱۰-۶۵ مسأله ۱۰-۶۴ را برای همان آهنگ هوا در شکل‌بندی D شکل ۱۰-۲۰ تکرار کنید.

۱۰-۶۶ اگر آهنگ بخار مورد چگالش در مسأله ۱۰-۶۴ را بخواهیم نصف کنیم آرایش چه‌قدر باید کوچک شود، درصورتی که طول آن همان 60 cm باشد.

۱۰-۶۷ می‌خواهیم مبدل گرمایی دولوله‌ای را برای خنک کردن آب از ۸۰ تا 60°C با استفاده از اتیلن گلیکول طراحی کنیم که در 20°C وارد مبدل می‌شود. آهنگ جریان گلیکول $0/7\frac{kg}{s}$ و آهنگ جریان آب $0/5\frac{kg}{s}$ است. ضریب تأثیر مبدل گرمایی را حساب کنید. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $1000\frac{W}{m^2.°C}$ باشد، مساحت لازم را برای این مبدل گرمایی حساب کنید.

۱۰-۶۸ در یک مبدل گرمایی جریانِ متقاطع، از روغن $\left(c_p = 2/1\frac{kJ}{kg.°C}\right)$ در رشته لوله‌ای استفاده می‌شود که در دمای 100°C وارد آنها می‌شود. آهنگ جریان روغن $1/2\frac{kg}{s}$ است. آب در عرض لوله‌های پره‌دار جاری است و از ۲۰ تا 50°C با آهنگ جریان $0/6\frac{kg}{s}$ گرم می‌شود. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $250\frac{W}{m^2.°C}$ باشد، مساحت لازم برای این مبدل را بیابید.

۱۰-۶۹ مسأله ۱۰-۶۸ را با این فرض حل کنید که آب در لوله‌ها و روغن در عرض لوله‌ها جاری باشد.

۱۰-۷۰ از مبدل گرمایی پوسته و لوله‌ای با سه پاس پوسته و شش پاس لوله برای گرم کردن $2\frac{kg}{s}$ آب از ۱۰ تا 70°C در طرف پوسته استفاده می‌شود؛ از $3\frac{kg}{s}$ روغن داغ $\left(c_p = 2/1\frac{kJ}{kg.°C}\right)$ در 120°C داخل لوله‌ها استفاده می‌شود. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $300\frac{W}{m^2.°C}$ باشد، مساحت لازم برای این مبدل گرمایی را حساب کنید.

۱۰-۷۱ آهنگ جریان آب مبدل مسأله ۱۰-۷۰ را به $1/0\frac{kg}{s}$ کاهش می‌دهیم در حالی که دمای ورودی سیال و مقدار U در همان مقدار قبلی می‌ماند. دماهای سیال خروجی در این وضع جدید را حساب کنید.

۱۰-۷۲ مبدل گرمایی پوسته و لوله‌ای با دو پاس پوسته و چهار پاس لوله را برای چگالیدن فریون ۱۲ در پوسته در 37/8°C به کار می‌بریم. آب در 21/1°C وارد لوله‌ها و در 26/7°C از آنها خارج می‌شود. لازم است فریون با آهنگ $0/23\frac{kg}{s}$ با آنتالپی تبخیر $h_{fg} = 120\frac{kJ}{kg}$ چگالیده شود. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $700\frac{W}{m^2.°C}$ باشد، مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۷۳ درصد کاهشِ ماده چگالیدهٔ فریون در مبدل مسألهٔ ۱۰-۷۲ را به شرطی حساب کنید که جریان آب نصف شود اما دما و مقدار U تغییر نکند.

۱۰-۷۴ از یک مبدل پوسته و لوله با چهار پاس پوسته و هشت پاس لوله برای گرم کردن $3\frac{kg}{s}$ آب از ۱۰ تا 30°C در پوسته به کمک $3\frac{kg}{s}$ آب از 80 به 60°C در سمت لوله استفاده می‌شود. اگر $U = 1000\frac{W}{m^2.°C}$، مساحت مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۷۵ به ازای مساحت مبدل گرمایی پیدا شده در مسأله ۱۰-۷۴، درصد کاهش انتقال گرما را به شرطی حساب کنید که آهنگ جریان سیال سرد به نصف کاهش یافته اما دمای ورودی و مقدار U ثابت باشد.

۱۰-۷۶ نشان دهید که ضریب تأثیر شکل ۱۰-۱۷ را به ازای $C = 0/5$ و $1/0$ می‌توان از ضریب تأثیر خوانده شده از شکل ۱۰-۱۶ و معادله مربوط به n پاس لوله حساب کرد که در جدول ۱۰-۳ داده شده است. توجه کنید که

$$\text{NTU (یک پاس لوله)} = n \times \text{NTU (}n\text{ پاس پوسته)}$$

۱۰-۷۷ نشان دهید که ضریب تأثیر هر پاس پوسته در مبدل گرمایی n پوسته از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_p = \frac{\left[\frac{1 - \varepsilon C}{1 - \varepsilon}\right]^{\frac{1}{n}} - 1}{\left[\frac{1 - \varepsilon C}{1 - \varepsilon}\right]^{\frac{1}{n}} - C}$$

که ε ضریب تأثیر مبدل گرمایی چند پاس پوسته است.

۱۰-۷۸ از روغن داغ $\left(c_p = 2/1\frac{kJ}{kg.°C}\right)$ با آهنگ $0/7\frac{kg}{s}$ و دمای 100°C برای گرم کردن $3/5\frac{kg}{s}$ آب در 20°C در مبدل گرمایی جریان متقاطع با روغن داخل لوله‌ها و آب جاری در عرض لوله‌ها استفاده می‌شود. ضریب تأثیر مبدل گرمایی ۶۰٪ است. دماهای خروجی هر دو سیال و حاصل ضرب UA این مبدل را بیابید.

۱۰-۷۹ از یک مبدل گرمایی تک پوسته و دو پاس لوله‌ای برای چگالیدن بخار در 100°C (1atm) در طرف پوسته استفاده می‌شود. از آب در طرف لوله استفاده می‌شود که در 20°C با آهنگ جریان $1/0\frac{kg}{s}$ وارد مبدل می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $2500\frac{W}{m^2.°C}$ و مساحت مبدل $0/8\,m^2$ است. دمای خروجی آب را بیابید.

۱۰-۸۰ در مبدل گرمایی پوسته و لوله‌ای با چهار پاس و هشت پاس لوله، $3/0\frac{kg}{s}$ اتیلن گلیکول در پوسته برای گرم کردن $1/5\frac{kg}{s}$ آب از ۲۰ تا 50°C استفاده می‌شود. گلیکول در 80°C وارد می‌شود و ضریب انتقال گرمای کلی گرمای کلی $900\frac{W}{m^2.°C}$ است. مساحت مبدل گرمایی را حساب کنید.

۱۰-۸۱ پس از اندازه‌زنی مبدل گرمایی مسأله ۱۰-۸۰ یعنی پس از تعیین سطح آن، مبدل با جریان گلیکولی که فقط $1/5\frac{kg}{s}$ است کار می‌کند و سایر سنجه‌ها ثابت است. دمای خروجی آب در این شرایط چیست؟

۱۰-۸۲ از مبدل پوسته و لوله‌ای با سه پاس پوسته و شش پاس لوله برای گرم کردن روغن $\left(c_p = 2/1\frac{kJ}{kg.°C}\right)$ در سمت پوسته از 30 تا 60°C استفاده می‌شود. آب پرفشار در سمت لوله از ۱۱۰ تا 90°C خنک می‌شود. ضریب تأثیر هر پاس پوسته را حساب کنید.

۱۰-۸۳ اگر آهنگ جریان در مسألهٔ ۱۰-۸۲ برابر $۳\frac{kg}{s}$ و $U = ۲۳۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ باشد، مساحت مبدل گرمایی را حساب کنید. با استفاده از این مساحت، دماهای سیال خروجی را به شرطی حساب کنید که جریان آب تا $۲\frac{kg}{s}$ کاهش یابد و همهٔ عوامل دیگر تغییر نکند.

۱۰-۸۴ در یک مبدل گرمایی جریان متقاطع، آب با $h = ۳۰۰۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ در لوله‌ها و هوا با $h = ۱۹۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ در عرض لوله‌ها جاری است. اگر دیواره لوله از مس به ضخامت ۰/۸ mm و قطر بیرونی آن ۲۵ mm باشد، ضریب انتقال گرمای کلی را بر اساس مساحت لولهٔ داخلی حساب کنید.

۱۰-۸۵ در تمام لوله‌های مبدل مسأله ۱۰-۸۴ آب با آهنگ $۰/۵\frac{kg}{s}$ جاری است. به فرض که از همان ضریب انتقال گرمای کلی محاسبه شده در آن مسأله استفاده شود، ترکیبات مناسبی از طول لوله و دمای هوای ورودی برای گرم کردن آب از ۱۰°C تا ۲۰°C را تعیین کنید. فرض‌ها را بیان کنید.

۱۰-۸۶ در مبدل گرمایی پوسته و لوله‌ای از مایعی در پوسته استفاده می‌شود که از ۳۰°C تا ۵۵°C با گاز گرمی در لوله‌ها گرم می‌شود که از ۱۰۰°C تا ۶۰°C سرد می‌شود. ضریب تأثیر این مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۸۷ روغن سوخت سبکی را در سمت لوله مبدل گرمایی پوسته و لوله‌ای با دو پاس پوسته و چهار پاس لوله استفاده می‌کنیم. آب در سمت پوسته از ۱۰°C تا ۵۰°C گرم می‌شود در حالی که روغن از ۹۰°C تا ۶۰°C خنک می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی $۵۳\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ است. گرمای ویژه روغن $۲/۰\frac{kJ}{kg.^{\circ}C}$ است. با استفاده از هر دو روش LMTD و ضریب تأثیر، مساحت مبدل گرمایی برای انتقال انرژی ۵۰۰ kW را حساب کنید. آهنگ جریان آب در این انتقال گرما چه‌قدر است؟

۱۰-۸۸ برای مساحت مبدل گرمایی تعیین شده در مسأله ۱۰-۸۷، لازم است چند درصد جریان آب را کاهش دهیم تا آهنگ انتقال گرمای کل نصف شود در حالی که جریان روغن ثابت بماند؟

۱۰-۸۹ در مبدل گرمایی لوله پره‌ای از بخار چگالنده در ۱۰۰°C داخل لوله‌ها برای گرم‌کردن هوا از ۱۰°C تا ۵۰°C درضمن عبور از پره‌ها استفاده می‌شود. انتقال گرمای کل ۴۴ kW در مبدل لازم است و ضریب انتقال گرمای کلی را می‌توان $۲۵\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ گرفت. مساحت مبدل گرمایی چیست؟

۱۰-۹۰ فرض کنید مقدار U در مبدل مسألهٔ ۱۰-۸۹ با توان ۰/۸ با آهنگ جریان جرم هوا تغییر می‌کند. جریان جرم هوا را چند درصد باید کاهش داد تا آهنگ انتقال گرمای کل یک سوم کم شود؟

۱۰-۹۱ در چگالنده بخار نیروگاه بزرگی، بخار در ۳۸°C در سمت پوسته و لوله‌ای چگالیده می‌شود. آب به عنوان خنک‌کن در سمت لوله عمل می‌کند و در ۲۰°C وارد و در ۲۷°C خارج می‌شود. این مبدل دارای یک پاس پوسته و دو پاس لوله است. با استفاده از اطلاعات جدول ۱۰-۱، مساحت مبدل مورد نیاز برای آهنگ انتقال گرمای ۷۰۰ MW را ارزیابی کنید. چه‌آهنگ جریان آبی برای این آهنگ انتقال گرما لازم است؟ مقدار U به کار رفته در محاسبات را مشخص کنید.

۱۰-۹۲ اگر دمای آب خروجی مسأله ۱۰-۹۱ تا ۳۴°C بالا رود و همان انتقال گرما و مقدار U را داشته باشیم به چه مساحت چگالنده‌ای نیاز است؟

۱۰-۹۳ فرض کنید مبدل مسأله ۱۰-۹۱ را با همان مساحت و مقدار U استفاده کرده‌ایم ولی آهنگ جریان آب تغییر کرده و دمای خروجی ۳۴°C شده است. آهنگ چگالش بخار چند درصد کاهش می‌یابد؟

مسائل طراحی

۱۰-۹۴ برای تهیه آب خنک در بخش تهویه مطبوع یک ساختمان اداری باید از مقداری آب نمک یک سیستم تبرید بزرگ استفاده شود. دمای آب نمک ۱۵°C− است و باز سرمایش ۱۰۵ kW مورد نیاز است. آب سرد خروجی از هوا خنک‌کن‌ها در ۱۰°C وارد مبدل پوسته و لوله‌ای می‌شود و مبدل طوری طراحی شده که دمای آب خنک شدهٔ خروجی کم‌تر از ۵°C نیست. ضریب انتقال گرمای کلی این مبدل گرمایی $۸۵۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ است. اگر آب خنک شده در لوله‌ها جریان داشته و از دو پاس لوله استفاده شده باشد، سطح مبدل گرمایی مورد نیاز را به صورت تابعی از دمای خروجی آب نمک، رسم کنید.

۱۰-۹۵ روغن داغ موتور به دمای ۸۰°C و سرعت $۵\frac{m}{s}$ وارد لولهٔ فولادی نمره ۴۰ به قطر 1in می‌شود. لوله به طور افقی در آب ۲۰°C غرق است و گرما به طریق جابه‌جایی آزاد از آن تلف می‌شود. طول لوله مورد نیاز برای کاهش دمای روغن به ۶۰°C را بیابید. با انجام محاسبه‌ای اثر خواص متغیر را بر نتایج حاصل نشان دهید.

۱۰-۹۶ چگالنده دستگاه تهویه اتومبیلی را طوری طراحی کرده‌اند که $۶۰۰۰۰\frac{Btu}{h}$ گرما را از فریون ۱۲ بگیرد. اتومبیل با سرعت $۴۰\frac{mi}{h}$ حرکت می‌کند و دمای محیط ۹۵°F است. دمای فریون ۱۲ در این شرایط ۱۵۰°F بوده، می‌توان فرض کرد که افزایش دمای هوا در این مبدل ۱۰°F باشد. ضریب انتقال گرمای کلی برای مبدل گرمایی لوله پره‌دار در این شرایط $۳۵\frac{Btu}{h.ft^{۲}.^{\circ}F}$ است. چنان‌چه ضریب انتقال گرمای کلی با توان ۰/۷ سرعت و جریان جرمی هوا مستقیماً با سرعت تغییر کند، درصد کاهش عمل‌کرد چگالنده را به صورت تابعی از سرعت بین ۱۰ و $۴۰\frac{mi}{h}$ رسم کنید. دمای فریون در ۱۵۰°F را ثابت فرض کنید.

۱۰-۹۷ یک مبدل گرمایی پوسته و لوله را برای گرم کردن $۷/۵\frac{kg}{s}$ آب از ۸۵ تا ۹۹°C طراحی کرده‌اند. فرآیند گرمایش توسط بخار چگالنده به فشار ۳۴۵ kPa انجام می‌شود. از یک پاس پوسته و دو پاس لوله، هر کدام شامل سی لوله به قطر خارجی 2/5 cm، استفاده می‌شود. به فرض مقدار U برابر $۲۸۰۰\frac{W}{m^{۲}}$ باشد طول لوله‌های مورد نیاز در مبدل گرمایی را بیابید.

۱۰-۹۸ فرض کنید که مبدل گرمایی مسألهٔ ۱۰-۹۷ برای مدتی طولانی کار کرده، باید از ضریب‌های فولینگ جدول ۱۰-۲ استفاده کنیم. دمای آب خروجی را برای این شرایط با فرض آنکه آهنگ جریان کل فرقی نکرده باشد، حساب کنید.

۱۰-۹۹ جنس یک مبدل گرمایی دو لوله از مس بوده، به صورت جریان مخالف عمل می‌کند. این مبدل برای گرم کردن $۰/۷۶\frac{kg}{s}$ آب از ۱۰°C به ۷۹/۴°C طراحی شده است. آب در لولهٔ داخلی جریان دارد. گرمایش از طریق چگالش بخار در لولهٔ خارجی در دمای ۲۵۰°F صورت می‌گیرد.

ضریب انتقال گرمای سمت آب $۱۴۲۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ است. مقدار مناسبی برای ضریب سمت بخار انتخاب و سپس مساحت مبدل گرمایی را حساب کنید. چنان‌چه آهنگ آب در این مبدل به مقدار ۶۰ درصد کاهش یابد دمای خروجی آب چه‌قدر می‌شود؟

۱۰-۱۰۰ چنان‌چه ضریب فولینگ برای آب در مسأله ۱۰-۳۰ برابر $۰/۰۰۰۲\frac{m^{۲}.^{\circ}C}{W}$ و برای هوا $۰/۰۰۰۴\frac{m^{۲}.^{\circ}C}{W}$ باشد، درصد افزایش مساحت چه‌قدر باشد تا این ضرایب برای عمل‌کرد مبدل در آینده به حساب آورده شوند.

۱۰-۱۰۱ از بخار اشباع به فشار $۱۰۰\frac{lb}{in^{۲}}abs$ برای گرم کردن دی اکسید کربن در یک مبدل گرمایی جریان متقاطع استفاده می‌شود که دارای چهارصد لولهٔ برنجی به قطر خارجی $\frac{۱}{۴}in$ در یک آرایش مربعی در یک خط است. فاصلهٔ بین مراکز لوله‌ها در امتداد جریان موازی و قائم $\frac{۳}{۸}in$ است. دی اکسید کربن در عرض ردیف لوله‌ها جریان دارد در حالی که بخار در داخل لوله‌ها چگالیده می‌شود. مقدار $۱\frac{lbm}{s}$ دی اکسید کربن به فشار $۱۵\frac{lb}{in^{۲}}abs$ و دمای ۷۰°F باید تا ۲۰۰°F گرما داده می‌شود. طول لوله‌ها را در این گرمایش محاسبه کنید. به فرض ضریب انتقال گرمای طرف بخار $۱۰۰۰\frac{Btu}{h.ft^{۲}.^{\circ}F}$ است و از مقاومت گرمایی دیواره لوله صرف‌نظر کنید.

۱۰-۱۰۲ مسأله ۱۰-۱۰۱ را وقتی $CO_۲$ در داخل لوله‌ها جریان دارد و بخار روی لوله‌ها چگالیده می‌شود، تکرار کنید. این دو طرح را بر مبنای افت فشار $CO_۲$ در مبدل، مقایسه کنید.

۱۰-۱۰۳ در حال حاضر از یک مبدل گرمایی دو لولهٔ جریان مخالف برای گرم کردن $۲/۵\frac{kg}{s}$ آب از ۲۵ تا ۶۵°C به‌وسیلهٔ خنک کردن یک روغن $\left[c_p = ۲/۱\frac{kJ}{Kg.^{\circ}C}\right]$ از ۱۳۸ تا ۹۳°C استفاده می‌شود. می‌خواهند $۰/۶۲\frac{kg}{s}$ آب به دمای ۵۰°C را «بیرون ببرند» و برای این کار به جای یک مبدل از دو مبدل که امکان چنین کاری را می‌دهد استفاده خواهد شد. ضریب انتقال گرمای کلی برای یک مبدل $۴۵۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ است و می‌توان همین مقدار را برای هر کدام از دو مبدل کوچک‌تر به کار برد. در آرایش دو مبدلی نیز همان مقدار روغن به کار می‌رود، با این تفاوت که جریان روغن بین دو مبدل تقسیم می‌شود. مساحت هر یک از دو مبدل کوچک‌تر و آهنگ روغن در هر یک را معین کنید. به فرض آب در دو مبدل به طور سری جریان دارد و از بین آنها به بیرون برده می‌شود. فرض کنید که مبدل‌های کوچک‌تر مساحت‌های مساوی دارند.

۱۰-۱۰۴ مسأله ۱۰-۱۰۳ را با فرض آنکه به جای روغن داغ از بخار چگالنده به دمای ۱۳۸°C استفاده شده، اینکه مبدل‌ها از نوع پوسته و لوله بوده، و آب در لوله‌ها در دو پاس جریان دارد، تکرار کنید. ضریب انتقال گرمای کلی را می‌توان برای این کاربرد $۱۷۰۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ درنظر گرفت.

۱۰-۱۰۵ برای گرم کردن $۲/۵\frac{kg}{s}$ آب از ۲۵ تا ۷۰°C از یک مبدل گرمایی پوسته و لوله با چهار پاس لوله استفاده می‌شود. برای این فرآیند گرمایش می‌توان از آب گرم ۹۳°C با آهنگ جریان $۵\frac{kg}{s}$ استفاده کرد. جریان خنک‌تر را در لوله‌های مبدل به کار می‌برند. ضریب انتقال گرمای کلی $۸۰۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ است. به فرض آهنگ جریان سیال گرم و انتقال گرمای کلی ثابت بماند، در صد کاهش انتقال گرما را به صورت تابعی از آهنگ جریان جرمی سیال خنک‌تر رسم کنید.

۱۰-۱۰۶ دو مبدل گرمایی دو لولهٔ مشابه را طوری ساخته‌اند که لولهٔ استاندارد نمرهٔ ۴۰ به قطر 2 in در داخل لولهٔ استاندارد به قطر 3 in قرار دارد. طول مبدل‌ها 10 Ft است. باید $۴۰\frac{gal}{min}$ آب به دمای اولیهٔ ۸۰°F را به وسیلهٔ گذراندن آن در لوله‌های داخلی مبدل‌ها در یک آرایش سری گرم کردن و برای انجام این گرمایش $۳۰\frac{gal}{min}$ آب به دمای ۱۲۰°F و $۳۰\frac{gal}{min}$ آب به دمای ۲۰۰°F در دسترس‌اند. می‌توان جریان‌های آب گرم را قبل و بعد از ورود به مبدل‌های گرمایی به‌نحوی مطلوب مخلوط کرد. برای آنکه عمل‌کرد بهینه (انتقال گرمای بیشینه) داشته باشیم آهنگ جریان و انتقال گرمای کل را در این شرایط معین کنید.

۱۰-۱۰۷ برای گرم کردن روغن موتور از ۳۰ به ۸۰°C از گازهای دودکش دما بالا به دمای ۴۵۰°C $\left[c_p = ۱/۲\frac{kJ}{kg.^{\circ}C}\right]$ در یک مبدل گرمایی جریان متقاطع استفاده می‌شود. با استفاده از اطلاعات داده شده در این فصل، طرحی تقریبی برای مبدل گرمایی به ازای آهنگ روغن $۰/۶\frac{kg}{s}$ به‌دست آورید.

۱۰-۱۰۸ در داخل لوله‌های مبدل مثال ۱۰-۱۵ از بخار چگالنده به دمای ۱۰۰°C و $h = ۵۰۰۰\frac{W}{m^{۲}.^{\circ}C}$ استفاده شده است. اگر مبدل گرمایی دارای سطح پیشانی $۰/۵\,m^{۲}$ و عمق 40 cm در جهت جریان هوا باشد، آهنگ انتقال گرما و دمای هوای خروجی را بیابید. مفروضات را بیان کنید.

۱۰-۱۰۹ یک چگالندهٔ آمونیاک با آرایش ۵ × ۵ دارای لوله‌های افقی به قطر خارجی 2/5 cm و ضخامت دیوارهٔ 1/0 mm است. آب به دمای ۲۰°C و سرعت $۵\frac{m}{s}$ وارد لوله‌ها شده، در ۴۰°C خارج می‌شود. دمای چگالش آمونیاک ۶۰°C است. طول لوله‌ها را بیابید. چه‌قدر آمونیاک چگالیده می‌شود؟ با مراجعه به جداول ترمودینامیکی خواص آمونیاک مورد لزوم را به‌دست آورید.

۱۰-۱۱۰ مسألهٔ ۱۰-۱۰۹ را برای آرایش ۱۰ × ۱۰ لوله‌ها دوباره حل کنید. اگر طول لوله‌ها نصف شود مقدار ماده چگالیده به ازای همان دمای ورودی آب، چه‌قدر کاهش می‌یابد؟ (دمای خروجی آب تغییر کرده است.)

۱۰-۱۱۱ برای سرد کردن آب از ۲۰۰°F به ۱۶۰°F از یک مبدل گرمایی فشرده مطابق شکل ۱۰-۱۹ استفاده می‌شود. جریان هوا به فشار 1 atm و دمای ۷۰°F با سرعت $۵۰\frac{ft}{s}$ وارد این مبدل می‌شود. انتقال گرمای کل $۲۴۰۰۰۰\frac{Btu}{h}$ است. چند طرح متفاوت را انتخاب کرده، آنها را از نظر اندازه (مساحت و / یا حجم) و افت فشار مقایسه کنید.

۱۰-۱۱۲ برای گرفتن ۳۰ kW گرما از هوایی به دمای ۷۵°F در یک کاربرد معین تهویه مطبوع باید از مبدل گرمایی لوله پره‌دار استفاده شود. دو طرح باید بررسی شود: (۱) استفاده از آب خنک‌کننده در لوله‌ها با دمای ورود ۴۵°F و (۲) استفاده از فریون تبخیر شونده در ۴۵°F در لوله‌ها. در هر دومورد، هوا در عرض پره‌ها جاری است و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی هوا باید عامل کنترل‌کننده در ضریب انتقال گرمای کلی باشد. فرض کنیدکه ضریب انتقال گرمای کلی وقتی دمای هوای خروجی هوا ۵۵°C است برابر $55\ \frac{W}{m^{2}\cdot°C}$ است و با توان ۰/۸ جریان جرمی هوا تغییر می‌کند. اندازهٔ مبدل گرمایی را برای شرایط داده شده و (۱) دمای آب خروجی ۵۳°F و (۲) دمای فریون ثابت ۴۵°F، تعیین کنید. سپس رفتار سیستم را در شرایط بار جزئی‌که (الف) بار سرمایی نصف شود ولی جریان جرمی هوا و آب و دماهای ورودی هوا و آب تغییر نکند؛ (ب) بار سرمایی نصف شود ولی دمای هوای خروجی و آهنگ جریان آب در مقدار طراحی باقی بماند، (پ) بار سرمایی‌نصف شود و دمای هوای خروجی در ۵۵°F باقی بماند و آهنگ جریان آب به اندازه ۲۵٪کم شود؛ و (ت) مثل حالت (الف) و (ب) برای دمای تبخیر فریون که در مقدار ثابت ۴۵°F باقی می‌ماند.

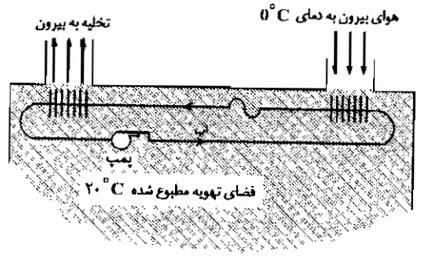
۱۰-۱۱۳ در کاربردهای تهویه مطبوع، گاهی کنترل شرایط محیطی داخل با تغییر آهنگ جریان هوا در عرض کویل‌های سرمایی انجام می‌شود، مثل آنچه در مسأله ۱۰-۱۱۲ انجام شد. فرض کنید می‌خواهیم در خروج از مبدل گرمایی تحت شرایط بار متغیر، دمای هوای ثابتی داشته باشیم . سیستم مبدل گرمایی مسأله ۱۰-۱۱۲ را بار دیگر با محاسبه چند مقدار آهنگ جریان جرم هوا به صورت تابعی از درصد شرایط بار کامل و با فرض شرایط زیر بررسی کنید (الف)دمای آب خروجی ثابت ۴۵°F و آهنگ جریان آب ثابت و (ب)دمای تبخیر فریون ثابت ۴۵°F باشد. فرض کنید می‌خواهیم دستگاه کنترلی طراحی کنیم که به طور خودکار آهنگ جریان هوا را بر اساس نیاز بار سرمایی تغییر دهد. با فرض آنکه تغییر جریان جرمی هوا با بار،یک چند جمله‌ای درجه دو باشد (یعنی $\dot{m} = A + Bq + Cq^{2}$)، مقادیر ثابت‌های معادله را برای سازگاری با نتایج محاسبات خود تعیین کنید.

۱۰-۱۱۴ دمای سطحی یک لولهٔ فولادی به قطر ۲/۵ cm با چگالش بخار در داخل آن در ۱۰۰°C است. پره‌های فولادی دایروی $\left(k = 43\ \frac{W}{m.°C}\right)$ را در بیرون لوله قرار می‌دهند تاگرما را با جابه‌جایی به اتاقی به دمای ۲۰°C با ضریب جابه‌جایی $8/0\ \frac{W}{m^{2}\cdot°C}$ برای لولهٔ بدون پره و سطح پره انتشار دهد. پره‌ها و سطوح لوله سیاه رنگ هستند به طوری که تقریباً به صورت سطوح سیاه تابش می‌کنند. (ترکیب لوله - پره به‌صورت استوانه‌ای به قطری برابر قطر بیرونی پره‌ها تابش می‌کند.) چند حالت برای قطر بیرونی پره، ضخامت پره، و فاصله پره‌ها برای محاسبهٔ گرمای ازدست‌رفته به اتاق به ازای متر طول لوله درنظر بگیرید. نتایج را در جای مناسب بیان کنید. hرا در تمام سطوح انتقال گرما یکنواخت فرض کنید.

۱۰-۱۱۵ هوا در همان آرایش لولهٔ پره‌دار مسأله ۱۰-۱۱۴ در عرض سطوح ایجاد ضریب جابه‌جایی $h = 20\ \frac{W}{m^{2}\cdot°C}$ می‌کند. از همان تحلیل مورد جابه‌جایی آزاد استفاده کرده، نتایج مناسب را بیان کنید.

فرض کنید h در تمام سطوح انتقال گرما یکنواخت است.

۱۰-۱۱۶ سیستم فرعی run - around را در کاربردهای بقای انرژی به عنوان وسیله بازیابی گرما مطابق شکل مورد استفاده قرار می‌دهند. در آرایش شکل، هوای گرم قسمت داخل ساختمان را برای انتقال ۶۰ kW گرما به مبدل گرمای لوله پره‌دار با آب در لوله‌ها به‌کارمی‌برند. سپس این آب به محلی ۲۰ متر دورتر پمپ‌می‌شود که از انرژی آن برای پیش‌گرم کردن هوای خروجی در ورود به فضای اشغال شده استفاده می‌شود. هوای بیرونی در ۰°C وارد می‌شود و دمای فضای تهویه شده ۲۰°C است و جریان هوای بیرونی حدود $86\ \frac{m^{3}}{min}$ است که توسط فن‌های مناسبی تأمین می‌شود. فرض می‌شود که لوله‌های آبی که دو مبدل گرمایی لوله پره‌دار را به هم وصل می‌کنند،کاملاً عایق هستند. با استفاده از مقادیر تقریبی برای U از جدول ۱۰-۱ یا سایر منابع، بعضی از اندازه‌های مناسب مبدل‌های گرمایی را تعیین کنید که در انجام اهداف انتقال گرما در این مسأله کمک می‌کنند. در این طراحی مقادیر قابل قبولی برای افزایش و افت دما در جریان آب فرض کرده، آهنگ‌های جریان آب مورد نیاز هر طرح انتخابی را ارزیابی کنید. در مورد تحلیل خود اظهار نظر کنید و توصیه‌هایی را ارائه دهید.



شکل م ۱۰-۱۱۶.

۱۰-۱۱۷ در مبدل گرمایی پوسته‌لوله‌ای با یک پاس پوسته و دو پاس لوله از بخار چگالشی در ۱ atm در سمت پوسته برای گرم کردن $10\ \frac{kg}{s}$ روغن موتور از ۵۰ تا ۶۰°C در لوله‌ها استفاده می‌شود. بخار به صورت اشباع وارد و به صورت مایع اشباع با $h_{ag} = 2/26\ \frac{MJ}{kg}$ خارج می‌شود. مایع چگالیده گرم خروجی از مبدل را بعداً برای گرم‌کردن آب تا ۶۰°C در مبدل پوسته‌لوله‌ای دیگری استفاده می‌کنند که مایع چگالیده طرف پوسته را اشغال می‌کند و آب خنک‌کن در لوله‌ها جاری است. آب خنک‌کن در ۲۰°C وارد می‌شود. با استفاده از مقادیر تقریبی U از جدول ۱۰-۱، یا محاسبات خودتان، اندازه چگالنده بخار را تعیین و اندازه‌های مبدل گرمایی را پیشنهاد کنید که به عنوان گرم‌کن آب

عمل می‌کند. به عنوان راه‌حلی دیگر، یک مبدل گرمایی را پیشنهاد کنید که در آن از گلوگیری جریان آب استفاده می‌شود. در مورد آرایش‌های پیشنهادی اظهار نظر کنید.

۱۰-۱۱۸ یک لولهٔ گرمایی (بخش ۹-۷) به عنوان وسیله بازیافت گرما عمل می‌کند و لوله‌های پره‌داری به هر دو سر آن متصل است. از این آرایش باید برای بازیافت گرما از دودکش خشک کن لباس تجاری برای پیش‌گرم کردن هوای ورودی در ۱۰°C استفاده کرد. هوا در ۹۵°C با آهنگ جریان حجمی $34\ \frac{m^{3}}{min}$ خارج می‌شود. لوله‌های گرمایی چند لوله را می‌توان با پره برای انجام هدف انتقال گرما به کار برد. با استفاده از اطلاعات جدول ۱۰-۱، محاسبات خودتان، یا سایر منابع، اندازه‌های مبدل‌های لوله‌ای پره‌دار در هر دو سر لوله(های) گرمایی را ارزیابی کنید. فرض‌کنید هر دو مبدل هم‌اندازه‌اند و سطح لولهٔ گرمایی دمای ثابت دارد. (*راهنمایی*: آرایش ترکیبی خیلی شبیه یک مبدل جریان متقاطع با ظرفیت‌های برابر عمل می‌کند.) مقادیر مناسبی برای دماهای خروجی گازهای گرم انتخاب و صرفه‌جویی در هزینه انرژی را در صورتی تعیین کنید که این خشک‌کن برقی به قیمت $\frac{\$0/085}{kWh}$ مصرف کند. همین محاسبه را برای خشک‌کن با مصرف گاز طبیعی و با قیمت انرژی $\frac{\$9/00}{GJ}$ تکرار کنید. در مورد تحلیل خود اظهارنظر کرده، توصیه‌هایی ارائه کنید.

۱۰-۱۱۹ شکل بندی رادیاتور خنک‌کن اتومبیل یا یک نیروگاه دیزلی مثل شکل ۱۰-۱۸ الف است و می‌توان آن را به صورت یک مبدل جریان متقاطع با دو سیال نیامیخته در نظر گرفت. آب خنک‌کن در لوله‌های با مقطع بیضی و هوای خنک‌کن در پره‌ها جاری است. مشخصات انتقال گرمایی این مبدل مثل مبدل شکل ۱۰-۱۹ است. مقدار انرژی‌ای که در دستگاه قدرت موتور دیزلی باید در رادیاتور انتشار یابد ۱/۱۲ MW است و آب خنک‌کن باید در ۹۸°C از رادیاتور خارج شود. هوا در ۲۵°C با سرعت $15\ \frac{m}{s}$ وارد مبدل می‌شود و سرعت توسط فن مناسبی ثابت نگه داشته می‌شود. دماهای مناسب آب خنک‌کن را انتخاب و مساحت پیشانی و حجم مبدل گرمایی برای هردما را تعیین کنید. یک شکل‌بندی را به عنوان ارزش طراحی انتخاب کنید.

۱۰-۱۲۰ تبرید در تأسیسات سردخانه‌ای بزرگی توسط سیستمی آمونیاکی تأمین می‌شود. چگالنده آمونیاکی در ۳۰°C به صورت یک مبدل گرمایی پوسته‌ولوله‌ای با یک پاس پوسته برای آمونیاک چگالنده و دو پاس لوله برای خنک‌کن آبی کار می‌کند. کل انرژی‌ای که باید از آمونیاک گرفته شود ۴۵۷ kW است. مقدار h_{fg} آمونیاک در ۳۰°C برابر $1145\ \frac{kJ}{kg}$ است. آب خنک‌کن به دمای ۱۶°C در اختیار چگالنده است. با استفاده از مقادیر تقریبی برای U از جدول ۱۰-۱ یا سایر منابع و فرضی مناسب برای دمای آب خروجی، مساحت لازم مبدل گرمایی را تعیین کنید. سپس طرحی را پیشنهاد کنید که اندازه، طول و تعداد لوله‌های مورد نیاز مبدل آن مشخص باشد. در مورد طرح اظهار نظرکنید.

۱۰-۱۲۱ پس از طراحی مبدل مسألهٔ ۱۰-۱۲۰، عملیاتی با بار جزئی نیاز است که آهنگ چگالش آمونیاک را ۲۰٪کاهش می‌دهد ضمن آن‌که دمای آب ورودی ثابت می‌ماند. این کاهش باگلوگیری جریان آب تا آهنگ جریان پایین‌تر صورت می‌گیرد. اگر ضریب انتقال‌گرمای کلی با توان ۰/۸ آهنگ جریان آب تغییر کند، آهنگ جدید جریان چه‌قدر باشد تا این ۲۰٪کاهش چگالش عملی شود؟

۱۰-۱۲۲ در یک تأسیسات پخت نان، نان‌های پخته شده در دمایی حدود ۱۱۰°C از اجاق بیرون آمده، قبل از بسته‌بندی روی تسمه نقاله‌ای برای خنک‌شدن در هوای اتاق قرار می‌گیرند. فرآیند خنک شده باترکیبی از جابه‌جایی آزاد و تابش یا جابه‌جایی اجباری و تابش صورت می‌گیرد. فرآیند جابه‌جایی آزاد بیش‌تر طول می‌کشد و در نتیجه نان‌ها زمان بیش‌تری روی تسمه نقاله می‌مانند. دمای نان خنک شدهٔ نهایی باید ۳۰°C باشد. از نظر طرح اجرایی، طول تسمه نقاله باید ثابت باشد اما سرعت حرکت آن را می‌توان تنظیم کرد تا با زمان خنک‌شدن جور درآید. با استفاده از روابط مناسب برای جابه‌جایی آزاد، تابش، و جابه‌جایی اجباری، زمان‌های انتقال مناسب برای خنک‌شدن با جابه‌جایی آزاد و برای دو سرعت خنک‌شدن با جابه‌جایی اجباری ارائه کنید. وزن هر نان را ۰/۴۵ kg بگیرید. چه سرعت‌هایی برای تسمه نقاله پیشنهاد می‌کنید؟

۱۰-۱۲۳ گازهای احتراقی داغ، از خشک‌کن ذرت در ۴۳۵°C خارج می‌شود و وارد مبدل گرمایی جریان متقاطعی می‌شود که برای پیش‌گرم کردن هوای ورودی به مشعل استفاده می‌شود. این دستگاه را *ری‌کاپریتور recuperator* می‌نامند و انرژی ذخیره‌شده با انرژی گرفته‌شده توسط هوا برابر است. فرض می‌شود هوا در ۳۰°C وارد مبدل شود و می‌توان فرض کرد که جهت اهداف این طرح خواص گازهای گرم احتراقی مثل خواص هواست. برای ساده کردن تحلیل، آهنگ‌های جریان گازهای داغ و هوا را یکسان فرض می‌کنیم. می‌توان فرض کرد که ضریب انتقال‌گرمای کلی ثابت و برابر $U = 25\ \frac{W}{m^{2}\cdot°C}$ است. انتخاب سطح انتقال گرمای بزرگ‌تر موجب ضریب تأثیر مبدل گرمایی بالاتر و ذخیره بیش‌تر انرژی می‌شود. اما مبدل بزرگ‌تر سرمایهٔ بیش‌تری را می‌طلبد. اندازه‌های مختلف مبدل را به ازای آهنگ جریان واحد گازهای داغ (مثلاً $1\ \frac{kg}{s}$) بررسی و اثر آن را بر صرفه‌جویی‌های هزینه خالص تعیین کنید، که:

صرفه‌جویی‌ها در هزینه

= (هزینه انرژی واحد) × (صرفه‌جویی‌های انرژی)

− (هزینه مبدل گرمایی / مساحت واحد)

× (مساحت مبدل گرمایی لازم برای صرفه‌جویی‌های انرژی)

فرض کنید که هزینه مبدل گرمایی واحدسطح و هزینه‌های انرژی واحد، مستقل از اندازه مبدل گرمایی است. فرض کنید که مبدل گرمایی جریان متقاطع است و هر دوگاز نیامیخته‌اند. در مورد نتایج و فرض‌های این مسأله اظهار نظر کنید. فکر می‌کنید این آرایش بازیافت گرما اگر هزینه انرژی $\frac{\$6/50}{GJ}$ باشد مقرون به‌صرفه است؟

۱۰-۱۲۴ می‌خواهیم مبدلی گرمایی طرح کنیم که $1100\ \frac{kg}{h}$ بخار را در ۱۵۰ kPa می‌چگالد. برای این منظور، آب خنک‌کن به دمای ۵۰°C و

در حجم کافی برای خنک‌کردن موجود است. از شما خواسته‌اند که مبدلی پوسته‌لوله‌ای با بخار در پوسته و یک پاس لوله به عنوان چگالنده طراحی کنید. از اطلاعات فصل‌های ۶ و ۹ برای محاسبه ضرایب جابه‌جایی برای چگالش و جریان اجباری در لوله‌ها استفاده کنید. چند ترکیب برای رشته لوله و اندازه لوله انتخاب و طول مبدل گرمایی را تعیین و افت فشار در لوله‌ها را در هر سر حساب کنید. طرحی‌نهایی‌که توصیه‌کنید آهنگ‌جریان آب، اندازه‌لوله، تعدادلوله‌ها، و طول لولهٔ آن مشخص‌است. در مورد انتخاب خود اظهار نظر کنید.

۱۰-۱۲۵ لازم است که لوله خنک‌کننده پمپ گرمایی آب سطحی را در محلی بکارند که دمای خاک $18^{\circ}C$ است. با ورود آب به لوله در $27^{\circ}C$ و خروج آن در دمایی حدود $20^{\circ}C$، مقدار سی kW انرژی منتشر می‌شود. ضریب هدایت گرمایی خساک در این محل را می‌توان $1/7 \frac{W}{m.^{\circ}C}$ گرفت. چند امکان برای جنس، قطر و طول لوله برای انجام این برمایش را آزمایش کنید. اطلاعاتی از منابع تجارتی در صورت لزوم دریافت کنید. برای انتخاب طرح این تأسیسات چه عواملی را باید در نظر گرفت؟ با توجه به تحلیل خود، انتخاب نهایی را برای طراحی مشخص و در مورد آن اظهار نظر کنید.

۱۰-۱۲۶ می‌خواهیم صفحه پره‌داری را از آلومینیم ساخته و برای انتشار W ۱۲۵ به اتاق با هوایی به دمای $20^{\circ}C$ طراحی کنیم . پایه پره‌ها شامل صفحه عمودی تختی با چند پره عمودی مستقیم با نیم‌رخ مستطیلی است. ضخامت صفحه پایه نباید از mm ۳ تجاوز کند و منبع گرما در طرف پشت صفحه، دستگاه قدرتی است که باید در دمایی زیر $75^{\circ}C$ کار کند. برای این طرح، از شما می‌خواهند که مجموعه مناسبی از سنجه‌های زیر را تعیین کنید که این اهداف انتقال گرما را انجام می‌دهند: (۱) عرض و طول صفحه پایه، (۲) تعداد پره‌های عمودی و فاصله آنها از هم، (۳) طول وضخامت پره‌ها، (۴) عملیات سطحی (در صورت وجود) که برای‌تقویت انتقال گرمای تابشی از پره‌ها لازم است. در این طرح از اطلاعات مربوط به عمل‌کرد پره از فصل ۲، اطلاعات در مورد جابه‌جایی آزاد از سطوح عمودی از فصل ۷، اطلاعات در مورد انتقال گرمای تابشی از فصل ۸، و خواص گرمایی و تابشی از پیوست استفاده کنید. فرض کنید که پره‌ها تا جایی که تماس گرمایی مورد نظراست، محکم به صفحهٔ پایه متصل است. چند آرایش را برای این طرح در نظر گرفته، از برنامه A نرم افزار انتقال گرمای پیوست D برای ارزیابی عمل‌کرد پره در صورت لزوم استفاده کنید. تمام فرض‌های تحلیل را بیان و عوامل مؤثر در طراحی نهایی خود را به روشنی مشخص کنید.

۱۰-۱۲۷ می‌خواهیم مبدل گرمایی پوسته ولوله‌ای با یک پاس پوسته و دو پاس لوله را برای چگالاندن $3900 \frac{kg}{hr}$ بخار در atm ۱ طراحی کنیم.

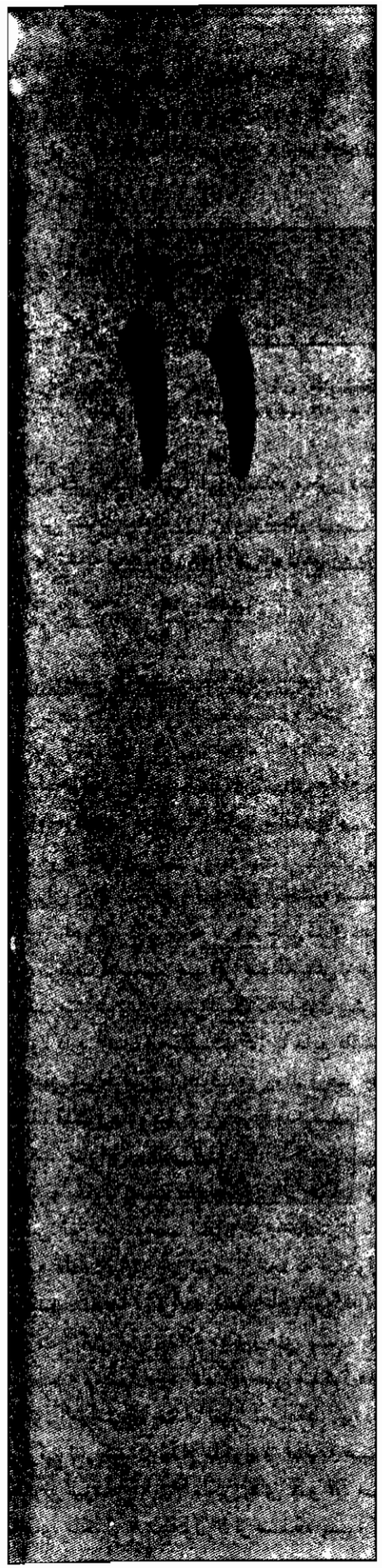
می‌توان فرض کرد که بخار به صورت اشباع وارد پوسته و از آن به صورت مایع اشباع خارج می‌شود. آب به عنوان مایع خنک‌کن در لوله‌ها استفاده می‌شود که دمای ورودی آن $40^{\circ}C$ است. با استفاده از مقادیر تقریبی برای ضرایب انتقال گرمای کلی که در جدول ۱۰-۱ موجود است، طرح مناسبی را معین کنید که (۱) تعداد لوله‌های هرپاس لوله، (۲) دمای آب خروجی، (۳) قطر و طول لوله در هر پاس لوله، و (۴) آهنگ جریان جرمی آب آن، مشخص است. قطر داخلی‌نهایی پوسته مورد نیاز را ارزیابی کنید. قبل از انتخاب طرح نهایی چند ترکیب را در نظر گرفته و در مورد عواملی بحث کنید که بر طرح انتخابی شما اثر می‌گذارند.

۱۰-۱۲۸ فرض کنید هزینه مبدلی گرمایی مستقیماً با مساحت آن تغییر می‌کند. ضریب تأثیر با مساحت بالا می‌رود (از طریق NTU) اما نه به صورت خطی. مبدلی لوله پره‌دار جریان متقاطعی را در نظر بگیرید که با دو گاز کار می‌کند به طوری که $C_{min} = C_{max}$ و $c_{min} = c_{max} = 1/005 \frac{kJ}{kg.^{\circ}C}$ است. مبدل به صورت ری‌کاپریتور برای پیش‌گرم کردن هوا در K ۳۰۰ با گازهای داغ دودکش به دمای K ۶۰۰ عمل می‌کند. صرفه‌جویی در انرژی عبارت است از انرژی دریافت شده توسط هوا و صرفه‌جویی در هزینه انرژی برابر آن مقدار ضرب در هزینه انرژی واحد است. با استفاده از جدول ۱۰-۱ به عنوان راهنمایی برای مقادیر U، رابطه‌ای بین هزینه‌های انرژی واحد و هزینه واحد سطح مبدل گرمایی بیدا کنید. چند مورد را با استفاده از هزینه‌های انرژی واحد واقعی برای تشریح تحلیل خود بررسی کنید. از این بررسی به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۱۰-۱۲۹ هزینه فولینگ در مبدل گرمایی را می‌توان با کاهش عمل‌کرد مبدل گرمایی ضرب در هزینهٔ انرژی واحد بیان کرد. این مشکل را می‌توان با پاک کردن مبدل یا با تصفیه شیمیایی سیال (سیالات) ضمن عملیات از بین برد. با استفاده از جدول‌های ۱۰-۱ و ۱۰-۲، مدل مبدلی گرمایی را پیشنهاد کنید و برای ارزیابی هزینه فولینگ تحلیلی انجام دهید. مقادیر مناسبی برای هزینه‌های انرژی واحد در نظربگیرید. آیا می‌توانید از بررسی خود به نتایجی برسید؟

❑ مراجع

1. Siegal, R., and J. R. Howell: "Thermal Radiation Heat Transfer," 4th ed., Hemisphere Publishing Corp., New York, 1990.
2. "Standards of tubular Exchanger Manufacturers Association," latest edition.
3. Kays, W.M., and A. L. London: "Compact Heat Exchangers," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
4. Bowman, R. A., A. E. Mueller, and W. M. Nagle: Mean Temperature Difference in Design, *Trans. ASME*, vol. 62, p. 283, 1940.
5. Perry, J. H. (ed.): "Chemical Engineers' Handbook." 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
6. American Society of Heating, Refrigeration. and Air Conditioning Engineers Guide, annually.
7. Sparrow, E. M., and R. D. Cess: "Radiation Heat Transfer," Wadsworth Publishing Co., Inc., New York, 1966.
8. Schlunder, E. W.: "Heat Exchanger Desing Handbook," Hemisphere Publishing Corp., New York, 1982.
9. Somerscales, E. F. C., and J. G. Knudsen (eds): "Fouling of Heat Transfer Equipment," Hemisphere Publishing Corp., New York, 1981.
10. Kraus, A. D., and D. Q. Kern: The Effectiveness of Heat Exchangers with One Shell Pass and Even Number of Tube Passes, *ASME Paper* 65-HT-18, Presented at National Heat Transfer Conference, August 1965.
11. DiGiovanni, M. A., and R. L. Webb: "Uncertainty in Effectiveness-NTU Calculations for Crossflow Heat Exchangers," *Heat Trans. Engr.*, vol. 10, pp. 61-70,1989.



انتقال جرم

❑ ۱۱-۱ مقدمه

انتقال جرم از چند پدیده مختلف ناشی می‌شود. یک انتقال جرم مربوط به جابه‌جایی است و در آن جرم از محلی به محل دیگر سیستم جریان، انتقال می‌یابد. این نوع انتقال جرم در سطح ماکروسکوپی صورت می‌گیرد و معمولاً در مبحث مکانیک سیالات بررسی می‌شود. وقتی مخلوطی از گازها یا مایعات در محفظه‌ای قرار می‌گیرد و گرادیان غلظتی از یک یا چند ماده تشکیل دهنده سیستم موجود باشد، انتقال جرم در سطح میکروسکوپی، به دلیل پخش از نواحی غلظت بالا به نواحی غلظت پایین، به‌وجود می‌آید.در این فصل عمدتاً بعضی از روابط ساده‌ای که در محاسبه پخش جرم به‌کار می‌رود و رابطه آنها با انتقال گرمارا بررسی می‌کنیم. با وجود این، باید به خاطر داشت که بحث ***کلی*** انتقال جرم هم پخش جرم در مقیاس ملکولی و هم انتقال جرم کپه‌ای را در بر می‌گیرد که از فرآیند جابه‌جایی ناشی می‌شود.

پخش جرم نه تنها بر پایه ملکولی صورت می‌گیرد، بلکه در سیستم‌های جریان ناآرام نیز در نتیجه فرآیندهای آمیزش گردابی - سریع، آهنگ پخش‌های سریع صورت می‌گیرد و وقتی این فرآیندهای آمیزش به‌وجود آیند انتقال گرما و کنش لزجی در جریان ناآرام، افزایش می‌یابد.

خوب است در عین خارج از بحث بودن، اشاره کنیم که پخش جرم ممکن است از گرادیان دما در سیستم نیز ایجاد شود که به آن **پخش گرمایی** می‌گویند. هم‌چنین، گرادیان غلظت می‌تواند منجر به گرادیان دما شده، موجب انتقال گرما شود. این دو اثر را **پدیده‌های مزدوج** می‌نامند و می‌توان آنها را با روش‌های ترمودینامیک برگشت‌ناپذیر مورد بررسی قرار داد. خواننده را برای بحث ترمودینامیک برگشت‌ناپذیر و پدیده‌های مزدوج و کاربرد آنها در فرآیندهای پخش به گزارشات پریجوجین Prigogine [۱] و دو گروت de Groot [۲] رجوع می‌دهیم.

❑ ۱۱-۲ قانون پخش فیک

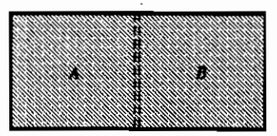
سیستم شکل ۱۱-۱ را در نظر بگیرید. افرازی نازک، دو گاز A و B را از هم جدا می‌کند. وقتی افراز را برداریم، دو گاز تا برقراری تعادل و ایجاد یکنواختی در غلظت گازها در سراسر جعبه در یک‌دیگر پخش می‌شوند. آهنگ پخش از قانون پخش فیک به‌دست می‌آید که می‌گوید شار جرمی یک جزء ترکیب در واحد سطح با گرادیان غلظت متناسب است. بنابراین:

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = - D \frac{\partial C_A}{\partial x} \qquad (۱-۱۱)$$

که D = ضریب پخش - ثابت تناسب، $\frac{m^2}{s}$

$\dot{m}_A$ = شار جرم در واحد زمان، $\frac{kg}{s}$

C_A = غلظت جرمی جزء ترکیب A در واحد حجم، $\frac{kg}{m^3}$



شکل ۱۱-۱ پخش جزء ترکیب A در جزء ترکیب B.

برای پخش جزء ترکیب A در امتداد محور yها یا zها نیز می‌توان عبارتی مشابه معادلهٔ (۱۱-۱) نوشت.

به تشابه معادلهٔ (۱۱-۱) و قانون فوریه در هدایت گرما توجه کنید:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

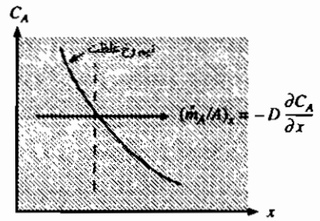
و معادلهٔ تنش برشی بین لایه‌های سیال:

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

معادله هدایت - گرما، انتقال انرژی را، معادلهٔ برش - لزجی، انتقال اندازه حرکت در عرض لایه‌های سیال و قانون پخش، انتقال جرم را بیان می‌کنند.

برای درک سازوکار فیزیکی پخش، صفحه تصوری شکل ۱۱-۲ را در نظر بگیرید که با خط چین نشان داده شده است. غلظت جزء ترکیب A سمت چپ این صفحه بیش‌تر از سمت راست است. غلظت بیش‌تر بدین معنی است که ملکول بیش‌تری در واحد حجم وجود دارد. چنان‌چه سیستم، گاز یا مایع باشد، ملکول‌ها به‌طور تصادفی این‌طرف و آن‌طرف می‌روند و هر چه غلظت بیش‌تر باشد، ملکول‌های بیش‌تری در واحد زمان از این صفحه عبور می‌کند. بنابراین، به‌طور متوسط، ملکول‌های بیش‌تری از سمت چپ به سمت راست صفحه در حال حرکت هستند تا در جهت عکس. این امر موجب انتقال جرم خالص از ناحیه غلظت بالا به ناحیه غلظت پایین می‌شود. از آنجا که ملکول‌ها با هم تصادم می‌کنند، شدیداً بر فرآیند پخش تأثیر می‌گذارند. در مخلوط گازها تفاوت زیادی بین تصادم ملکول‌های مشابه با تصادم ملکول‌های غیرمشابه وجود دارد. تصادم بین ملکول‌های مشابه، جنبش ملکولی اساسی را چندان تغییر نمی‌دهد، زیرا دو ملکول یکسان‌اند و فرقی نمی‌کند که کدام ملکول از صفحه عبور کنند. تصادم دو ملکول غیرمشابه، مثلاً ملکول‌های A و B، موجب می‌شود که به‌جای ملکول A ملکول B از صفحه عبور کنند. به‌طور کلی، ملکول‌ها جرم‌های متفاوت دارند و در نتیجه انتقال جرم تحت تأثیر این تصادم است. با استفاده از نظریه جنبشی گازها می‌توان آهنگ‌های پخش بعضی از سیستم‌ها را با در نظر گرفتن سازو کار تصادم و اوزان ملکولی گازهای تشکیل دهنده ترکیب، پیش‌بینی تحلیلی کرد.

آهنگ پخش در گازها، به روشنی به سرعت ملکولی بستگی دارد و در نتیجه باید انتظار بستگی ضریب پخش به دما را داشته باشیم زیرا دما، سرعت ملکولی متوسط را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱-۲ طرح نشان دهنده وابستگی پخش به نیم‌رخ غلظت.

❑ ۱۱-۳ پخش در گازها

جیلیلند Gilliland [۴] رابطه‌ای نیمه تجربی را برای ضریب پخش در گازها پیشنهاد می‌کند:

$$D = 435/7\,\frac{T^{\frac{3}{2}}}{p\,(V_A^{\frac{1}{3}} + V_B^{\frac{1}{3}})^2}\sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}} \qquad (۱۱-۲)$$

که D به سانتی‌متر مربع بر ثانیه، T به درجه کلوین، p فشار سیستم کل به پاسکال و V_A و V_B حجم‌های ملکولی اجزای ترکیب A و B هستند که از حجم‌های اتمی جدول ۱۱-۱ محاسبه می‌شود؛ M_A و M_B اوزان ملکولی اجزای ترکیب A و B هستند. مثال ۱۱-۱ کاربرد معادلهٔ (۱۱-۲) را در محاسبه ضرایب پخش نشان می‌دهد.

معادلهٔ (۱۱-۲) عبارت راحتی برای محاسبه ضریب پخش ترکیبات و مخلوط‌های مختلف است ولی نباید آن را به صورت جانشینی برای مقادیر تجربی ضریب پخش، در صورتی که برای سیستم خاصی در دسترس باشند، به کار برد. مراجع ۳ و ۵ تا ۹ اطلاعات بیش‌تری برای محاسبه ضرایب پخش ارائه می‌کنند. جدول خلاصه‌ای از ضرایب پخش در پیوست A داده شده است.

مثال ۱۱-۱ ضریب پخش برای CO_2

ضریب پخش CO_2 را در هوای به فشار جو و دمای ۲۵°C با استفاده از معادله (۱۱-۲) محاسبه و این مقدار را با عدد موجود در جدول A-۸ مقایسه کنید.

☑جدول ۱۱-۱ حجم‌های اتمی*

هوا	۲۹/۹	در آمین‌های نوع دوم	۱/۲۰
برم	۲۷/۰	اکسیژن، ملکول (O_2)	۷/۴
زغال	۱۴/۸	به دو عنصر دیگر جفت شده:	
گاز کربنیک	۳۴/۰	در آلدئیدها و کتون‌ها	۷/۴
کلر:		در متیل استرها	۹/۱
در انتها مثل $R-Cl$	۲۱/۶	در اتیل استرها	۹/۹
در وسط مثل $R\text{-}CHCl\text{-}R$	۲۴/۶	در استرهای بالاتر و اترها	۱۱/۰
فلوئور	۸/۷	در اسیدها	۱۲/۰
هیدروژن، ملکول (H_2)	۱۴/۳	در پیوند با N, P, S	۸/۳
در ترکیب	۳/۷	فسفر	۲۷/۰
ید	۳۷/۰	گوگرد	۲۵/۶
ازت، ملکول (N_2)	۱۵/۶	آب	۱۸/۸
در آمین‌های نوع اول	۱۰/۵		

* برای حلقه سه عضوی، ۶/۰ و برای حلقه چهار عضوی، ۸/۵ و برای حلقهٔ ۵ عضوی، ۱۱/۵ و برای حلقه ۶ عضوی، ۱۵/۰ و برای حلقهٔ نفتالین، ۳۰/۰ را در نظر بگیرید.

حل:

از جدول ۱۱-۱:

$V_{co_2} = 34/0 \qquad M_{co_2} = 44$

$V_{هوا} = 29/9 \qquad M_{هوا} = 28/9$

$$D = \frac{(435/7)(298)^{\frac{3}{2}}}{(1/01325\times10^5)[(34/0)^{\frac{1}{3}} + (29/9)^{\frac{1}{3}}]^2}\sqrt{\frac{1}{44} + \frac{1}{28/9}}$$

$$= 0/132\ \frac{cm^2}{s}$$

از جدول A-۸:

$$D = 0/164\ \frac{cm^2}{s} = 0/62\ \frac{ft^2}{h}$$

بنابراین دو مقدار نسبتاً با هم می‌خوانند.

از بحث مربوط به شکل ۱۱-۱ متوجه می‌شویم که فرآیند پخش هم‌زمان در دوجهت اتفاق می‌افتد؛ گاز A در B هم‌زمان با گاز B در A پخش می‌شود. بنابراین می‌توانیم به ضریب پخش یکی از این فرآیندها مراجعه کنیم.

در کار با قانون فیک، می‌توان از شار جرمی واحد سطح و غلظت جرمی به صورت معادله ۱۱-۱ استفاده کرد و یا می‌توان معادله را بر حسب غلظت‌های مولال و شارها بیان نمود. برای اینکه بدانیم کدام رابطه راحت‌تر است، هیچ قاعده کلی وجود ندارد و مسأله خاص تحت بررسی، این موضوع را روشن می‌کند. برای گازها، می‌توان قانون فیک را به راحتی بر حسب فشارهای جزئی، با استفاده از معادله حالت گاز کامل، بیان کرد. (این تبدیل فقط در مورد گازهای فشار پایین مصداق دارد یا در حالتی که معادله حالت گاز کامل به کار می‌آید.)

$$p = \rho RT \qquad (۱۱-۳)$$

چگالی ρ، غلظت جرمی در قانون فیک را نشان می‌دهد. ثابت گاز R برای گازی خاص را می‌توان بر حسب ثابت عمومی گازها R_o و وزن ملکولی گاز بیان کرد:

$$R_A = \frac{R_o}{M_A} \qquad (۱۱-۴)$$

که :

$$R_o = 8314\ \frac{J}{kg.mol.K}$$

بنابراین :

$$C_A = \rho_A = \frac{p_A M_a}{R_o T}$$

در نتیجه، قانون فیک پخش جزء ترکیب A در جزء ترکیب B را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = -D_{AB}\frac{M_A}{R_o T}\frac{dp_A}{dx} \qquad (۱۱-۵)$$

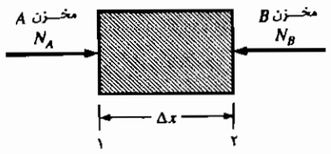
به شرطی که پخش هم‌دما باشد. برای سیستم شکل ۱۱-۱ می‌توانیم پخش جزء ترکیب B در جزء A را نیز بنویسیم:

$$\frac{\dot{m}_B}{A} = -D_{BA}\frac{M_B}{R_o T}\frac{dp_B}{dx} \qquad (۱۱-۶)$$

در اینجا هم پخش هم‌دما می‌باشد. به زیرنویس‌های متفاوت ضریب پخش توجه کنید. اکنون وضعیت فیزیکی موسوم به **پخش متقابل هم مولال**، را مطابق شکل ۱۱-۳ در نظر بگیرید؛ N_A و N_B به ترتیب آهنگ پخش مولال حالت پایدار اجزای ترکیب A و B را نشان می‌دهند. در این وضعیت حالت پایدار، جای هر ملکول A را یک ملکول B می‌گیرد و بالعکس. آهنگ‌های پخش مولال چنین است:

$$N_A = \frac{\dot{m}_A}{A} = -D_{AB}\frac{A}{R_o T}\frac{dp_A}{dx}$$

$$N_B = \frac{\dot{m}_B}{B} = -D_{BA}\frac{A}{R_o T}\frac{dp_B}{dx}$$



شکل ۱۱-۳ طرح نشان دهندهٔ پخش هم‌مولال.

فشار کل سیستم در حالت پایدار، ثابت می‌ماند، به طوری که:

$$p = p_A + p_B$$

و:

$$\frac{dp_A}{dx} + \frac{dp_B}{dx} = 0$$

یا:

$$\frac{dp_A}{dx} = \frac{-dp_B}{dx} \qquad (۱۱-۷)$$

چون به جای هر ملکول A یک ملکول B جانشین می‌شود، می‌توانیم آهنگ‌های پخش مولال را مساوی قرار دهیم:

$$-N_A = N_B$$

یا:

$$-D_{AB}\frac{A}{R_oT}\frac{dp_A}{dx} = -D_{BA}\frac{A}{R_oT}\frac{dp_A}{dx}$$

که برای بیان گرادیان فشارِ جزء ترکیب B از معادلهٔ (۱۱-۷) استفاده شده است. بنابراین داریم:

$$D_{AB} = D_{BA} = D \tag{۱۱-۸}$$

می‌توان D را از معادلهٔ (۱۱-۲) حساب کرد.

برای به‌دست آوردن شار جرمی جزء ترکیب A می‌توانیم از معادلهٔ (۱۱-۵) انتگرال بگیریم:

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = \frac{-DM_A}{R_oT}\frac{p_{A_2} - p_{A_1}}{\Delta x} \tag{۱۱-۹}$$

نام‌گذاری طبق شکل ۱۱-۳ است.

حال تبخیر هم‌دمای آب از سطح و پخش‌بعدی آن در لایه هوای ساکن را مطابق شکل ۱۱-۴ در نظر بگیرید. سطح آزاد آب مطابق شکل در معرض هوای داخل مخزن قرار دارد. به فرض سیستم هم‌دماست و فشار کل ثابت می‌ماند. به علاوه فرض می‌کنیم که سیستم در حالت پایدار است. برای این منظور لازم‌است که جنبش اندک هوا در بالای مخزن وجود داشته باشد تا بخار آبی را که به آن نقطه پخش می‌شود بگیرد. گرچه ممکن است برای این‌کار به جنبش هوا نیاز باشد ولی فرض می‌شود که این جنبش موجب ناآرامی نمی‌شود وگرنه نیم‌رخ‌های غلظت هوای داخل مخزن را تغییر می‌دهند. به علاوه فرض می‌کنیم هم هوا هم بخار آب مثل گازهای ایده‌آل رفتار می‌کنند.

وقتی آب بخار شود، به سمت بالا و در هوا پخش شده و در حالت پایدار، این جنبش به سمت بالا باید با پخش هوا به سمت پایین موازنه گردد به طوری که غلظت در هر موقعیت x ثابت بماند. ولی در سطح آب نمی‌تواند جنبش جرمی خالص هوا به سمت پایین وجود داشته باشد. پس باید جنبش جرمی کپه‌ای به سمت بالا و با سرعتی به حد کافی زیاد جهت موازنه با پخش هوا به سمت پایین، وجود داشته باشد. سپس این جنبش جرمی کپه‌ای، شار جرمی ***اضافی*** بخار آب به سمت بالا ایجاد می‌کند.

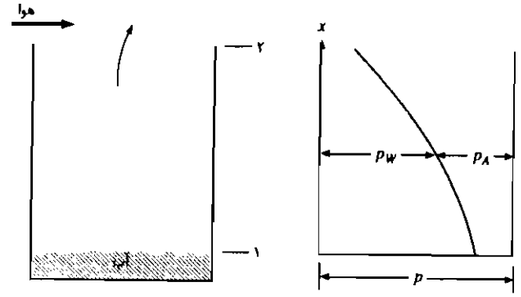
پخش هوا به سمت پایین چنین به‌دست می‌آید:

$$\dot{m}_A = \frac{-DAM_A}{R_oT}\frac{dp_A}{dx} \tag{۱۱-۱۰}$$

که A مساحت سطح مقطع مخزن را نشان می‌دهد. این پخش باید با انتقال جرم کپه‌ای به سمت بالا موازنه شود به طوری که:

$$-\rho_A A v = -\frac{p_A M_a}{R_oT} A v \tag{۱۱-۱۱}$$

که v سرعت جرم کپه‌ای به سمت بالا است.



شکل ۱۱-۴ پخش بخار آب در هوا.

با ترکیب معادلات (۱۱-۱۰) و (۱۱-۱۱) داریم:

$$v = \frac{D}{p_A}\frac{dp_A}{dx} \tag{۱۱-۱۲}$$

پخش جرمی بخار آب به سمت بالا برابر است با:

$$\dot{m}_w = -DA\frac{M_w}{R_oT}\frac{dp_w}{dx} \tag{۱۱-۱۳}$$

و انتقال کپه‌ای بخار آب برابر است با:

$$\rho_w A v = \frac{p_w M_w}{R_oT} A v \tag{۱۱-۱۴}$$

و انتقال جرم کل برابر مجموع انتقال‌های معادلات (۱۱-۱۳) و (۱۱-۱۴) است با جمع این مقادیر و استفاده از معادلهٔ (۱۱-۱۲) داریم:

$$\dot{m}_{w\,\text{کل}} = -\frac{DAM_w}{R_oT}\frac{dp_w}{dx} + \frac{p_w M_w}{R_oT} A \frac{D}{p_A}\frac{dp_A}{dx}$$

فشار جزئی بخار آب را می‌توان با استفاده از قانون دالتون به فشار جزئی هوا ارتباط داد.

$$p_A + p_w = p$$

یا:

$$\frac{dp_A}{dx} = -\frac{dp_w}{dx}$$

زیرا فشار کل ثابت است. بنابراین جریان جرم کل بخار آب برابر می‌شود با:

$$\dot{m}_{\text{کل}} = -\frac{DM_w A}{R_oT}\frac{p}{p - p_w}\frac{dp_w}{dx} \tag{۱۱-۱۵}$$

این رابطه به قانون استفان موسوم است. با انتگرال‌گیری از رابطه

فوق داریم:

$$\dot{m}_{w\,\text{کل}} = \frac{DpM_wA}{R_oT(x_2 - x_1)}\ln\frac{p - p_{w_2}}{p_{w_1}}$$

$$= \frac{DPM_wA}{R_oT(x_2 - x_1)}\ln\frac{p_{A_2}}{p_{A_1}} \tag{۱۱-۱۶}$$

مثال ۱۱-۲ پخش آب در لوله

آهنگ پخش آب از کف لوله آزمایش به قطر ۱۰ mm و طول ۱۵ cm را به هوای جو خشک به دمای ۲۵°C حساب کنید.

حل :

از معادله (۱۱-۱۶) برای محاسبه شار جرمی، استفاده می‌کنیم. فشار جزئی در کف لوله آزمایش برابر فشار اشباع دمای ۲۵°C [۷۷°F] است و فشار بخار بالای لوله آزمایش را می‌توان برابر صفر گرفت زیرا بخار در هوای خشک پخش می‌شود. در نتیجه:

$$p_{A_1} = p - p_{w_1} = ۱۴/۶۹۶ - ۰/۴۵۹۳ = ۱۴/۲۳۷\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\ \text{abs}$$

$$= ۹/۸۱۵۵ \times ۱۰^۴\ \text{Pa}$$

$$p_{A_2} = p - p_{w_2} = ۱۴/۶۹۶ - ۰ = ۱۴/۶۹۶\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\ \text{abs}$$

$$= ۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^۵\ \text{Pa}$$

از جدول A-۸ داریم:

$$D = ۰/۲۵۶\ \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \qquad \dot{m}_w = \frac{DpM_wA}{R_oT(x_2 - x_1)}\ln\frac{p_{A_2}}{p_{A_1}}$$

$$m_w = \frac{(۰/۲۵۶ \times ۱۰^{-۴})(۱/۰۱۳۲ \times ۱۰^۵)(۱۸)(\pi)(۵ \times ۱۰^{-۳})^۲}{(۸۳۱۴)(۲۹۸)(۰/۱۵)}\ln\frac{۱/۰۱۳۲}{۰/۹۸۱۵۵}$$

$$= ۳/۱۳۱ \times ۱۰^{-۱۰}\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}\ [۰/۰۰۱۱۳\frac{\text{g}}{\text{h}}]$$

۱۱-۴ پخش در مایعات و جامدات

قانون پخش فیک در مسائل پخش در مایعات و جامدات نیز به‌کار می‌رود و مشکل اصلی تعیین مقدار ضریب پخش مایع یا جامد خالص است. متأسفانه برای پیش‌بینی ضرایب پخش در این سیستم‌ها، نظریه‌های تقریبی در دست است. برد، استوارت stewart و لایتفوت Lightfoot [۹] محاسبه پخش در مایعات را مورد بحث قرار داده، جوست Jost [۶] بحثی از نظریه‌های مختلف ارائه می‌کند خواننده را برای کسب اطلاع بیش‌تر در زمینه پخش در مایعات و جامدات به این کتاب‌ها رجوع می‌دهیم.

پخش در جامدات به دلیل اثر شدید میدان‌های نیروی ملکولی بر فرآیند، پیچیده است. اغلب برای این سیستم‌ها از قانون فیک [معادله (۱۱-۱)] استفاده می‌شود و ضریب پخش به طور تجربی تعیین می‌شود. گرچه از بعضی قرائن چنین برمی‌آید که این رابطه نمی‌تواند فرآیندهای فیزیکی را به‌طور مناسب توضیح دهد. مقدار عددی ضریب پخش مایعات و جامدات خیلی کم‌تر است تا برای گازها و دلیل آن عمدتاً میدان‌های نیروی ملکولی بزرگ‌تر، تعداد تصادمات بیش‌تر و در نتیجه کم شدن آزادی جنبش ملکول‌ها است.

۱۱-۵ ضریب انتقال جرم

ضریب انتقال جرم را می‌توان مثل انتقال گرما تعریف کرد. بنابراین:

$$\dot{m}_A = KA(C_{A_1} - C_{A_2}) \tag{۱۱-۱۷}$$

که $\dot{m}_A$ = شار جرم پخشندهٔ جزء ترکیب A، $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$

K = ضریب انتقال جرم، $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

C_{A_1}, C_{A_2} = غلظت‌هایی که پخش در آنها صورت می‌گیرد، $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

در پخش حالت پایدار در عرض لایه‌ای به ضخامت Δx داریم:

$$\dot{m}_A = -\frac{DA(C_{A_2} - C_{A_1})}{\Delta x} = KA(C_{A_2} - C_{A_1})$$

و :

$$K = \frac{D}{\Delta x} \tag{۱۱-۱۸}$$

برای تبخیر آب در مثال قبل:

$$C_{w_1} - C_{w_2} = \frac{M_w}{R_oT}(p_{w_1} - p_{w_2})$$

بنابراین ضریب انتقال جرم این وضعیت را می‌توان چنین نوشت:

$$K = \frac{Dp}{(x_2 - x_1)(p_{w_1} - p_{w_2})}\ln\frac{p - P_{w_2}}{p - p_{w_1}} \tag{۱۱-۱۹}$$

توجه کنید که واحد ضرایب انتقال جرم در *SI* متر بر ثانیه است.

ملاحظه کردید که قوانین نمود شناختی حاکم بر انتقال اندازه حرکت، جرم، گرما مشابه‌اند. در فصل ۵ نشان دادیم که معادلات انرژی و اندازه حرکت لایه مرزی آرام، مشابه‌اند، یعنی:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{۱۱-۲۰}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{۱۱-۲۱}$$

به علاوه دیدیم که نسبت $\frac{\nu}{\alpha}$، عدد پراندل، حلقه ارتباطی میان میدان دما و سرعت بود و بنابراین عامل مهمی در تمام مسائل انتقال گرمای جابه‌جایی بود. در بررسی لایه مرزی آرام روی صفحه تخت که در آن به دلیل وجود انتقال جرم در سطح، عمل پخش صورت می‌گیرد می‌توانیم معادله‌ای برای غلظت جزء ترکیب خاص در لایه به‌دست آوریم. این معادله چنین است:

$$u\frac{\partial C_A}{\partial x} + v\frac{\partial C_A}{\partial y} = D\frac{\partial^2 C_A}{\partial^2 y} \tag{۱۱-۲۲}$$

که C_A غلظت جزء ترکیبی است که در لایه مرزی پخش می‌شود. به تشابه بین معادلهٔ (۱۱-۲۲) و (۱۱-۲۰) و (۱۱-۲۱) توجه کنید. نیم‌رخ‌های غلظت و سرعت، وقتی $\frac{\nu}{D} = 1$ یا $\nu = D$، یک شکل خواهد بود. نسبت بی‌بعد $\frac{\nu}{D}$ به **عدد اشمیت** موسوم است:

$$\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} \qquad (۱۱-۲۳)$$

و در مسائلی که انتقال جرم و جابه‌جایی هر دو مهم هستند دارای اهمیت است. بنابراین عدد اشمیت نقشی مشابه عدد پراندل در مسائل انتقال گرمای جابه‌جایی دارد. در حالی که وابستگی تابعی ضریب انتقال گرما در مسائل انتقال گرمای جابه‌جایی روی صفحه تخت را چنین می‌نویسیم:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = f(\mathrm{Re}_x,\ \mathrm{Pr})$$

باید رابطهٔ تابعی در مسائل انتقال جرم جابه‌جایی را چنین بنویسیم:

$$\frac{Kx}{D} = f(\mathrm{Re}_x,\ \mathrm{Sc})$$

وقتی $\alpha = D$ یا $\frac{\alpha}{D} = 1$، نیم‌رخ‌های دما و غلظت، مشابه خواهد بود و نسبت $\frac{\alpha}{D}$ به **عدد لویس** موسوم است:

$$\mathrm{Le} = \frac{\alpha}{D} = \frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} \qquad (۱۱-۲۴)$$

تشابه معادلات حاکمه انتقال گرما، جرم و اندازه حرکت بدین معنی است که همبستگی‌های تجربی ضریب انتقال جرم باید مشابه همبستگی‌های ضریب انتقال گرما باشند. این اصل قضیه است و بعضی روابط تجربی ضرایب انتقال جرم در زیر آورده شده‌اند. جیلیلند [۴] معادلهٔ زیر را برای تبخیر مایعات در هوای داخل ستون‌های با مقطع دایروی ارائه می‌کند که مایع در آنها سطح را مرطوب می‌کند و هوا به‌طور اجباری در ستون جریان داده می‌شود:

$$\frac{Kd}{D} = 0.023\left(\frac{\rho u_m d}{\mu}\right)^{0.83}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{0.44} \qquad (۱۱-۲۵)$$

عبارت $\frac{Kx}{D}$ یا $\frac{Kd}{D}$ به عدد **شروود** موسوم است:

$$\mathrm{Sh} = \frac{Kx}{D} \qquad (۱۱-۲۶)$$

به تشابه معادله (۱۱-۲۵) و معادله دیتوس - بوتلر (۶-۴)، توجه کنید. معادله (۱۱-۲۵) به ازای مقادیر زیر معتبر است:

$$2000 < \mathrm{Re}_d < 35000 \qquad \text{و} \qquad 0.6 < \mathrm{Sc} < 2.5$$

و در مورد جریان در لوله‌های صاف به‌کار می‌رود.

تشابه رینولدز جریان در لوله را می‌توان به مسائل انتقال جرم بسط داد و ضریب انتقال جرم را بر حسب ضریب اصطکاک بیان کرد. تشابه چنین است:

$$\frac{K}{u_m}\mathrm{Sc}^{\frac{2}{3}} = \frac{f}{8} \qquad (۱۱-۲۷)$$

که می‌توان آن را با تشابه انتقال گرما [معادلهٔ (۱۰-۶)] مقایسه کرد:

$$\frac{h}{u_m c_p \rho}\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{f}{\Lambda} \qquad (۱۱-۲۸)$$

تشابه رینولدز برای انتقال جرم در جریان روی صفحات تخت و صاف چنین است:

$$\frac{K}{u_\infty}\mathrm{Sc}^{\frac{2}{3}} = \frac{C_f}{2} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{آرام} \qquad (۱۱-۲۹)$$

$$\frac{K}{u_\infty}\mathrm{Sc}^{\frac{2}{3}} = \frac{C_f}{2} = 0.0296\,\mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{5}} \qquad \text{ناآرام} \qquad (۱۱-۳۰)$$

معادلات (۱۱-۲۹) و (۱۱-۳۰) مشابه معادلات (۵-۵۵) و (۵-۸۱)اند.

وقتی انتقال گرما و جرم هر دو هم‌زمان اتفاق می‌افتد، می‌توان ضرایب انتقال گرما و جرم را با تقسیم معادلهٔ (۱۱-۲۸) بر معادلهٔ (۱۱-۲۷) به هم‌ربط داد:

$$\frac{h}{K} = \rho c_p\left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)^{\frac{2}{3}} = \rho c_p\left(\frac{\alpha}{D}\right)^{\frac{2}{3}} = \rho c_p\,\mathrm{Le}^{\frac{2}{3}} \qquad (۱۱-۳۱)$$

علاوه بر استفاده از چگالی جرمی یا غلظت جرمی به عنوان پتانسیل محرک در جریان (پخش) جرم و تعریف ضریب انتقال جرم، می‌توان از چگالی مولار و کسرهای مولی به عنوان نیروهای محرک استفاده کرد. وب [۱۴] نام‌گذاری استانداردی را پیشنهاد می‌کند که برای کمیت‌های مختلف کاربرد دارد.

مثال ۱۱-۳ دمای حباب مرطوب

هوای خشک به فشار جو، در عرض دماسنجی محصور در پوشش مرطوب می‌وزد. این دماسنج حباب - مرطوب کلاسیک است. دماسنج دمای ۱۸/۳°C را نشان می‌دهد. دمای هوای خشک چه‌قدر است؟

حل :

مسأله را به این ترتیب حل می‌کنیم. نخست توجه کنید که این دماسنج در شرایط حالت پایدار انرژی خالصی مبادله نمی‌کند و گرمای مورد نیاز برای تبخیر آب از پوشش یاد شده را باید از هواگرفت. بنابراین موازنه انرژی را می‌نویسیم:

$$hA(T_\infty - T_w) = \dot{m}_w h_{fg}$$

که h ضریب انتقال گرما و $\dot{m}_w$ جرم آب بخار شده است. حال:

$$\dot{m}_w = KA(C_w - C_\infty)$$

بنابراین:

$$hA\,(T_\infty - T_w) = KA\,(C_w - C_\infty)h_{fg}$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۱-۳۱)، داریم:

$$\rho c_p\left(\frac{\alpha}{D}\right)^{\frac{2}{3}}(T_\infty - T_w) = (C_w - C_\infty)\,h_{fg} \qquad \text{(الف)}$$

غلظت در سطح C_w غلظت در شرایط اشباع در دمای دماسنج است. از جداول بخار در 65°F [18/3°C] داریم:

$$p_g = 0.3056\ \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in}^2}\ \mathrm{abs} = 2107\ \mathrm{Pa}$$

و :

$$\rho_w = C_w = \frac{p_w}{R_w T_w} = \frac{(2107)(18)}{(8315)(291/3)} = 0.01566\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

سایر خواص عبارتند از:

$$\rho_\infty = C_\infty = 0 \quad \text{(زیرا جریان آزاد، در هوای خشک است)}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(291/3)} = 1.212\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$c_p = 1.004\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg.°C}} \qquad Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} = 0.845$$

$$h_{fg} = 1057\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb}_m} = 2.456\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$$

بنابراین، از (الف) داریم:

$$T_\infty - T_w = \frac{(0.01566 - 0)(2.456 \times 10^6)}{(1.212)(1004)(0.845)^{\frac{2}{3}}} = 35/36°\mathrm{C}$$

$$T_\infty = 53/69°\mathrm{C}$$

حال باید این محاسبه را با محاسبه مجدد چگالی در دمای متوسط عددی بین شرایط دیوار و جریان - آزاد، اصلاح کرد. نتایج با این اصلاح چنین می‌شود:

$$\rho = 1.143\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad T_\infty = 55/8°\mathrm{C}$$

لازم نیست نسبت $\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}$ را اصلاح کنیم، زیرا این سنجه در این محدودهٔ دمایی زیاد تغییر نمی‌کند.

مثال ۱۱-۴ رطوبت نسبی جریان هوا

چنان‌چه دمای جریان هوا در مثال ۱۱-۳ برابر 32/2°C [90°F] باشد و دمای حباب - مرطوب 18/3°C باقی بماند، رطوبت نسبی جریان هوا را بیابید.

حل :

از ترمودینامیک می‌دانیم که رطوبت نسبی به صورت نسبت غلظت بخار به غلظت هوا در شرایط اشباع تعریف می‌شود. بنابراین غلظت واقعی بخار آب در جریان هوا را چنین حساب می‌کنیم:

$$\rho c_p\left(\frac{\alpha}{D}\right)^{\frac{2}{3}}(T_\infty - T_w) = (C_w - C_\infty)\,h_{fg} \qquad \text{(الف)}$$

و سپس این مقدار را با غلظت اشباع مقایسه و رطوبت نسبی را تعیین کنیم. خواص از مثال ۱۱-۳ برداشت می‌شود:

$$\rho = 1.212\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad c_p = 1.004\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg.°C}} \qquad \frac{\alpha}{D} = \frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} = 0.845$$

$$T_w = 18/3°\mathrm{C}\,[65°\mathrm{F}] \qquad T_\infty = 32/2°\mathrm{C}\,[90°\mathrm{F}]$$

$$\rho_w = C_w = 0.01566\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad h_{fg} = 2.456\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$$

مقادیر عددی را در معادله (الف) جای‌گزین کرده، داریم:

$$(1.212)(1004)(0.845)^{\frac{2}{3}}(32/2 - 18/3)$$

$$= (0.01566 - C_\infty)(2.456 \times 10^6)$$

بنابراین:

$$\rho_\infty = C_\infty = 0.0095\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

غلظت اشباع جریان آزاد در دمای 32/2°C [90°F] از جدول بخار به‌دست می‌آید:

$$\rho_g = C_g\,(90°\mathrm{F}) = 2.136 \times 10^{-4}\ \frac{\mathrm{lb}_m}{\mathrm{ft}^3} = 0.0342\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

بنابراین رطوبت نسبی برابر است با:

$$\mathrm{RH} = \frac{0.0095}{0.0342} = \%27/8$$

۱۱-۶ فرآیندهای تبخیر در جو

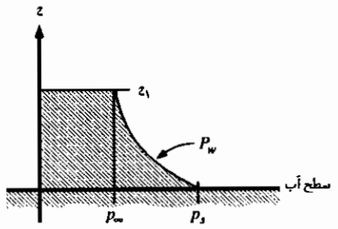
تا اینجا برخی فرآیندهای تبخیر را توضیح و روابط بین انتقال جرم و گرما را نشان دادیم. در جو، تبخیر و چگالش مداوم آب از خاک، اقیانوس‌ها و دریاچه‌ها بر هر شکل حیات اثر گذاشته، موجب تغییرات هر روزه آب و هوایی می‌شود که محیط روی زمین را کنترل می‌کند. این فرآیندها بسیار پیچیده‌اند زیرا در عمل، تابع جریان‌های جابه‌جایی جوی اساسی هستند که بیان تحلیلی آنها مشکل است.

ابتدا پخش بخار آب از سطح افقی به هوای ساکن را مطابق شکل ۱۱-۵ بررسی می‌کنیم. فشار جزئی بخار در سطح p_s است. فشار بخار مرتباً با افزایش ارتفاع z تا مقدار «جو آزاد» p_∞ کاهش می‌یابد. پخش ملکولی بخار آب را می‌توان به شکل معادلهٔ (۱۱-۱۳) نوشت:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -D_w\frac{M_w}{R_\circ T}\frac{dp_w}{dz} \qquad (۱۱-۳۲)$$

که A مساحت سطح تحت بررسی است. بهتر است این رابطه را در کاربردهای آب‌شناسی برحسب چگالی و فشار جو محلی بیان کنیم:

$$p = \rho\frac{R_\circ}{M}T \qquad (۱۱-۳۳)$$



شکل ۱۱-۵ پخش بخار آب از سطح افقی.

که ρ و M به ترتیب چگالی و وزن ملکولی هوای مرطوب است. چون غلظت مولار بخار آب در کاربردهای جوی، خیلی کوچک است، وزن ملکولی هوای مرطوب اساساً همان وزن ملکولی هوای خشک است و می‌توان معادلات (۱۱-۳۲) و (۱۱-۳۳) را ترکیب کرد تا داشته باشیم:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -D_w\frac{M_w}{M_a}\frac{\rho}{p}\frac{dp_w}{dz}$$

ولی $\frac{M_w}{M_a} = ۰/۶۲۲$ است، بنابراین:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -۰/۶۲۲\, D_w \frac{\rho}{p}\frac{dp_w}{dz} \qquad (۱۱-۳۴)$$

با استفاده از شرایط مرزی زیر:

$$p_w = p_s \quad \text{در} \quad z = ۰$$
$$p_w = p_\infty \quad \text{در} \quad z = z_1$$

از معادلهٔ (۱۱-۳۴) انتگرال‌گیری کرده، داریم:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = ۰/۶۲۲\, D_w \frac{\rho}{p}\frac{p_s - p_\infty}{z_1} \qquad (۱۱-۳۵)$$

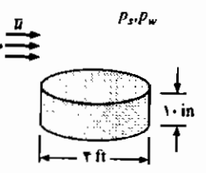
فرآیندهای تبخیر در جو خیلی پیچیده‌تر از آنند که با معادلهٔ (۱۱-۳۵) نشان داده شده است، به دو دلیل:

۱- فرآیند پخش شامل حرکت گردابی ناآرام اساسی است به‌طوری که ضریب پخش D_w شدیداً برحسب ارتفاع z تغییر می‌کند.

۲- هوا به ندرت ساکن است و جریان‌های باد اساساً بر آهنگ تبخیر تأثیر می‌گذارند.

همان‌طور که قبلاً در بسیاری از مسائل جابه‌جایی ملاحظه کردیم، حل مسأله‌ای پیچیده‌تر از این دست، اغلب با توسل به اندازه‌گیری‌های دقیقاً کنترل شده در تحقیق رابطه‌ای تجربی برای پیش‌بینی آهنگ‌های تبخیر، به‌دست می‌آید.

در این مسأله، از «کاسه استاندارد» مطابق شکل ۱۱-۶ استفاده می‌شود. جنبش باد متوسط در .in ۶ بالای لبه کاسه اندازه‌گیری و آهنگ تبخیر آب در حالتی اندازه‌گرفته می‌شود که کاسه روی زمین ***(کاسه زمینی)*** قرار گرفته یا در داخل آب است ***(کاسه شناور)***.



شکل ۱۱-۶ کاسه استاندارد کلاس **A** برای اندازه‌گیری تبخیر.

در حالت کاسه زمینی و وقتی جو از ***نظر جابه‌جایی پایدار*** است، آهنگ تبخیر به طور تجربی از فرمول زیر به‌دست می‌آید [۱۳]:

$$E_{lp} = (۰/۳۷ + ۰/۰۰۴۱\bar{u})\,(p_s - p_w)^{۰/۸۸} \qquad (۱۱-۳۶)$$

که E_{lp} = تبخیر کاسه زمینی، in / day (اینچ در روز)

$\bar{u}$ = سرعت جنبش باد روزانه که در ۶ اینچی بالای لبه کاسه اندازه‌گیری شده، mi / day (مایل در روز)

p_s = فشار بخار اشباع در دمای حباب - خشک هوا در ۵ ft بالای سطح زمین، in Hg

p_w = فشار بخار واقعی هوا در شرایط دما و رطوبت در ۵ ft بالای سطح زمین، in Hg

اثر انتقال گرما به کاسه بر آهنگ تبخیر در دو آزمایش کاسه زمینی و کاسه شناور متفاوت است. برای تبدیل اندازه‌های کاسه به اندازه‌های سطح طبیعی، معادلهٔ (۱۱-۳۶) را در ***ضریب کاسه*** ضرب می‌کنیم که برای کاسه زمینی ۰/۷ و برای کاسه شناور ۰/۸ است. چنان‌چه جو از نظر جابه‌جایی پایدار نباشد، گردابان‌های چگالی عمودی موجب انحراف قابل توجه از معادله (۱۱-۳۶) می‌شود. این مسائل در مراجع ۱۰ تا ۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرند.

مثال ۱۱-۵ آهنگ تبخیر آب

برای اندازه‌گیری آهنگ تبخیر در هوای جو به دمای ۱۰۰°F و رطوبت نسبی ۳۰٪، از کاسه زمینی استاندارد استفاده می‌شود. سرعت باد متوسط ۱۰ $\frac{mi}{h}$ است. آهنگ تبخیر روی زمین در این شرایط را به $\frac{lb_m}{h.ft^2}$ بیابید.

حل:

می‌توان برای این محاسبه از معادلهٔ (۱۱-۳۶) استفاده کرد. از جداول بخار در ترمودینامیک داریم:

$$p_s = p_g \text{ در } ۱۰۰°F = ۰/۹۴۹۲ \frac{lb}{in^2}\text{ abs} = ۱/۹۳۳ \text{ in Hg } [۶/۵۴۵kPa]$$

$$\text{رطوبت نسبی} = \frac{p_w}{p_s}$$

$$p_w = (۰/۳۰)(۱/۹۳۳) = ۰/۵۸۰ \text{ in Hg } [۱/۹۶۴kPa]$$

هم‌چنین:

$$\bar{u} = ۱۰\frac{mi}{h} = ۲۴۰ \frac{mi}{روز} \left[۳۸۶/۲\frac{km}{روز}\right]$$

حال با استفاده از معادلهٔ (۱۱-۳۶) و استفاده از ضریب ۰/۷ داریم:

$$E_{lp} = ۰/۷\,[۰/۳۷ + (۰/۰۰۴۱)(۲۴۰)](۱/۹۳۳ - ۰/۵۸۰)^{۰/۸۸}$$
$$= ۱/۲۳۷ \frac{in}{روز}\left[۳۱/۴۱\frac{mm}{روز}\right]$$

چون قطر کاسه استاندارد ۴ ft است، می‌توانیم برای محاسبه آهنگ تبخیر جرم واحد سطح از این عدد استفاده کنیم:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = \frac{E_{lp}}{۱۲}\rho_w$$
$$= \frac{(۱/۲۳۷)(۶۲/۴)}{۱۲} = ۶/۴۳۲ \frac{lb_m}{روز.ft^2}\left[۳۱/۴۳\frac{kg}{m^2.روز}\right]$$
$$= ۰/۲۶۸ \frac{lb_m}{h.ft^2}\left[۱/۳۱\frac{kg}{h.m^2}\right]$$

به عنوان نکته‌ای قابل توجه، می‌توانیم آهنگ پخش ملکولی بخار آب را از معادلهٔ (۱۱-۳۵) حساب کنیم. z_1 یعنی فاصله از کاسه استاندارد را ۵ ft می‌گیریم. چون:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

می‌توان معادلهٔ (۱۱-۳۵) را چنین نوشت:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = ۰/۶۲۲\,\frac{D_w}{RT}\frac{p_s - p_w}{z_1}$$

از جدول A-۸ داریم:

$$D_w = ۰/۲۵۶\frac{cm^2}{s} = ۰/۹۹\frac{ft^2}{h}$$

بنابراین:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{(۰/۶۲۲)(۰/۹۹)(۰/۹۴۹۲)(۱ - ۰/۳)}{(۵۳/۳۵)(۵۶۰)(۵/۰)}$$
$$= ۳/۹۴ \times ۱۰^{-۴}\frac{lb_m}{h.ft^2}\left[۱۹/۲\frac{g}{h.m^2}\right]$$

این عدد در مقایسه با عدد قبلی کوچک و قابل صرف‌نظر است. این بدان معنی است که در فرآیند تبخیر واقعی، پخش ناآرام و انتقال جابه‌جایی نقش غالب را در مقایسه با پخش ملکولی دارد.

❑ سؤالات مرور فصل

۱ ضریب پخش چگونه تعریف می‌شود؟

۲ ضریب انتقال جرم را تعریف کنید.

۳ اعداد اشمیت و لویس را تعریف کنید. اهمیت فیزیکی هر کدام چیست؟

۴ چرا نمی‌توان آهنگ‌های تبخیر جوی را با معادلات پخش ملکولی معمولی محاسبه کرد؟

❑ فهرست مثال‌های حل شده

۱۱-۱ ضریب پخش برای CO_2

۱۱-۲ پخش آب در لوله

۱۱-۳ دمای حباب مرطوب

۱۱-۴ رطوبت نسبی جریان هوا

۱۱-۵ آهنگ تبخیر آب

❑ مسائل

۱۱-۱ با استفاده از استدلال فیزیکی، وابستگی ضریب پخش به دما را به‌صورت $T^{\frac{3}{2}}$، مطابق معادله (۱۱-۲)، ثابت کنید. *راهنمایی:* به خاطر آورید که سرعت ملکولی متوسط با $T^{\frac{1}{2}}$ و چگالی گاز کامل به‌طور معکوس با دما متناسب‌اند.

۱۱-۲ ضریب پخش بنزن در هوای جو به‌دمای ۲۵°C را با استفاده از معادلهٔ (۱۱-۲) حساب کنید.

۱۱-۳ هوای خشک در فشار جو و دمای ۲۵°C با سرعت ۱/۵ $\frac{m}{s}$ در عرض صفحه‌ای تخت می‌وزد. صفحه مربعی به ضلع ۳۰ cm است و رویش را فیلم آبی گرفته که در هوا تبخیر می‌شود. جریان گرما از صفحه را به‌صورت تابعی از دمای صفحه از T_w = ۱۵°C تا T_w = ۶۵°C رسم کنید.

۱۱-۴ پوشش روی دماسنج حباب - مرطوبی را در بنزن فرو می‌برند و دماسنج را در معرض جریان هوای خشک قرار می‌دهند. دماسنج دمای ۲۶°C را نشان می‌دهد. دمای هوای جریان آزاد را حساب کنید. فشار بخار بنزن ۱۳/۳ kPa و آنتالپی تبخیر در ۲۶°C برابر ۳۷۷ $\frac{kJ}{kg}$ است.

۱۱-۵ هوای خشک به ۲۵°C و فشار جو در لوله‌ای به قطر ۵ cm با سرعت ۳ $\frac{m}{s}$ جریان‌دارد. دیواره لوله با فیلم آبی پوشیده شده، دمای دیواره ۲۵°C است. غلظت بخار - آب در هوا را در خروج از لوله‌ای به‌طول ۳ m حساب کنید.

۱۱-۶ کاسه روباز به قطر ۱۵ cm و عمق ۷/۵ cm محتوی آب ۲۵°C است و در معرض هوای جو به دمای ۲۵°C و رطوبت نسبی ۵۰٪ قرار دارد. آهنگ تبخیر آب را برحسب گرم بر ساعت حساب کنید.

۱۱-۷ لوله آزمایشی به قطر ۱/۲۵ cm و عمق ۱۵ cm محتوی بنزن به ۲۶°C است و در معرض هوای جو خشک به دمای ۲۶°C قرار دارد. آهنگ تبخیر بنزن را با استفاده از خواص مسأله ۱۱-۴ برحسب گرم بر ساعت حساب کنید.

۱۱-۸ هوای خشک به دمای ۲۵°C و فشار جو روی سطح یخی مربعی به ضلع ۳۰ cm با سرعت ۱/۵ $\frac{m}{s}$ می‌وزد. مقدار رطوبت تبخیر شده را در ساعت به‌دست آورید. فرض کنید بلوک یخ کاملاً عایق‌شده و فقط سطح در معرض جریان هوا عایق نشده است.

۱۱-۹ می‌خواهیم دمای جریان هوا را اندازه‌گیری کنیم ولی محدودهٔ درجه دماسنج موجود کافی نیست. در نتیجه دور آن را قبل از قرار دادن آن در معرض جریان هوا با پوشش مرطوبی می‌پوشانیم. دماسنج ۳۲°C را نشان می‌دهد. دمای واقعی هوا را با فرض خشک بودن دماسنج در فشار جو به‌دست آورید.

۱۱-۱۰ فرض کنید که بتوان بازوی آدمی را مثل استوانه‌ای به قطر ۴ in و طول ۱ ft در نظر گرفت. بازو در معرض هوای خشک محیط به دمای ۱۱۵°F و سرعت باد ۱۰ $\frac{mi}{h}$ قرار گرفته، شار گرمایی تابشی خورشید را به مقدار ۳۵۰ $\frac{Btu}{h.ft^2}$ سطح دید (سطح دید برای استوانه $= Ld$)، دریافت می‌کند. چنان‌چه این بازو عرق کند و آن‌را لایه‌ای آب بپوشاند دمای سطحی بازو را بیابید. از تولید گرمای داخلی بازو صرف‌نظر کنید. فرض کنید ضریب گسیل فیلم آب برابر واحد است.

۱۱-۱۱ صفحه‌ای مربعی به ضلع ۳۰ cm را در تونل باد کم سرعتی قرار داده‌اند؛ سطح آن با لایه‌ای آب پوشیده شده است. هوای خشک در فشار جو و دمای ۴۳°C روی این صفحه با سرعت ۱۲ $\frac{m}{s}$ می‌وزد. دیوارهای محفظه تونل باد به دمای ۱۰°C‌اند. دمای تعادل صفحه را با فرض واحد بودن ضریب گسیل برای فیلم آب، بیابید.

۱۱-۱۲ آهنگ تبخیر را برای سیستم مسأله ۱۱-۱۱ حساب کنید.

۱۱-۱۳ تحلیل مسأله ۱۱-۱۰ را با این فرض اصلاح کنید که تولید گرمای بدن ۱۸۶۰ $\frac{W}{m^2}$ باشد.

۱۱-۱۴ لوله کوچکی به قطر ۶/۴mm و عمق ۱۳ cm محتوی آب است و بالای آن در معرض هوای جو ۱ atm و ۲۰°C و رطوبت نسبی ۵۰٪ است و به قسمت زیر لوله گرما داده می‌شود. آهنگ پخش آب را به‌صورت تابعی از دمای آب از ۲۰ تا ۸۲°C رسم کنید.

۱۱-۱۵ هوای خشک ۲۰°C وارد لوله‌ای به قطر داخلی ۱/۲۵ cm می‌شود که سطح داخلی آن با آب مایع پوشیده شده است. سرعت جریان متوسط ۳ $\frac{m}{s}$ و دمای دیواره لوله ۲۰°C است. آهنگ پخش بخار آب در شرایط ورودی را بیابید. چه‌قدر رطوبت توسط هوا به ازای متر طول لوله جذب می‌شود؟

۱۱-۱۶ هوای خشک ۶۵°C روی صفحه‌ای مربعی به ضلع ۳۰ cm، با سرعت $6\frac{m}{s}$ می‌وزد. صفحه با ماده متخلخل همواری پوشانده شده است و آب ۲۵°C به این ماده تغذیه می‌شود. به‌فرض قسمت زیر صفحه عایق‌شده باشد، مقدار آبی را حساب کنید که باید به ماده داد تا دمای صفحه به ۳۸°C برسد. فرض کنید دمای تابشی محیط ۶۵°C است و سطح متخلخل مثل جسمی سیاه تابش می‌کند.

۱۱-۱۷ هوای خشک به فشار جو روی صفحه تخت عایق و پوشیده با فتیله نازکی می‌وزد که در اتیل الکل فرو برده شده است. دمای صفحه ۲۵°C است. دمای جریان هوا را با این فرض حساب کنید که غلظت الکل در جریان آزاد قابل صرف‌نظر باشد. هم‌چنین آهنگ انتقال جرم الکل را برای صفحه‌ای مربعی به ضلع ۳۰ cm در حالی حساب کنید که سرعت جریان آزاد $7\frac{m}{s}$ باشد.

۱۱-۱۸ معادله کریر Carrier فشار جزئی بخار آب واقعی را برحسب دمای مرطوب و حباب خشک، بیان می‌کند:

$$p_v = p_{gw} - \frac{(p - p_{gw})\,(T_{DB} - T_{WB})}{2800 - T_{WB}}$$

که p_v = فشار جزئی واقعی، $\frac{lb}{in^2}$ abs

p_{gw} = فشار اشباع دمای حباب مرطوب، $\frac{lb}{in^2}$ abs

p = فشار مخلوط کل، $\frac{lb}{in^2}$ abs

T_{DB} = دمای حباب خشک، °F

T_{WB} = دمای حباب مرطوب، °F

هوا در ۱ atm و ۱۰۰°F در عرض دماسنج حباب مرطوبی وزیده، دما به ۷۰°F می‌رسد. رطوبت نسبی جریان هوا را با استفاده از معادله کریر محاسبه و آن را با نتایج حاصل از روش‌های این فصل مقایسه کنید.

۱۱-۱۹ فرض کنید که حباب مرطوب مسأله ۱۱-۱۸ در معرض محیط تابش - سیاه به دمای ۱۰۰°F قرار دارد. دمای تعادل تابش روی دماسنج چیست؟ ضریب گسیل فتیله را واحد فرض کنید.

۱۱-۲۰ نسیم سبکی با سرعت $2/2\frac{m}{s}$ در عرض کاسه تبخیر استاندارد می‌وزد. شرایط جوی دمای ۲۰°C و ۴۰ درصد رطوبت نسبی است. آهنگ تبخیر برای کاسه زمینی را برحسب گرم بر ساعت بر مترمربع حساب کنید. آهنگ تبخیر به ازای سرعت صفر چه‌قدر است؟

۱۱-۲۱ وقتی نسیمی به سرعت $4/5\frac{m}{s}$ در عرض کاسه زمینی استاندارد می‌وزد، آهنگ تبخیر $\frac{g}{s.m^2}$ ۰/۳ است. رطوبت نسبی را وقتی به‌دست آورید که دمای حباب خشک هوا (محیط) ۴۰°C است.

۱۱-۲۲ از فرمول تبخیر کاسه زمینی می‌توان برای محاسبه آهنگ تبخیر از استخرهای شنا استفاده کرد. آهنگ آب تلف‌شده برای استخری در پاسادنای کالیفرنیا که در معرض هوای به دمای ۸۰°F و رطوبت نسبی ۳۰٪ است را با آهنگ آب استخری در فونیکس آریزونا مقایسه کنید که در معرض هوای محیط به دمای ۱۱۰°F و رطوبت نسبی ۵٪ است.

۱۱-۲۳ معادلهٔ ابعادی (۱۱-۳۶) را به معادله‌ای تبدیل کنید که واحدهای متغیرهای آن $E_{lp} = \frac{mm}{روز}$، $\bar{u} = \frac{m}{s}$ و p_s و p_w به پاسکال است.

❑ مراجع

1. Prigogine, I.: "Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes," Charles C Thomas, Publisher, Springfield, Ill., 1955.
2. Groot, S. R. de: "Thermodynamics of Irreversible Processes," North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952.
3. Present, R. D.: "Kinetic Theory of Gases," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
4. Gilliland, E. R.: Diffusion Coefficients in Gaseous Systems, *Ind.Eng. Chem.*, vol. 26, p. 681, 1934.
5. Perry. J. H. (Ed.): "Chemical Engineers' Handbook," 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
6. Jost, W.: "Diffusion in Solids, Liquids and Gases," Academic Press, Inc., New York, 1952.
7. Reid, R. C., and T. K. Sherwood: "The Properties of Gases and Liquids," McGrow-Hill Book Company, New York, 1958.
8. Handbook of Chemistry and Physics," Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio, 1960.
9. Bird, R., W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot: "Transport Phenomena," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
10. Instructions for Climatological Observers, *U. S. Dept. Commerce Weather Bur. Circ. B.*, 10th ed. rev., October 1955.
11. Water-Loss Investigations, vol. 1, *Lake Hefner Studies Tech. Rep., U. S. Geol. Surv. Circ.* 229, 1952.
12. Nordenson, T. J., and D. R. Baker: Comparative Evaluation of Evaporation Instruments, *J. Geophys. Rec.*, vol. 67, no. 2, p. 671, February 1962.
13. Kohler, M. A., T. J. Nordenson, and W. E. Fox: Evaporation from Pans and Lakes, *U. S. Dept. Commerce Weather Bur. Res. Pap.* 38, May 1955.
14. Webb, R. L.: "Standardized Nomenclature for Mass Transfer Processes," *ASHRAE Trans.*, vol. 97, pt. 2, pp. 114-118, 1990.

پیوست

جداول

☑ **جدول A-۱** تابع خطا

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	erf $\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	erf $\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	erf $\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
۰/۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۷۶	۰/۷۱۷۵۴	۱/۵۲	۰/۹۶۸۴۱
۰/۰۲	۰/۰۲۲۵۶	۰/۷۸	۰/۷۳۰۰۱	۱/۵۴	۰/۹۷۰۵۹
۰/۰۴	۰/۰۴۵۱۱	۰/۸۰	۰/۷۴۲۱۰	۱/۵۶	۰/۹۷۲۶۳
۰/۰۶	۰/۰۶۷۶۲	۰/۸۲	۰/۷۵۳۸۱	۱/۵۸	۰/۹۷۴۵۵
۰/۰۸	۰/۰۹۰۰۸	۰/۸۴	۰/۷۶۵۱۴	۱/۶۰	۰/۹۷۶۳۶
۰/۱۰	۰/۱۱۲۴۶	۰/۸۶	۰/۷۷۶۱۰	۱/۶۲	۰/۹۷۸۰۴
۰/۱۲	۰/۱۳۴۷۶	۰/۸۸	۰/۷۸۶۶۹	۱/۶۴	۰/۹۷۹۶۲
۰/۱۴	۰/۱۵۶۹۵	۰/۹۰	۰/۷۹۶۹۱	۱/۶۶	۰/۹۸۱۱۰
۰/۱۶	۰/۱۷۹۰۱	۰/۹۲	۰/۸۰۶۷۷	۱/۶۸	۰/۹۸۲۴۹
۰/۱۸	۰/۲۰۰۹۴	۰/۹۴	۰/۸۱۶۲۷	۱/۷۰	۰/۹۸۳۷۹
۰/۲۰	۰/۲۲۲۷۰	۰/۹۶	۰/۸۲۵۴۲	۱/۷۲	۰/۹۸۵۰۰
۰/۲۲	۰/۲۴۴۳۰	۰/۹۸	۰/۸۳۴۲۳	۱/۷۴	۰/۹۸۶۱۳
۰/۲۴	۰/۲۶۵۷۰	۱/۰۰	۰/۸۴۲۷۰	۱/۷۶	۰/۹۸۷۱۹
۰/۲۶	۰/۲۸۶۹۰	۱/۰۲	۰/۸۵۰۸۴	۱/۷۸	۰/۹۸۸۱۷
۰/۲۸	۰/۳۰۷۸۸	۱/۰۴	۰/۸۵۸۶۵	۱/۸۰	۰/۹۸۹۰۹
۰/۳۰	۰/۳۲۸۶۳	۱/۰۶	۰/۸۶۶۱۴	۱/۸۲	۰/۹۸۹۹۴
۰/۳۲	۰/۳۴۹۱۳	۱/۰۸	۰/۸۷۳۳۳	۱/۸۴	۰/۹۹۰۷۴
۰/۳۴	۰/۳۶۹۳۶	۱/۱۰	۰/۸۸۰۲۰	۱/۸۶	۰/۹۹۱۴۷
۰/۳۶	۰/۳۸۹۳۳	۱/۱۲	۰/۸۸۰۷۹	۱/۸۸	۰/۹۹۲۱۶
۰/۳۸	۰/۴۰۹۰۱	۱/۱۴	۰/۸۹۳۰۸	۱/۹۰	۰/۹۹۲۷۹
۰/۴۰	۰/۴۲۸۳۹	۱/۱۶	۰/۸۹۹۱۰	۱/۹۲	۰/۹۹۳۳۸
۰/۴۲	۰/۴۴۷۴۹	۱/۱۸	۰/۹۰۴۸۴	۱/۹۴	۰/۹۹۳۹۲
۰/۴۴	۰/۴۶۶۲۲	۱/۲۰	۰/۹۱۰۳۱	۱/۹۶	۰/۹۹۴۴۳
۰/۴۶	۰/۴۸۴۶۶	۱/۲۲	۰/۹۱۵۵۳	۱/۹۸	۰/۹۹۴۸۹
۰/۴۸	۰/۵۰۲۷۵	۱/۲۴	۰/۹۲۰۵۰	۲/۰۰	۰/۹۹۵۳۲۲
۰/۵۰	۰/۵۲۰۵۰	۱/۲۶	۰/۹۲۵۲۴	۲/۱۰	۰/۹۹۷۰۲۰
۰/۵۲	۰/۵۳۷۹۰	۱/۲۸	۰/۹۲۹۷۳	۲/۲۰	۰/۹۹۸۱۳۷
۰/۵۴	۰/۵۵۴۹۴	۱/۳۰	۰/۹۳۴۰۱	۲/۳۰	۰/۹۹۸۸۵۷
۰/۵۶	۰/۵۷۱۶۲	۱/۳۲	۰/۹۳۸۰۶	۲/۴۰	۰/۹۹۹۳۱۱
۰/۵۸	۰/۵۸۷۹۲	۱/۳۴	۰/۹۴۱۹۱	۲/۵۰	۰/۹۹۹۵۹۳
۰/۶۰	۰/۶۰۳۸۶	۱/۳۶	۰/۹۴۵۵۶	۲/۶۰	۰/۹۹۹۷۶۴
۰/۶۲	۰/۶۱۹۴۱	۱/۳۸	۰/۹۴۹۰۲	۲/۷۰	۰/۹۹۹۸۶۶
۰/۶۴	۰/۶۳۴۵۹	۱/۴۰	۰/۹۵۲۲۸	۲/۸۰	۰/۹۹۹۹۲۵
۰/۶۶	۰/۶۴۹۳۸	۱/۴۲	۰/۹۵۵۳۸	۲/۹۰	۰/۹۹۹۹۵۹
۰/۶۸	۰/۶۶۲۷۸	۱/۴۴	۰/۹۵۸۳۰	۳/۰۰	۰/۹۹۹۹۷۸
۰/۷۰	۰/۶۷۷۸۰	۱/۴۶	۰/۹۶۱۰۵	۳/۲۰	۰/۹۹۹۹۹۴
۰/۷۲	۰/۶۹۱۴۳	۱/۴۸	۰/۹۶۳۶۵	۳/۴۰	۰/۹۹۹۹۹۸
۰/۷۴	۰/۷۰۴۶۸	۱/۵۰	۰/۹۶۶۱۰	۳/۶۰	۱/۰۰۰۰۰۰

☑جدول A–۲ مقادیر خواص فیزیکی فلزات

فلز	خواص در ۲۰°C				$\alpha \times 10^5$	ضریب هدایت گرمایی $k, \frac{W}{m.°C}$										
	$\rho, \frac{kg}{m^3}$	$c_p, \frac{kJ}{kg.°C}$	$k, \frac{W}{m.°C}$	$\alpha \times 10^5 \frac{m^2}{s}$												
					−۱۰۰°C −۱۴۸°F	۰°C ۳۲°F	۱۰۰°C ۲۱۲°F	۲۰۰°C ۳۹۲°F	۳۰۰°C ۵۷۲°F	۴۰۰°C ۷۵۲°F	۶۰۰°C ۱۱۱۲°F	۸۰۰°C ۱۴۷۲°F	۱۰۰۰°C ۱۸۳۲°F	۱۲۰۰°C ۲۱۹۲°F	۱۴۰۰°C ۲۵۵۲°F	۱۶۰۰°C ۲۹۱۲°F
آلومینیم:																
خالص	۲,۷۰۷	۰/۸۹۶	۲۰۴	۸/۴۱۸	۲۱۵	۲۰۲	۲۰۶	۲۱۸	۲۲۸	۲۴۹						
(دورالومین) Al-Cu					۵۷۲°F	۶۳۲°F	۱۰۰°C ۲۱۲°F	۲۰۰°C ۳۹۲°F	۳۰۰°C ۵۷۲°F	۴۰۰°C ۷۵۲°F	۶۰۰°C ۱۱۱۲°F	۸۰۰°C ۱۴۷۲°F	۱۰۰۰°C ۱۸۳۲°F	۱۲۰۰°C ۲۱۹۲°F	۱۴۰۰°C ۲۵۵۲°F	۱۶۰۰°C ۲۹۱۲°F
۹۴-٪۹۶Al,۳-٪۵ Cu,	۲,۷۸۷	۰/۸۸۳	۱۶۴	۶/۶۷۶	۱۲۶	۱۵۹	۱۷۴	۱۸۲	۱۹۴							
رگه‌های Mg					۴۲۰°F	۴۸۰°F	۶۰۰°F	۷۰۰°F	۸۰۰°F							
Al-Si (سیلومین،																
حاوی مس) Al, ٪۸۶/۵	۲,۶۵۹	۰/۸۶۷	۱۳۷	۵/۹۳۳	۱۱۹	۱۳۷	۱۴۴	۱۵۲	۱۶۱							
٪۱ Cu					۲۳۰°F	۴۰۰°F	۶۰۰°F	۸۰۰°F	۱۰۰۰°F							
Al-Si (آلوسیل)																
٪۸۰–٪۷۸ Al،	۲,۶۲۷	۰/۸۵۴	۱۶۱	۷/۱۷۲	۱۴۴	۱۵۷	۱۶۸	۱۷۵	۱۷۸							
٪۲۲–۲۰ Si					۷۲°F	۱۰۰°F	۱۵۰°F	۲۰۰°F	۲۵۰°F							
٪۹۷ Al, Al-Mg-Si																
٪۱ Mg,٪۱ Si,	۲,۷۰۷	۰/۸۹۲	۱۷۷	۷/۳۱۱	۳۶/۹	۳۵/۱	۳۳/۴	۳۱/۵	۲۹/۷							
٪۱ Mn	۱۱,۳۷۳	۰/۱۳۰	۳۵	۲/۳۴۳												
سرب																
آهن:	۷,۸۹۷	۰/۴۵۲	۷۳	۱/۶۲۶	۸۷	۷۳	۵۹	۵۲	۴۸	۴۵	۴۰	۳۶	۳۳	۳۱	۲۹	۲۷
خالص	۷,۸۴۹	۰/۴۶	۵۹													
آهن‌کارشده، ٪۰/۵ C																
فولاد																
(C max ≈ ٪۱/۵):																
فولاد کربنی																

☑جدول A–۲ مقادیر خواص فیزیکی فلزات (ادامه)

فلز	خواص در ۲۰°C				$\alpha \times 10^5$	ضریب هدایت گرمایی $k, \frac{W}{m.°C}$										
	$\rho, \frac{kg}{m^3}$	$c_p, \frac{kJ}{kg.°C}$	$k, \frac{W}{m.°C}$	$\alpha \times 10^5 \frac{m^2}{s}$												
					−۱۰۰°C −۱۴۸°F	۰°C ۳۲°F	۱۰۰°C ۲۱۲°F	۲۰۰°C ۳۹۲°F	۳۰۰°C ۵۷۲°F	۴۰۰°C ۷۵۲°F	۶۰۰°C ۱۱۱۲°F	۸۰۰°C ۱۴۷۲°F	۱۰۰۰°C ۱۸۳۲°F	۱۲۰۰°C ۲۱۹۲°F	۱۴۰۰°C ۲۵۵۲°F	۱۶۰۰°C ۲۹۱۲°F
فولاد نیکلی																
Ni ≈ ٪۰	۷,۸۹۷	۰/۴۵۲	۷۳	۲/۰۲۶	۸۷	۷۳	۶۲	۵۲	۴۸	۴۵	۴۰	۳۶	۳۳	۳۱	۲۹	۲۷
٪۲۰	۷,۹۳۳	۰/۴۶	۱۹	۰/۵۲۶												
٪۴۰	۸,۱۶۹	۰/۴۶	۱۰	۰/۲۷۹												
٪۸۰	۸,۶۱۸	۰/۴۶	۳۵	۰/۸۷۲												
اینوار ٪۳۶ Ni	۸,۱۳۷	۰/۴۶	۱۰/۷	۰/۲۸۶												
فولاد کرمی																
Cr = ٪۰	۷,۸۹۷	۰/۴۵۲	۷۳	۲/۰۲۶	۸۷	۷۳	۶۲	۵۲	۴۸	۴۵	۴۰	۳۶	۳۳	۳۱	۲۹	۲۷
٪۱	۷,۸۶۵	۰/۴۶	۶۱	۱/۶۶۵												
٪۵	۷,۸۳۳	۰/۴۶	۴۰	۱/۱۱۰												
٪۲۰	۷,۶۸۹	۰/۴۶	۲۲	۰/۶۳۵												
Cr-Ni (کرم–نیکل):																
٪۱۰ Ni, ٪۱۵ Cr	۷,۸۶۵	۰/۴۶	۱۹	۰/۵۲۷												
٪۱۸ Cr, ٪۸ Ni																
(V ۲A)	۷,۸۱۷	۰/۴۶	۱۶/۳	۰/۴۴۴	۱۶/۳											
٪۲۰ Cr, ٪۱۵ Ni	۷,۸۳۳	۰/۴۶	۱۵/۱	۰/۴۱۵												

جدول A–۲ مقادیر خواص فیزیکی فلزات (ادامه)

فلز	خواص در ۲۰°C						
	ρ, $\frac{kg}{m^3}$	c_p, $\frac{kJ}{kg.°C}$	k, $\frac{W}{m.°C}$	$\alpha \times 10^5$ $\frac{m^2}{s}$	-۱۰۰°C -۱۴۸°F	°C ۳۵°F	
کنستانتن ٪۶۰ Cu ، ٪۴۰ Ni	۸,۹۲۲	۰/۴۱۰	۲۲/۷	۰/۶۱۲	۲۱		
منیزیم:							
خالص	۱,۷۴۶	۱/۰۱۳	۱۷۱	۹/۷۰۸	۱۷۸	۱۷۱	
Mg-Al (الکترولیتی)							
٪۸ Al ، ٪۶-٪۳ Zn ، ٪۱-٪۰	۱,۸۱۰	۱/۰۰	۶۶	۳/۶۰۵		۵۲	
مولیبدن	۱۰,۲۲۰	۰/۲۵۱	۱۲۳	۴/۷۹۰	۱۳۸	۱۲۵	
نیکل:							
خالص (٪۹۹/۹)	۸,۹۰۶	۰/۴۴۵۹	۹۰	۲/۲۶۶	۱۰۴	۹۳	
٪۱۰ Cr ، ٪۹۰ Ni ، Ni-Cr	۸,۶۶۶	۰/۴۴۴	۱۷	۰/۴۴۴		۱۷/۱	
٪۲۰ Cr ، ٪۸۰ Ni	۸,۳۱۴	۰/۴۴۴	۱۲/۶	۰/۳۴۳		۱۲/۳	
نقره:							
صددرصد	۱۰,۵۲۴	۰/۲۳۴۰	۴۱۹	۱۷/۰۰۴	۴۱۹	۴۱۷	
خالص (٪۹۹/۹)	۱۰,۵۲۵	۰/۲۳۴۰	۴۰۷	۱۶/۵۶۳	۴۱۹	۴۱۰	
قلع، خالص	۷,۳۰۴	۰/۲۲۶۵	۶۴	۳/۸۸۴	۷۴	۶۵/۹	
تنگستن	۱۹,۳۵۰	۰/۱۳۴۴	۱۶۳	۶/۲۷۱		۱۶۶	
روی، خالص	۷,۱۴۴	۰/۳۸۴۳	۱۱۲/۲	۴/۱۰۶	۱۱۴	۱۱۲	

ضریب هدایت گرمایی k, $\frac{W}{m.°C}$

فلز	۱۰۰°C ۲۱۲°F	۲۰۰°C ۳۹۲°F	۳۰۰°C ۵۷۲°F	۴۰۰°C ۷۵۲°F	۶۰۰°C ۱۱۱۲°F	۸۰۰°C ۱۴۷۲°F	۱۰۰۰°C ۱۸۳۲°F	۱۲۰۰°C ۲۱۹۲°F
٪۲۵ Cr ، ٪۲۰ Ni	۲۲/۲	۲۶						
فولاد تنگستنی								
W = ٪۰	۱۶۸	۱۶۳	۱۵۷					
٪۱	۶۲	۷۴	۸۳	۵۹				
٪۵	۱۱۸	۱۱۴	۱۱۱	۱۰۹	۱۰۶	۱۰۲	۹۹	۹۲
٪۱۰	۸۳	۷۳	۶۴	۵۹				
مس:								
خالص	۴۱۵	۴۱۲		۳۶۰				
آلومینیم برنز	۴۱۵	۳۷۴	۳۶۲					
٪۹۵ Cu ، ٪۵ Al	۵۹	۵۷						
برنز ٪۷۵ Cu	۱۵۱	۱۴۲	۱۳۳	۱۲۶	۱۱۲	۷۶		
٪۲۵ Sn	۱۰۹	۱۰۶	۱۰۰	۹۳				
برنج قرمز Cu ٪۸۵ ،								
٪۹ Sn ، ٪۶ Zn	۱۸/۹	۲۰/۹	۲۲/۸	۲۴/۶				
برنج Cu ٪۷۰ ،	۱۳/۸	۱۵/۶	۱۷/۱	۱۸/۰	۲۲/۵			
٪۳۰ Zn								
نقره آلمانی Cu ٪۶۲ ،								
٪۲۲ Zn ، ٪۱۵ Ni	۱۹/۲	۰/۷۳۳						

☑**جدول A–۳** خواص فیزیکی غیر فلزات

جنس	دما °C	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	ρ, $\frac{kg}{m^3}$	c, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	$\alpha \times 10^7$, $\frac{m^2}{s}$
مصالح ساختمانی و مقاوم در مقابل گرما					
اکسید آلومینیم، یاقوت کبود	۳۰	۴۶	۳۹۷۰	۰/۷۶	۱۵۰
اکسید آلومینیم، چند بلوری	۳۰	۳۶	۳۹۷۰	۰/۷۶	۱۲۰
آسفالت	۲۰-۵۵	۰/۷۴-۰/۷۶			
آجر:					
آجر ساختمانی، معمولی	۲۰	۰/۶۹	۱۶۰۰	۰/۸۴	۵/۲
نما		۱/۳۲	۲۰۰۰		
آجر کاربوراندوم	۶۰۰	۱۸/۵			
	۱۴۰۰	۱۱/۱			
آجر کُرُمی	۲۰۰	۲/۳۲	۳۰۰۰	۰/۸۴	۹/۲
	۵۵۰	۲/۴۷			۹/۸
	۹۰۰	۱/۹۹			۷/۹
خاک‌دیاتومه، قالب‌گیری و پخته شده	۲۰۰	۰/۲۴			
	۸۷۰	۰/۳۱			
آجرنسوز سوخته ۲۴۲۶°F	۵۰۰	۱/۰۴	۲۰۰۰	۰/۹۶	۵/۴
	۸۰۰	۱/۰۷			
	۱۱۰۰	۱/۰۹			
سوخته ۲۶۴۲°F	۵۰۰	۱/۲۸	۲۳۰۰	۰/۹۶	۵/۸
	۸۰۰	۱/۳۷			
	۱۱۰۰	۱/۴۰			
میسوری	۲۰۰	۱/۰۰	۲۶۰۰	۰/۹۶	۴/۰
	۶۰۰	۱/۴۷			
	۱۴۰۰	۱/۷۷			
منیزیتی	۲۰۰	۳/۸۱		۱/۱۳	
	۶۵۰	۲/۷۷			
	۱۲۰۰	۱/۹۰			
سیمان، پرتلند		۰/۲۹	۱۵۰۰		
ساروج	۲۳	۱/۱۶			
زغال، آنتراسیت	۳۰	۰/۲۶	۱۳۰۰	۱/۲۵	۱/۶
بتن، خاکستر	۲۳	۰/۷۶			
سنگ، مخلوط ۱-۲-۴	۲۰	۱/۳۷	۱۹۰۰-۲۳۰۰	۰/۸۸	۸/۲-۶/۸

☑**جدول A–۳** خواص فیزیکی غیر فلزات (ادامه)

جنس	دما °C	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	ρ, $\frac{kg}{m^3}$	c, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	$\alpha \times 10^7$, $\frac{m^2}{s}$
مصالح ساختمانی و مقاوم در مقابل گرما					
شیشه پنجره	۲۰	۰/۷۸ (avg)	۲۷۰۰	۰/۸۴	۳/۴
کروسیلیکات	۳۰-۷۵	۱/۰۹	۲۲۰۰		
گرافیت، پیرولیتی موازی لایه‌ها	۳۰	۱۹۰۰	۲۲۰۰	۰/۷۱	۱۲۲۰۰
عمود بر لایه‌ها	۳۰	۵/۶	۲۲۰۰	۰/۷۱	۳۶
نئوپان، فشردگی کم	۳۰	۰/۰۷۹	۵۹۰	۱/۳	۱/۰
فشردگی زیاد	۳۰	۰/۱۷	۱۰۰۰	۱/۳	۱/۳
اندود، گچ	۲۰	۰/۴۸	۱۴۴۰	۰/۸۴	۴/۰
توفال فلز	۲۰	۰/۴۷			
توفال چوب	۲۰	۰/۲۸			
پلی اتیلن	۳۰	۰/۳۳	۹۶۰	۲/۱	۱/۶۴
پلی پروپیلن	۳۰	۰/۱۶	۱۱۵۰	۱/۹	۰/۷۳
پلی وینیل کلراید	۳۰	۰/۰۹	۱۷۰۰	۱/۱	۰/۴۸
لاستیک، سخت	۳۰	۰/۱۵	۱۲۰۰	۲/۰	۰/۶۲
کربور سیلیس	۳۰	۴۹۰	۳۱۵۰	۰/۶۸	۲۲۹۰
سنگ: گرانیت		۱/۷۳-۳/۹۸	۲۶۴۰	۰/۸۲	۸-۱۸
سنگ آهک	۱۰۰-۳۰۰	۱/۲۶-۱/۳۳	۲۵۰۰	۰/۹۰	۵/۶-۵/۹
مرمر		۲/۰۷-۲/۹۴	۲۵۰۰-۲۷۰۰	۰/۸۰	۱۰-۱۳/۶
سنگ‌ریزه	۴۰	۱/۸۳	۲۱۶۰-۲۳۰۰	۰/۷۱	۱۱/۲-۱۱/۹
تفلون	۳۰	۰/۳۵	۲۲۰۰	۱/۰۵	۱/۵
دی اکسید تیتانیم	۳۰	۸/۴	۴۱۵۰	۰/۷	۲۹
چوب (در عرض ذرات): بالزا $8/8 \frac{lb}{ft^3}$	۳۰	۰/۰۵۵	۱۴۰		
سرو	۳۰	۰/۰۹۷	۴۶۰		
صنوبر	۲۳	۰/۱۱	۴۲۰	۲/۷۲	۰/۹۶
افرا یا بلوط	۳۰	۰/۱۶۶	۵۴۰	۲/۴	۱/۲۸
کاج زرد	۲۳	۰/۱۴۷	۶۴۰	۲/۸	۰/۸۲
کاج سفید	۳۰	۰/۱۱۲	۴۳۰		
ورق آکوستیک	۳۰	۰/۰۶	۲۹۰	۱/۳	۱/۶
آزبست: شل‌بسته	-۴۵	۰/۱۴۹			
	۰	۰/۱۵۴	۴۷۰-۵۷۰	۰/۸۱۶	۳/۳-۴
	۱۰۰	۰/۱۶۱			

☑جدول $A-۳$ خواص فیزیکی غیر فلزات (ادامه)

جنس	دما °C	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	ρ, $\frac{kg}{m^۳}$	c, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	$\alpha \times ۱۰^۷$, $\frac{m^۲}{s}$
مصالح ساختمانی و مقاوم در مقابل گرما					
تخته‌های آزبست-سیمان	۲۰	۰/۷۴			
ورق	۵۱	۰/۱۶۶			
نمد، ۴۰ لایه در اینچ	۳۸	۰/۰۵۷			
	۱۵۰	۰/۰۶۹			
	۲۶۰	۰/۰۸۳			
۲۰ لایه در اینچ	۳۸	۰/۰۷۸			
	۱۵۰	۰/۰۹۵			
	۲۶۰	۰/۱۱۲			
موج‌دار، ۴ لایه در اینچ	۳۸	۰/۰۸۷			
	۹۳	۰/۱۰۰			
	۱۵۰	۰/۱۱۹			
آزبست-سیمان	–	۲/۰۸			
چوب بلسام، ۲/۲ $\frac{lb}{ft^۳}$	۳۲	۰/۰۴	۳۵		
مقوا، موج‌دار	–	۰/۰۶۴			
سلوتکس	۳۲	۰/۰۴۸			
ورق چوب‌پنبه ۱۰ $\frac{lb}{ft^۳}$	۳۰	۰/۰۴۳	۱۶۰		
چوب پنبه، دوباره دانه شده	۳۲	۰/۰۴۵	۱۲۰-۴۵	۱/۸۸	۵/۳-۲
آسیا شده	۳۲	۰/۰۴۳	۱۵۰		
الماس، نوع *IIa*،					
عایق	۳۰	۲۳۰۰	۳۵۰۰	۰/۵۰۹	۱۲۹۰۰
خاک دیاتومه					
(Sil-o-cel)	۰	۰/۰۶۱	۳۲۰		
نمد، مو	۳۰	۰/۰۳۶	۲۰۰-۱۳۰		
پشم	۳۰	۰/۰۵۲	۳۳۰		
فیبر، ورق عایق‌کاری	۲۰	۰/۰۴۸	۲۴۰		
پشم شیشه، ۱/۵ $\frac{lb}{ft^۳}$	۲۳	۰/۰۳۸	۲۴	۰/۷	۲۲/۶
الیاف شیشه،					
روکش کانال	۳۰	۰/۰۳۸	۳۲	۰/۸۴	۱۴/۱
الیاف شیشه،					
شل دمیده	۳۰	۰/۰۴۳	۱۶	۰/۸۴	۳۲
یخ	۰	۲/۲۲	۹۱۰	۱/۹۳	۱۲/۶
اینسولکس،خشک	۳۲	۰/۰۶۴			
		۰/۱۴۴			
کاپوک *(kapok)*	۳۰	۰/۰۳۵			
منیزی، ۸۵٪	۳۸	۰/۰۶۷	۲۷۰		

☑جدول $A-۳$ خواص فیزیکی غیر فلزات (ادامه)

جنس	دما °C	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	ρ, $\frac{kg}{m^۳}$	c, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	$\alpha \times ۱۰^۷$, $\frac{m^۲}{s}$
مصالح ساختمانی و مقاوم در مقابل گرما					
	۹۳	۰/۰۷۱			
	۱۵۰	۰/۰۷۴			
	۲۰۴	۰/۰۸۰			
پشم سنگ، ۱۰ $\frac{lb}{ft^۳}$	۳۲	۰/۰۴۰	۱۶۰		
شل بسته	۱۵۰	۰/۰۶۷	۶۴		
	۲۶۰	۰/۰۸۷			
خاک اره	۲۳	۰/۰۵۹			
ایروژل سیلیسی	۳۲	۰/۰۲۴	۱۴۰		
استایروفوم	۳۲	۰/۰۳۳			
تراشه‌های چوب	۲۳	۰/۰۵۹			

☑جدول $A-۴$ خواص فیزیکی مایعات اشباع

T, °C	ρ, $\frac{kg}{m^3}$	c_p, $\frac{kJ}{kg.°C}$	ν, $\frac{m^2}{s}$	k, $\frac{W}{m.°C}$	α, $\frac{m^2}{s}$	Pr	β, K^{-1}
آمونیاک, NH_3							
-۵۰	۷۰۳/۶۹	۴/۴۶۳	۰/۴۳۵×۱۰$^{-6}$	۰/۵۴۷	۱/۷۴۲×۱۰$^{-7}$	۲/۶۰	
-۴۰	۶۹۱/۶۸	۴/۴۶۷	۰/۴۰۶	۰/۵۴۷	۱/۷۷۵	۲/۲۸	
-۳۰	۶۷۹/۳۴	۴/۴۷۶	۰/۳۸۷	۰/۵۴۹	۱/۸۰۱	۲/۱۵	
-۲۰	۶۶۶/۶۹	۴/۵۰۹	۰/۳۸۱	۰/۵۴۷	۱/۸۱۹	۲/۰۹	
-۱۰	۶۵۳/۵۵	۴/۵۶۴	۰/۳۷۸	۰/۵۴۳	۱/۸۲۵	۲/۰۷	
۰	۶۴۰/۱۰۰	۴/۶۳۵	۰/۳۷۳	۰/۵۴۰	۱/۸۱۹	۲/۰۵	
۱۰	۶۲۶/۱۶	۴/۷۱۴	۰/۳۶۸	۰/۵۳۱	۱/۸۰۱	۲/۰۴	
۲۰	۶۱۱/۷۵	۴/۷۹۸	۰/۳۵۹	۰/۵۲۱	۱/۷۷۵	۲/۰۲	۲/۴۵×۱۰$^{-3}$
۳۰	۵۹۶/۳۷	۴/۸۹۰	۰/۳۴۹	۰/۵۰۷	۱/۷۴۲	۲/۰۱	
۴۰	۵۸۰/۹۹	۴/۹۹۹	۰/۳۴۰	۰/۴۹۳	۱/۷۰۱	۲/۰۰	
۵۰	۵۶۴/۳۳	۵/۱۱۶	۰/۳۳۰	۰/۴۷۶	۱/۶۵۴	۱/۹۹	
گاز کربنیک, Co_2							
-۵۰	۱,۱۵۶/۳۴	۱/۸۴	۰/۱۱۹×۱۰$^{-6}$	۰/۰۸۵۵	۰/۴۰۲۱×۱۰$^{-7}$	۲/۹۶	
-۴۰	۱,۱۱۷/۷۷	۱/۸۸	۰/۱۱۸	۰/۱۰۱۱	۰/۴۸۱۰	۲/۴۶	
-۳۰	۱,۰۷۶/۷۶	۱/۹۷	۰/۱۱۷	۰/۱۱۱۶	۰/۵۲۷۲	۲/۲۲	
-۲۰	۱,۰۳۲/۳۹	۲/۰۵	۰/۱۱۵	۰/۱۱۵۱	۰/۵۴۴۵	۲/۱۲	
-۱۰	۹۸۳/۳۸	۲/۱۸۴	۰/۱۱۳	۰/۱۰۹۹	۰/۵۱۳۳	۲/۲۰	
۰	۹۲۶/۹۹	۲/۴۷	۰/۱۰۸	۰/۱۰۴۵	۰/۴۵۷۸	۲/۳۸	
۱۰	۸۶۰/۰۳	۳/۱۴	۰/۱۰۱	۰/۰۹۷۱	۰/۳۶۰۸	۲/۸۰	
۲۰	۷۷۲/۵۷	۵/۰	۰/۰۹۱	۰/۰۸۷۲	۰/۲۲۱۹	۴/۱۰	۱۴/۰۰×۱۰$^{-4}$
۳۰	۵۹۷/۸۱	۳۶/۴	۰/۰۸۰	۰/۰۷۰۳	۰/۰۲۷۹	۲۸/۷	
گاز سولفورو, So_2							
-۵۰	۱,۵۶۰/۸۴	۱/۳۵۹۵	۰/۴۸۴×۱۰$^{-6}$	۰/۲۴۲	۱/۱۴۱×۱۰$^{-7}$	۴/۲۴	
-۴۰	۱,۵۳۶/۸۱	۱/۳۶۰۷	۰/۴۲۴	۰/۲۳۵	۱/۱۳۰	۳/۷۴	
-۳۰	۱,۵۲۰/۶۴	۱/۳۶۱۶	۰/۳۷۱	۰/۲۳۰	۱/۱۱۷	۳/۳۱	
-۲۰	۱,۴۸۸/۶۰	۱/۳۶۲۴	۰/۳۲۴	۰/۲۲۵	۱/۱۰۷	۲/۹۳	
-۱۰	۱,۴۶۳/۶۱	۱/۳۶۲۸	۰/۲۸۸	۰/۲۱۸	۱/۰۹۷	۲/۶۲	
۰	۱,۴۳۸/۴۶	۱/۳۶۳۶	۰/۲۵۷	۰/۲۱۱	۱/۰۸۱	۲/۳۸	
۱۰	۱,۴۱۲/۵۱	۱/۳۶۴۵	۰/۲۳۲	۰/۲۰۴	۱/۰۶۶	۲/۱۸	
۲۰	۱,۳۸۶/۴۰	۱/۳۶۵۳	۰/۲۱۰	۰/۱۹۹	۱/۰۵۰	۲/۰۰	۱/۹۴×۱۰$^{-3}$
۳۰	۱/۳۵۹/۳۳	۱/۳۶۶۲	۰/۱۹۰	۰/۱۹۲	۱/۰۳۵	۱/۸۳	
۴۰	۱,۳۲۹/۲۲	۱/۳۶۷۴	۰/۱۷۳	۰/۱۸۵	۱/۰۱۹	۱/۷۰	
۵۰	۱,۲۹۹/۱۰	۱/۳۶۸۳	۰/۱۶۲	۰/۱۷۷	۰/۹۹۹	۱/۶۱	

☑جدول $A-۴$ خواص فیزیکی مایعات اشباع (ادامه)

T, °C	ρ, $\frac{kg}{m^3}$	c_p, $\frac{kJ}{kg.°C}$	ν, $\frac{m^2}{s}$	k, $\frac{W}{m.°C}$	α, $\frac{m^2}{s}$	Pr	β, K^{-1}
دیکلرو دیفلوئورومتان (فریون ۱۲), CCl_2F_2							
-۵۰	۱,۵۴۶/۷۵	۰/۸۷۵۰	۰/۳۱۰×۱۰$^{-6}$	۰/۰۶۷	۰/۵۰۱×۱۰$^{-7}$	۶/۲	۲/۶۳×۱۰$^{-3}$
-۴۰	۱,۵۱۸/۷۱	۰/۸۸۴۷	۰/۲۷۹	۰/۰۶۹	۰/۵۱۴	۵/۴	
-۳۰	۱,۴۸۹/۵۶	۰/۸۹۵۶	۰/۲۵۳	۰/۰۶۹	۰/۵۲۶	۴/۸	
-۲۰	۱,۴۶۰/۵۷	۰/۹۰۷۳	۰/۲۳۵	۰/۰۷۱	۰/۵۳۹	۴/۴	
-۱۰	۱,۴۲۹/۴۹	۰/۹۲۰۳	۰/۲۲۱	۰/۰۷۳	۰/۵۵۰	۴/۰	
۰	۱,۳۹۷/۴۵	۰/۹۳۴۵	۰/۲۱۴×۱۰$^{-6}$	۰/۰۷۳	۰/۵۵۷×۱۰$^{-7}$	۳/۸	
۱۰	۱,۳۶۴/۳۰	۰/۹۴۹۶	۰/۲۰۳	۰/۰۷۳	۰/۵۶۰	۳/۶	
۲۰	۱,۳۳۰/۱۸	۰/۹۶۵۹	۰/۱۹۸	۰/۰۷۳	۰/۵۶۰	۳/۵	
۳۰	۱,۲۹۵/۱۰	۰/۹۸۳۵	۰/۱۹۴	۰/۰۷۱	۰/۵۶۰	۳/۵	
۴۰	۱,۲۵۷/۱۳	۱/۰۰۱۹	۰/۱۹۱	۰/۰۶۹	۰/۵۵۵	۳/۵	
۵۰	۱,۲۱۵/۹۶	۱/۰۲۱۶	۰/۱۹۰	۰/۰۶۷	۰/۵۴۵	۳/۵	
گلیسرین, $C_3H_5(OH)_3$							
۰	۱,۲۷۶/۰۳	۲/۲۶۱	۰/۰۰۸۳۱	۰/۲۸۲	۰/۹۸۳×۱۰$^{-7}$	۸۴/۷×۱۰^3	۰/۵۰×۱۰$^{-3}$
۱۰	۱,۲۷۰/۱۱	۲/۳۱۹	۰/۰۰۳۰۰	۰/۲۸۴	۰/۹۶۵	۳۱/۰	
۲۰	۱,۲۶۴/۰۲	۲/۳۸۶	۰/۰۰۱۱۸	۰/۲۸۶	۰/۹۴۷	۱۲/۵	
۳۰	۱,۲۵۸/۰۹	۲/۴۴۵	۰/۰۰۰۵۰	۰/۲۸۶	۰/۹۲۹	۵/۳۸	
۴۰	۱,۲۵۲/۰۱	۲/۵۱۲	۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۲۸۶	۰/۹۱۴	۲/۴۵	
۵۰	۱,۲۴۴/۹۶	۲/۵۸۳	۰/۰۰۰۱۵	۰/۲۸۷	۰/۸۹۳	۱/۶۳	
اتیلن گلیکول, $C_2H_4(OH)_2$							
۰	۱,۱۳۰/۷۵	۲/۲۹۴	۵۷/۵۳×۱۰$^{-6}$	۰/۲۴۲	۰/۹۳۴×۱۰$^{-7}$	۶۱۵	۰/۶۵×۱۰$^{-3}$
۲۰	۱,۱۱۶/۶۵	۲/۳۸۲	۱۹/۱۸	۰/۲۴۹	۰/۹۳۹	۲۰۴	
۴۰	۱,۱۰۱/۴۳	۲/۴۷۴	۸/۶۹	۰/۲۵۶	۰/۹۳۹	۹۳	
۶۰	۱,۰۸۷/۶۶	۲/۵۶۲	۴/۷۵	۰/۲۶۰	۰/۹۳۲	۵۱	
۸۰	۱,۰۷۷/۵۶	۲/۶۵۰	۲/۹۸	۰/۲۶۱	۰/۹۲۱	۳۲/۴	
۱۰۰	۱,۰۵۸/۵۰	۲/۷۴۲	۲/۰۳	۰/۲۶۳	۰/۹۰۸	۲۲/۴	

☑جدول $A-۴$ خواص فیزیکی مایعات اشباع (ادامه)

T, °C	ρ, $\frac{kg}{m^3}$	c_p, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	ν, $\frac{m^2}{s}$	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	α, $\frac{m^2}{s}$	Pr	β, K^{-1}
روغن موتور (استفاده نشده)							
۰	۸۹۹/۱۲	۱/۷۹۶	۰/۰۰۴۲۸	۰/۱۴۷	۰/۹۱۱×۱۰$^{-۷}$	۴۷,۱۰۰	۰/۷۰×۱۰$^{-۳}$
۲۰	۸۸۸/۲۳	۱/۸۸۰	۰/۰۰۰۹۰	۰/۱۴۵	۰/۸۷۲	۱۰,۴۰۰	
۴۰	۸۷۶/۰۵	۱/۹۶۴	۰/۰۰۰۲۴	۰/۱۴۴	۰/۸۳۴	۲,۸۷۰	
۶۰	۸۶۴/۰۴	۲/۰۴۷	۰/۸۳۹×۱۰$^{-۴}$	۰/۱۴۰	۰/۸۰۰	۱,۰۵۰	
۸۰	۸۵۲/۰۲	۲/۱۳۱	۰/۳۷۵	۰/۱۳۸	۰/۷۶۹	۴۹۰	
۱۰۰	۸۴۰/۰۱	۲/۲۱۹	۰/۲۰۳	۰/۱۳۷	۰/۷۳۸	۲۷۶	
۱۲۰	۸۲۸/۹۶	۲/۳۰۷	۰/۱۲۴	۰/۱۳۵	۰/۷۱۰	۱۷۵	
۱۴۰	۸۱۶/۹۴	۲/۳۹۵	۰/۰۸۰	۰/۱۳۳	۰/۶۸۶	۱۱۶	
۱۶۰	۸۰۵/۸۹	۲/۴۸۳	۰/۰۵۶	۰/۱۳۲	۰/۶۶۳	۸۴	
جیوه Hg							
۰	۱۳,۶۲۸/۲۲	۰/۱۴۰۳	۰/۱۲۴×۱۰$^{-۶}$	۸/۲۰	۴۲/۹۹×۱۰$^{-۷}$	۰/۰۲۸۸	۱/۸۲×۱۰$^{-۴}$
۲۰	۱۳,۵۷۹/۰۴	۰/۱۳۹۴	۰/۱۱۴	۸/۶۹	۴۶/۰۶	۰/۰۲۴۹	
۵۰	۱۳,۵۰۵/۸۴	۰/۱۳۸۶	۰/۱۰۴	۹/۴۰	۵۰/۲۲	۰/۰۲۰۷	
۱۰۰	۱۳,۳۸۴/۵۸	۰/۱۳۷۳	۰/۰۹۲۸	۱۰/۵۱	۵۷/۱۶	۰/۰۱۶۲	
۱۵۰	۱۳,۲۶۴/۲۸	۰/۱۳۶۵	۰/۰۸۵۳	۱۱/۴۹	۶۳/۵۴	۰/۰۱۳۴	
۲۰۰	۱۳,۱۴۴/۹۴	۰/۱۵۷۰	۰/۰۸۰۲	۱۲/۳۴	۶۹/۰۸	۰/۰۱۱۶	
۲۵۰	۱۳,۰۲۵/۶۰	۰/۱۳۵۷	۰/۰۷۶۵	۱۳/۰۷	۷۴/۰۶	۰/۰۱۰۳	
۳۱۵/۵	۱۲,۸۴۷	۰/۱۳۴	۰/۰۶۷۳	۱۴/۰۲	۸۱/۵	۰/۰۰۸۳	

☑جدول $A-۵$ خواص فیزیکی هوا در فشار جو

مقادیر μ, k, c_p و Pr خیلی به فشار بستگی ندارند و می‌توان آنها را در محدودهٔ فشار نسبتاً وسیع به کار برد.

T, K	ρ $\frac{kg}{m^3}$	c_p, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	$\mu\times10^5$, $\frac{kg}{m.s}$	$\nu\times10^6$, $\frac{m^2}{s}$	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	$\alpha\times10^4$, $\frac{m^2}{s}$	Pr
۱۰۰	۳/۶۰۱۰	۱/۰۲۶۶	۰/۶۹۲۴	۱/۹۲۳	۰/۰۰۹۲۴۶	۰/۰۲۵۰۱	۰/۷۷۰
۱۵۰	۲/۳۶۷۵	۱/۰۰۹۹	۱/۰۲۸۳	۴/۳۴۳	۰/۰۱۳۷۳۵	۰/۰۵۷۴۵	۰/۷۵۳
۲۰۰	۱/۷۶۸۴	۱/۰۰۶۱	۱/۳۲۸۹	۷/۴۹۰	۲/۰۱۸۰۹	۰/۱۰۱۶۵	۰/۷۳۹
۲۵۰	۱/۴۱۲۸	۱/۰۰۵۳	۱/۵۹۹۰	۱۱/۳۱	۰/۰۲۲۲۷	۰/۱۵۶۷۵	۰/۷۲۲
۳۰۰	۱/۱۷۷۴	۱/۰۰۵۷	۱/۸۴۶۲	۱۵/۶۹	۰/۰۲۶۲۴	۰/۲۲۱۶۰	۰/۷۰۸
۳۵۰	۰/۹۹۸۰	۱/۰۰۹۰	۲/۰۷۵	۲۰/۷۶	۰/۰۳۰۰۳	۰/۲۹۸۳	۰/۶۹۷
۴۰۰	۰/۸۸۲۶	۱/۰۱۴۰	۲/۲۸۶	۲۵/۹۰	۰/۰۳۳۶۵	۰/۳۷۶۰	۰/۶۸۹
۴۵۰	۰/۷۸۳۳	۱/۰۲۰۷	۲/۴۸۴	۳۱/۷۱	۰/۰۳۷۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۶۸۳
۵۰۰	۰/۷۰۴۸	۱/۰۲۹۵	۲/۶۷۱	۳۷/۹۰	۰/۰۴۰۳۸	۰/۵۵۶۴	۰/۶۸۰
۵۵۰	۰/۶۴۲۳	۱/۰۳۹۲	۲/۸۴۸	۴۴/۳۴	۰/۰۴۳۶۰	۰/۶۵۳۲	۰/۶۸۰
۶۰۰	۰/۵۸۷۹	۱/۰۵۵۱	۳/۰۱۸	۵۱/۳۴	۰/۰۴۶۵۹	۰/۷۵۱۲	۰/۶۸۰
۶۵۰	۰/۵۴۳۰	۱/۰۶۳۵	۳/۱۷۷	۵۸/۵۱	۰/۰۴۹۵۳	۰/۸۵۷۸	۰/۶۸۲
۷۰۰	۰/۵۰۳۰	۱/۰۷۵۲	۳/۳۳۲	۶۶/۲۵	۰/۰۵۲۳۰	۰/۹۶۷۲	۰/۶۸۴
۷۵۰	۰/۴۷۰۹	۱/۰۸۵۶	۳/۴۸۱	۷۳/۹۱	۰/۰۵۵۰۹	۱/۰۷۷۴	۰/۶۸۶
۸۰۰	۰/۴۴۰۵	۱/۰۹۷۸	۳/۶۲۵	۸۲/۲۹	۰/۰۵۷۷۹	۱/۱۹۵۱	۰/۶۸۹
۸۵۰	۰/۴۱۴۹	۱/۱۰۹۵	۳/۷۶۵	۹۰/۷۵	۰/۰۶۰۲۸	۱/۳۰۹۷	۰/۶۹۲
۹۰۰	۰/۳۹۲۵	۱/۱۲۱۲	۳/۸۹۹	۹۹/۳	۰/۰۶۲۷۹	۱/۴۲۷۱	۰/۶۹۶
۹۵۰	۰/۳۷۱۶	۱/۱۳۲۱	۴/۰۲۳	۱۰۸/۲	۰/۰۶۵۲۵	۱/۵۵۱۰	۰/۶۹۹
۱۰۰۰	۰/۳۵۲۴	۱/۱۴۱۷	۴/۱۵۲	۱۱۷/۸	۰/۰۶۷۵۲	۱/۶۷۷۹	۰/۷۰۲
۱۱۰۰	۰/۳۲۰۴	۱/۱۶۰	۴/۴۴	۱۳۸/۶	۰/۰۷۳۲	۱/۹۶۹	۰/۷۰۴
۱۲۰۰	۰/۲۹۴۷	۱/۱۷۹	۴/۶۹	۱۵۹/۱	۰/۰۷۸۲	۲/۲۵۱	۰/۷۰۷
۱۳۰۰	۰/۲۷۰۷	۱/۱۹۷	۴/۹۳	۱۸۲/۱	۰/۰۸۳۷	۲/۵۸۳	۰/۷۰۵
۱۴۰۰	۰/۲۵۱۵	۱/۲۱۴	۵/۱۷	۲۰۵/۵	۰/۰۸۹۱	۲/۹۲۰	۰/۷۰۵
۱۵۰۰	۰/۲۳۵۵	۱/۲۳۰	۵/۴۰	۲۲۹/۱	۰/۰۹۴۶	۳/۲۶۲	۰/۷۰۵
۱۶۰۰	۰/۲۲۱۱	۱/۲۴۸	۵/۶۳	۲۵۴/۵	۰/۱۰۰	۳/۶۰۹	۰/۷۰۵
۱۷۰۰	۰/۲۰۸۲	۱/۲۶۷	۵/۸۵	۲۸۰/۵	۰/۱۰۵	۳/۹۷۷	۰/۷۰۵
۱۸۰۰	۰/۱۹۷۰	۱/۲۸۷	۶/۰۷	۳۰۸/۱	۰/۱۱۱	۴/۳۷۹	۰/۷۰۴
۱۹۰۰	۰/۱۸۵۸	۱/۳۰۹	۶/۲۹	۳۳۸/۵	۰/۱۱۷	۴/۸۱۱	۰/۷۰۴
۲۰۰۰	۰/۱۷۶۲	۱/۳۳۸	۶/۵۰	۳۶۹/۰	۰/۱۲۴	۵/۲۶۰	۰/۷۰۲
۲۱۰۰	۰/۱۶۸۲	۱/۳۷۲	۶/۷۲	۳۹۹/۶	۰/۱۳۱	۵/۷۱۵	۰/۷۰۰
۲۲۰۰	۰/۱۶۰۲	۱/۴۱۹	۶/۹۳	۴۳۲/۶	۰/۱۳۹	۶/۱۲۰	۰/۷۰۷
۲۳۰۰	۰/۱۵۳۸	۱/۴۸۲	۷/۱۴	۴۶۴/۰	۰/۱۴۹	۶/۵۴۰	۰/۷۱۰
۲۴۰۰	۰/۱۴۵۸	۱/۵۷۴	۷/۳۵	۵۰۴/۰	۰/۱۶۱	۷/۰۲۰	۰/۷۱۸
۲۵۰۰	۰/۱۳۹۴	۱/۶۸۸	۷/۵۷	۵۴۳/۵	۰/۱۷۵	۷/۴۴۱	۰/۷۳۰

☑جدول $A-۶$ خواص فیزیکی گازها در فشار جو

مقادیر μ , k , c_p , Pr برای H_2 , O_2 , H_2 , He خیلی به‌فشار بستگی‌ندارند و می‌توان آنها را در محدودهٔ فشار نسبتاً وسیع به‌کاربرد.

T, K	ρ $\frac{kg}{m^3}$	c_p, $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	μ, $\frac{kg}{m.s}$	ν, $\frac{m^2}{s}$	k, $\frac{W}{m.^\circ C}$	α, $\frac{m^2}{s}$	Pr
هلیم							
۱۴۴	۰/۳۳۷۹	۵/۲۰۰	$۱۲۵/۵\times۱۰^{-۷}$	$۳۷/۱۱\times۱۰^{-۶}$	۰/۰۹۲۸	$۰/۵۲۷۵\times۱۰^{-۴}$	۰/۷۰
۲۰۰	۰/۲۴۳۵	۵/۲۰۰	۱۵۶/۶	۶۴/۳۸	۰/۱۱۷۷	۰/۹۲۸۸	۰/۶۹۴
۲۵۵	۰/۱۹۰۶	۵/۲۰۰	۱۸۱/۷	۹۵/۵۰	۰/۱۳۵۷	۱/۳۶۷۵	۰/۷۰
۳۶۶	۰/۱۳۲۸۰	۵/۲۰۰	۲۳۰/۵	۱۷۳/۶	۰/۱۶۹۱	۲/۴۴۹	۰/۷۱
۴۷۷	۰/۱۰۲۰۴	۵/۲۰۰	۲۷۵/۰	۲۶۹/۳	۰/۱۹۷	۳/۷۱۶	۰/۷۲
۵۸۹	۰/۰۸۲۸۲	۵/۲۰۰	۳۱۱/۳	۳۷۵/۸	۰/۲۲۵	۵/۲۱۵	۰/۷۲
۷۰۰	۰/۰۷۰۳۲	۵/۲۰۰	۳۴۷/۵	۴۹۴/۲	۰/۲۵۱	۶/۶۶۱	۰/۷۲
۸۰۰	۰/۰۶۰۲۳	۵/۲۰۰	۳۸۱/۷	۶۳۴/۱	۰/۲۷۵	۸/۷۷۴	۰/۷۲
هیدروژن							
۱۵۰	۰/۱۶۳۷۱	۱۲/۶۰۲	$۵/۵۹۵\times۱۰^{-۶}$	$۳۴/۱۸\times۱۰^{-۶}$	۰/۰۹۸۱	$۰/۴۷۵\times۱۰^{-۴}$	۰/۷۱۸
۲۰۰	۰/۱۲۲۷۰	۱۳/۵۴۰	۶/۸۱۳	۵۵/۵۳	۰/۱۲۸۲	۰/۷۷۲	۰/۷۱۹
۲۵۰	۰/۰۹۸۱۹	۱۴/۰۵۹	۷/۹۱۹	۸۰/۶۴	۰/۱۵۶۱	۱/۱۳۰	۰/۷۱۳
۳۰۰	۰/۰۸۱۸۵	۱۴/۳۱۴	۸/۹۶۳	۱۰۹/۵	۰/۱۸۲	۱/۵۵۴	۰/۷۰۶
۳۵۰	۰/۰۷۰۱۶	۱۴/۴۳۶	۹/۹۵۴	۱۴۱/۹	۰/۲۰۶	۲/۰۳۱	۰/۶۹۷
۴۰۰	۰/۰۶۱۳۵	۱۴/۴۹۱	۱۰/۸۶۴	۱۷۷/۱	۰/۲۲۸	۲/۵۶۸	۰/۶۹۰
۴۵۰	۰/۰۵۴۶۲	۱۴/۴۹۹	۱۱/۷۷۹	۲۱۵/۶	۰/۲۵۱	۳/۱۶۴	۰/۶۸۲
۵۰۰	۰/۰۴۹۱۸	۱۴/۵۰۷	۱۲/۶۳۶	۲۵۷/۰	۰/۲۷۲	۳/۸۱۷	۰/۶۷۵
۵۵۰	۰/۰۴۴۶۹	۱۴/۵۳۲	۱۳/۴۷۵	۳۰۱/۶	۰/۲۹۲	۴/۵۱۶	۰/۶۶۸
۶۰۰	۰/۰۴۰۸۵	۱۴/۵۳۷	۱۴/۲۸۵	۳۴۹/۷	۰/۳۱۵	۵/۳۰۶	۰/۶۶۴
۷۰۰	۰/۰۳۴۹۲	۱۴/۵۷۴	۱۵/۸۹	۴۵۵/۱	۰/۳۵۱	۶/۹۰۳	۰/۶۵۹
۸۰۰	۰/۰۳۰۶۰	۱۴/۶۷۵	۱۷/۴۰	۵۶۹	۰/۳۸۴	۸/۵۶۳	۰/۶۶۴
۹۰۰	۰/۰۲۷۲۳	۱۴/۸۲۱	۱۸/۷۸	۶۹۰	۰/۴۱۲	۱۰/۲۱۷	۰/۶۷۶
اکسیژن							
۱۵۰	۲/۶۱۹۰	۰/۹۱۷۸	$۱۱/۴۹۰\times۱۰^{-۶}$	$۴/۳۸۷\times۱۰^{-۶}$	۹/۰۱۳۶۷	$۰/۰۵۶۸۸\times۱۰^{-۴}$	۰/۷۷۳
۲۰۰	۱/۹۵۵۹	۰/۹۱۳۱	۱۴/۸۵۰	۷/۵۹۳	۰/۰۱۸۲۴	۰/۱۰۲۱۴	۰/۷۴۵
۲۵۰	۱/۵۶۱۸	۰/۹۱۵۷	۱۷/۸۷	۱۱/۴۵	۰/۰۲۲۵۹	۰/۱۵۷۹۴	۰/۷۲۵
۳۰۰	۱/۳۰۰۷	۰/۹۲۰۳	۲۰/۶۳	۱۵/۸۶	۰/۰۲۶۷۶	۰/۲۲۳۵۳	۰/۷۰۹
۳۵۰	۱/۱۱۳۳	۰/۹۲۹۱	۲۳/۱۶	۲۰/۸۰	۰/۰۳۰۷۰	۰/۲۹۶۸	۰/۷۰۲
۴۰۰	۰/۹۷۵۵	۰/۹۴۲۰	۲۵/۵۴	۲۶/۱۸	۰/۰۳۴۶۱	۰/۳۷۶۸	۰/۶۹۵
۴۵۰	۰/۸۶۸۲	۰/۹۵۶۷	۲۷/۷۷	۳۱/۹۹	۰/۰۳۸۲۸	۰/۴۶۰۹	۰/۶۹۴
۵۰۰	۰/۷۸۰۱	۰/۹۷۲۲	۲۹/۹۱	۳۸/۳۴	۰/۰۴۱۷۳	۰/۵۵۰۲	۰/۶۹۷
۵۵۰	۰/۷۰۹۶	۰/۹۸۸۱	۳۱/۹۷	۴۵/۰۵	۰/۰۴۵۱۷	۰/۶۴۱	۰/۷۰۰

نیتروژن

۰/۷۴۷	$۰/۱۰۲۲۴\times۱۰^{-۲}$	۰/۰۱۸۲۴	$۷/۵۶۸\times۱۰^{-۶}$	$۱۲/۹۴۷\times۱۰^{-۶}$	۱/۰۴۲۹	۱/۷۱۰۸	۲۰۰
۰/۷۱۳	۰/۲۲۰۴۴	۰/۰۲۶۲۰	۱۵/۶۳	۱۷/۸۴	۱/۰۴۰۸	۱/۱۴۲۱	۳۰۰
۰/۶۹۱	۰/۳۷۳۴	۰/۰۳۳۳۵	۲۵/۷۴	۲۱/۹۸	۱/۰۴۵۹	۰/۸۵۳۸	۴۰۰
۰/۶۸۴	۰/۵۵۳۰	۰/۰۳۹۸۴	۳۷/۶۶	۲۵/۷۰	۱/۰۵۵۵	۰/۶۸۲۴	۵۰۰
۰/۶۸۶	۰/۷۴۸۶	۰/۰۴۵۸۰	۵۱/۱۹	۲۹/۱۱	۱/۰۷۵۶	۰/۵۶۸۷	۶۰۰
۰/۶۹۱	۰/۹۴۶۶	۰/۰۵۱۲۳	۶۵/۱۳	۳۲/۱۳	۱/۰۹۶۹	۰/۴۹۳۴	۷۰۰
۰/۷۰۰	۱/۱۶۸۵	۰/۰۵۶۰۹	۸۱/۴۶	۳۴/۸۴	۱/۱۲۲۵	۰/۴۲۷۷	۸۰۰
۰/۷۱۱	۱/۳۹۴۶	۰/۰۶۰۷۰	۹۱/۰۶	۳۷/۴۹	۱/۱۴۶۴	۰/۳۷۹۶	۹۰۰
۰/۷۲۴	۱/۶۲۵۰	۰/۰۶۴۷۵	۱۱۷/۲	۴۰/۰۰	۱/۱۶۷۷	۰/۳۴۱۲	۱۰۰۰
۰/۷۳۶	۱/۸۵۷۱	۰/۰۶۸۵۰	۱۳۶/۰	۴۲/۲۸	۱/۱۸۵۷	۰/۳۱۰۸	۱۱۰۰
۰/۷۴۸	۲/۰۹۳۲	۰/۰۷۱۸۴	۱۵۶/۱	۴۴/۵۰	۱/۲۰۳۷	۰/۲۸۵۱	۱۲۰۰
دی اکسید کربن							
۰/۸۱۸	$۰/۰۵۹۲۰\times۱۰^{-۴}$	۰/۰۱۰۸۰۵	$۴/۴۹۰\times۱۰^{-۶}$	$۱۱/۱۰۵\times۱۰^{-۶}$	۰/۷۸۳	۲/۴۷۳۳	۲۲۰
۰/۷۹۳	۰/۰۷۴۰۱	۰/۰۱۲۸۸۴	۵/۸۱۳	۱۲/۵۹۰	۰/۸۰۴	۲/۱۶۵۷	۲۵۰
۰/۷۷۰	۰/۱۰۵۸۸	۰/۰۱۶۵۷۲	۸/۳۲۱	۱۴/۹۵۸	۰/۸۷۱	۱/۷۹۷۳	۳۰۰
۰/۷۵۵	۰/۱۴۸۰۸	۰/۰۲۰۴۷	۱۱/۱۹	۱۷/۲۰۵	۰/۹۰۰	۱/۵۳۶۲	۳۵۰
۰/۷۳۸	۰/۱۹۴۶۳	۰/۰۲۴۶۱	۱۴/۳۹	۱۹/۳۲	۰/۹۴۲	۱/۳۴۲۴	۴۰۰
۰/۷۲۱	۰/۲۴۸۱۳	۰/۰۲۸۹۷	۱۷/۹۰	۲۱/۳۴	۰/۹۸۰	۱/۱۹۱۸	۴۵۰
۰/۷۰۲	۰/۳۰۸۴	۰/۰۳۳۵۲	۲۱/۶۷	۲۳/۲۶	۱/۰۱۳	۱/۰۷۳۲	۵۰۰
۰/۶۸۵	۰/۳۷۵۰	۰/۰۳۸۲۱	۲۵/۷۴	۲۵/۰۸	۱/۰۴۷	۰/۹۷۳۹	۵۵۰
۰/۶۶۸	۰/۴۴۸۳	۰/۰۴۳۱۱	۳۰/۰۲	۲۶/۸۳	۱/۰۷۶	۰/۸۹۳۸	۶۰۰
آمونیاک، NH_3							
۰/۹۰	$۰/۱۳۰۸\times۱۰^{-۲}$	۰/۰۲۲۰	$۱/۱۸\times۱۰^{-۵}$	$۹/۳۵۳\times۱۰^{-۶}$	۲/۱۷۷	۰/۷۹۲۹	۲۷۳
۰/۸۸	۰/۱۹۲۰	۰/۰۲۷۰	۱/۷۰	۱۱/۰۳۵	۲/۱۷۷	۰/۶۴۸۷	۳۲۳
۰/۸۷	۰/۲۶۱۹	۰/۰۳۲۷	۲/۳۰	۱۲/۸۸۶	۲/۲۳۶	۰/۵۵۹۰	۳۷۳
۰/۸۷	۰/۳۴۳۲	۰/۰۳۹۱	۲/۹۷	۱۴/۶۷۲	۲/۳۱۵	۰/۴۹۳۴	۴۲۳
۰/۸۴	۰/۴۴۲۱	۰/۰۴۶۷	۳/۷۴	۱۶/۴۹	۲/۳۹۵	۰/۴۴۰۵	۴۷۳
بخار آب							
۱/۰۶۰	$۰/۲۰۳۶\times۱۰^{-۲}$	۰/۰۲۴۶	$۲/۱۶\times۱۰^{-۵}$	$۱۲/۷۱\times۱۰^{-۶}$	۲/۰۶۰	۰/۵۸۶۳	۳۸۰
۱/۰۴۰	۰/۲۳۳۸	۰/۰۲۶۱	۲/۴۲	۱۳/۴۴	۲/۰۱۴	۰/۵۵۴۲	۴۰۰
۱/۰۱۰	۰/۳۰۷	۰/۰۲۹۹	۳/۱۱	۱۵/۲۵	۱/۹۸۰	۰/۴۹۰۲	۴۵۰
۰/۹۹۶	۰/۳۸۷	۰/۰۳۳۹	۳/۸۶	۱۷/۰۴	۱/۹۸۵	۰/۴۴۰۵	۵۰۰
۰/۹۹۱	۰/۴۷۵	۰/۰۳۷۹	۴/۷۰	۱۸/۸۴	۱/۹۹۷	۰/۴۰۰۵	۵۵۰
۰/۹۸۶	۰/۵۷۳	۰/۰۴۲۲	۵/۶۶	۲۰/۶۷	۲/۰۲۶	۰/۳۶۵۲	۶۰۰
۰/۹۹۵	۰/۶۶۶	۰/۰۴۶۴	۶/۶۴	۲۲/۴۷	۲/۰۵۶	۰/۳۳۸۰	۶۵۰
۱/۰۰۰	۰/۷۷۲	۰/۰۵۰۵	۷/۷۲	۲۴/۲۶	۲/۰۸۵	۰/۳۱۴۰	۷۰۰
۱/۰۰۵	۰/۸۸۳	۰/۰۵۴۹	۸/۸۸	۲۶/۰۴	۲/۱۱۹	۰/۲۹۳۱	۷۵۰
۱/۰۱۰	۱/۰۰۱	۰/۰۵۹۲	۱۰/۲۰	۲۷/۸۶	۲/۱۵۲	۰/۲۷۳۹	۸۰۰
۱/۰۱۹	۱/۱۳۰	۰/۰۶۳۷	۱۱/۵۲	۲۹/۶۹	۲/۱۸۶	۰/۲۵۷۹	۸۵۰

☑جدول $A-7$ خواص فیزیکی بعضی از فلزات با نقطهٔ ذوب پایین

فلز	نقطهٔ ذوب، °C	نقطهٔ جوش معمولی، °C	دما، °C	چگالی، $\rho\times10^{-3}$، $\frac{kg}{m^3}$	لزجت $\mu\times10^{-3}$، $\frac{kg}{m.s}$	ظرفیت گرمایی، $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	ضریب هدایت گرمایی $\frac{W}{m.^\circ C}$	عدد پراندل
بیسموت	۲۷۱	۱۴۷۷	۳۱۶	۱۰/۰۱	۱/۶۲	۰/۱۴۴	۱۶/۴	۰/۰۱۴
			۷۶۰	۹/۴۷	۰/۷۹	۰/۱۶۵	۱۵/۶	۰/۰۰۸۴
سرب	۳۲۷	۱۷۳۷	۳۷۱	۱۰/۵	۲/۴۰	۰/۱۵۹	۱۶/۱	۰/۰۲۴
			۷۰۴	۱۰/۱	۱/۳۷	۰/۱۵۵	۱۴/۹	۰/۰۱۶
لیتیم	۱۷۹	۱۳۱۷	۲۰۴	۰/۵۱	۰/۶۰	۴/۱۹	۳۸/۱	۰/۰۶۵
			۹۸۲	۰/۴۴	۰/۴۲	۴/۱۹		
جیوه	-۳۹	۳۵۷	۱۰	۱۳/۶	۱/۵۹	۰/۱۳۸	۸/۱	۰/۰۲۷
			۳۱۶	۱۲/۸	۰/۸۶	۰/۱۳۴	۱۴/۰	۰/۰۰۸۴
پتاسیم	۶۳/۸	۷۶۰	۱۴۹	۰/۸۱	۰/۳۷	۰/۷۹۶	۴۵/۰	۰/۰۰۶۶
			۷۰۴	۰/۶۷	۰/۱۴	۰/۷۵۴	۳۳/۱	۰/۰۰۳۱
سدیم	۹۷/۸	۸۸۳	۲۰۴	۰/۹۰	۰/۴۳	۱/۳۴	۸۰/۳	۰/۰۰۷۲
			۷۰۴	۰/۷۸	۰/۱۸	۱/۲۶	۵۹/۷	۰/۰۰۳۸
سدیم-پتاسیم: Na ٪۲۲	۱۹	۸۲۶	۹۳/۳	۰/۸۴۸	۰/۴۹	۰/۹۴۶	۲۴/۴	۰/۰۱۹
			۷۶۰	۰/۶۹	۰/۱۴۶	۰/۸۸۳		
Na ٪۵۶	-۱۱	۷۸۴	۹۳/۳	۰/۸۹	۰/۵۸	۱/۱۳	۲۵/۶	۰/۰۲۶
			۷۶۰	۰/۷۴	۰/۱۶	۱/۰۴	۲۸/۹	۰/۰۵۸
بیسموت - سرب، Pb ٪۴۴/۵	۱۲۵	۱۶۷۰	۲۸۸	۱۰/۳	۱/۷۶	۰/۱۴۷	۱۰/۷	۰/۰۲۴
			۶۴۹	۹/۸۴	۱/۱۵			

☑جدول $A-8$ ضرایب پخش گازها و بخارات در هوا ۲۵°C و ۱atm

ماده	D، $\frac{cm^2}{s}$	$sc=\frac{\nu}{D}$	ماده	D، $\frac{cm^2}{s}$	$sc=\frac{\nu}{D}$
اسید فورمیک	۰/۱۵۹	۰/۹۷	آمونیاک	۰/۲۸	۰/۷۸
اسید استیک	۰/۱۳۳	۱/۱۶	گازکربنیک	۰/۱۶۴	۰/۹۴
آنیلین	۰/۰۷۳	۲/۱۴	هیدروژن	۰/۴۱۰	۰/۲۲
بنزن	۰/۰۸۸	۱/۷۶	اکسیژن	۰/۲۰۶	۰/۷۵
تولوئن	۰/۰۸۴	۱/۸۴	آب	۰/۲۵۶	۰/۶۰
اتیل بنزن	۰/۰۷۷	۲/۰۱	اتیل اتر	۰/۰۹۳	۱/۶۶
پروپیل بنزن	۰/۰۵۹	۲/۶۲	متانول	۰/۱۵۹	۰/۹۷
			اتیل الکل	۰/۱۱۹	۱/۳۰

☑جدول $A-9$ خواص فیزیکی آب (مایع اشباع)

توجه: $Gr_x\,Pr=\left(\frac{g\beta\rho^2c_p}{\mu k}\right)x^3\Delta T$

°F	°C	c_p، $\frac{kJ}{kg.^\circ C}$	ρ، $\frac{kg}{m^3}$	μ، $\frac{kg}{m.s}$	k، $\frac{W}{m.^\circ C}$	Pr	$\frac{g\beta\rho^2c_p}{\mu k}$، $\frac{1}{m^3.^\circ C}$
۳۲	۰	۴/۲۲۵	۹۹۹/۸	$۱/۷۹\times۱۰^{-۳}$	۰/۵۶۶	۱۳/۲۵	
۴۰	۴/۴۴	۴/۲۰۸	۹۹۹/۸	۱/۵۵	۰/۵۷۵	۱۱/۳۵	$۱/۹۱\times۱۰^{۹}$
۵۰	۱۰	۴/۱۹۵	۹۹۹/۲	۱/۳۱	۰/۵۸۵	۹/۴۰	$۶/۳۴\times۱۰^{۹}$
۶۰	۱۵/۵۶	۴/۱۸۶	۹۹۸/۶	۱/۱۲	۰/۵۹۵	۷/۸۸	$۱/۰۸\times۱۰^{۱۰}$
۷۰	۲۱/۱۱	۴/۱۷۹	۹۹۷/۴	$۹/۸\times۱۰^{-۴}$	۰/۶۰۴	۶/۷۸	$۱/۴۶\times۱۰^{۱۰}$
۸۰	۲۶/۶۷	۴/۱۷۹	۹۹۵/۸	۸/۶	۰/۶۱۴	۵/۸۵	$۱/۹۱\times۱۰^{۱۰}$
۹۰	۳۲/۲۲	۴/۱۷۴	۹۹۴/۹	۷/۶۵	۰/۶۲۳	۵/۱۲	$۲/۴۸\times۱۰^{۱۰}$
۱۰۰	۳۷/۷۸	۴/۱۷۴	۹۹۳/۰	۶/۸۲	۰/۶۳۰	۴/۵۳	$۳/۳\times۱۰^{۱۰}$
۱۱۰	۴۳/۳۳	۴/۱۷۴	۹۹۰/۶	۶/۱۶	۰/۶۳۷	۴/۰۴	$۴/۱۹\times۱۰^{۱۰}$
۱۲۰	۴۸/۸۹	۴/۱۷۴	۹۸۸/۸	۵/۶۲	۰/۶۴۴	۳/۶۴	$۴/۸۹\times۱۰^{۱۰}$
۱۳۰	۵۴/۴۴	۴/۱۷۹	۹۸۵/۷	۵/۱۳	۰/۶۴۹	۳/۳۰	$۵/۶۶\times۱۰^{۱۰}$
۱۴۰	۶۰	۴/۱۷۹	۹۸۳/۳	۴/۷۱	۰/۶۵۴	۳/۰۱	$۶/۴۸\times۱۰^{۱۰}$
۱۵۰	۶۵/۵۵	۴/۱۸۳	۹۸۰/۳	۴/۳	۰/۶۵۹	۲/۷۳	$۷/۶۲\times۱۰^{۱۰}$
۱۶۰	۷۱/۱۱	۴/۱۸۶	۹۷۷/۳	۴/۰۱	۰/۶۶۵	۲/۵۳	$۸/۸۴\times۱۰^{۱۰}$
۱۷۰	۷۶/۶۷	۴/۱۹۱	۹۷۳/۷	۳/۷۲	۰/۶۶۸	۲/۳۳	$۹/۸۵\times۱۰^{۱۰}$
۱۸۰	۸۲/۲۲	۴/۱۹۵	۹۷۰/۲	۳/۴۷	۰/۶۷۳	۲/۱۶	$۱/۰۹\times۱۰^{۱۱}$
۱۹۰	۸۷/۷۸	۴/۱۹۹	۹۶۶/۷	۳/۲۷	۰/۶۷۵	۲/۰۳	
۲۰۰	۹۳/۳۳	۴/۲۰۴	۹۶۳/۲	۳/۰۶	۰/۶۷۸	۱/۹۰	
۲۲۰	۱۰۴/۴	۴/۲۱۶	۹۵۵/۱	۲/۶۷	۰/۶۸۴	۱/۶۶	
۲۴۰	۱۱۵/۶	۴/۲۲۹	۹۴۶/۷	۲/۴۴	۰/۶۸۵	۱/۵۱	
۲۶۰	۱۲۶/۷	۴/۲۵۰	۹۳۷/۲	۲/۱۹	۰/۶۸۵	۱/۳۶	
۲۸۰	۱۳۷/۸	۴/۲۷۱	۹۲۸/۱	۱/۹۸	۰/۶۸۵	۱/۲۴	
۳۰۰	۱۴۸/۹	۴/۲۹۶	۹۱۸/۰	۱/۸۶	۰/۶۸۴	۱/۱۷	
۳۵۰	۱۷۶/۷	۴/۳۷۱	۸۹۰/۴	۱/۵۷	۰/۶۷۷	۱/۰۲	
۴۰۰	۲۰۴/۴	۴/۴۶۷	۸۵۹/۴	۱/۳۶	۰/۶۶۵	۱/۰۰	
۴۵۰	۲۳۲/۲	۴/۵۸۵	۸۲۵/۷	۱/۲۰	۰/۶۴۶	۰/۸۵	
۵۰۰	۲۶۰	۴/۷۳۱	۷۸۵/۲	۱/۰۷	۰/۶۱۶	۰/۸۳	
۵۵۰	۲۸۷/۷	۵/۰۲۴	۷۳۵/۵	$۹/۵۱\times۱۰^{-۵}$			
۶۰۰	۳۱۵/۶	۵/۷۰۳	۶۷۸/۷	۸/۶۸			

☑**جدول A–۱۰** ضریب گسیل کل به هنجار سطوح مختلف

سطح	T,°F	ضریب گسیل ε
فلزات و اکسیدهای آنها		
آلومینیم:		
صفحات خیلی صیقلی، خلوص ٪۹۸/۳	۴۴۰–۱۰۷۰	۰/۰۳۹–۰/۰۵۷
ورقه‌های تجارتی	۲۱۲	۰/۰۹
خیلی اکسیده	۲۹۹–۹۴۰	۰/۲۰–۰/۳۱
برای پوشش پشت بام	۱۰۰	۰/۲۱۶
برنج:		
خیلی صیقلی:		
٪۲۶/۷ *Zn* , ٪۷۳/۲ *Cu*	۴۷۶–۶۷۴	۰/۰۲۸–۰/۰۳۱
٪۰/۳ *Al* , ٪۰/۴ *pb* , ٪۳۶/۸ *Zn* , ٪۶۲/۴ *Cu*	۴۹۴–۷۱۰	۰/۰۳۳–۰/۰۳۷
٪۱۷/۰ *Zn* , ٪۸۲/۹ *Cu*	۵۳۰	۰/۰۳۰
سخت نورد شده، صیقلی اما جهت صیقل شدن مشخص است	۷۰	۰/۰۳۸
ورق مات	۱۲۰–۶۶۰	۰/۲۲
کرم (در آلیاژهای نیکل، فولادهای *Ni-Cr* را ملاحظه کنید)، صیقلی	۱۰۰–۲۰۰۰	۰/۰۸–۰/۳۶
مس:		
صیقلی	۲۴۲	۰/۰۲۳
	۲۱۲	۰/۰۵۲
ورق گرمادیده به مدت زیاد، پوشیده از لایه ضخیم اکسید	۷۷	۰/۷۸
طلا، خالص، خیلی صیقلی	۴۴۰–۱۱۶۰	۰/۰۱۸–۰/۰۳۵
آهن و فولاد (که ضدزنگ نیستند):		
فولاد، صیقلی	۲۱۲	۰/۰۶۶
آهن، صیقلی	۸۰۰–۱۸۸۰	۰/۱۴–۰/۳۸
چدن،تازه تراش‌کاری شده	۷۲	۰/۴۴
تراش‌کاری شده و گرما دیده	۱۶۲۰–۱۸۱۰	۰/۶۰–۰/۷۰
فولاد نرم	۴۵۰–۱۹۵۰	۰/۲۰–۰/۳۲
سطوح اکسید شده:		
ورق آهنی، با مواد شیمیایی پاک شده، سپس رنگ زده و قرمز شده	۶۸	۰/۶۱
آهن، سطح سیاه خاکستری	۲۱۲	۰/۳۱
آهن چکش خوار ریخته‌گری شده	۱۷۰۰–۲۰۴۰	۰/۸۷–۰/۹۵
فولاد ورقه‌ای با لایه اکسیده سخت و ناهموار	۷۵	۰/۸۰
سرب:		
اکسید نشده، خلوص ٪۹۹/۹۶	۲۴۰–۴۴۰	۰/۰۵۷–۰/۰۷۵
خاکستری اکسید شده	۷۵	۰/۲۸
در ۳۰۰°F اکسید شده	۳۹۰	۰/۶۳
منیزیم، اکسید منیزیم	۵۳۰–۱۵۲۰	۰/۵۵–۰/۲۰
مولیبدن:		
رشته‌ای	۱۳۴۰–۴۷۰۰	۰/۰۹۶–۰/۲۰۲

☑**جدول A–۱۰** ضریب گسیل کل به هنجار سطوح مختلف (ادامه)

سطح	T,°F	ضریب گسیل ε
فلزات و اکسیدهای آنها		
توده‌ای، صیقلی	۲۱۲	۰/۰۷۱
فلز مونل، در ۱۱۱۰°F اکسید شده	۳۹۰–۱۱۱۰	۰/۴۱–۰/۰۴۶
نیکل:		
صیقلی	۲۱۲	۰/۰۷۲
اکسید نیکل	۱۲۰۰–۲۲۹۰	۰/۵۹–۰/۸۶
آلیاژهای نیکل:		
نیکل مس، صیقلی	۲۱۲	۰/۰۵۹
سیم نیکروم، براق	۱۲۰–۱۸۳۰	۰/۶۵–۰/۷۹
سیم نیکروم، اکسیده	۱۲۰–۹۳۰	۰/۹۵–۰/۹۸
پلاتین، ورق صیقلی، خالص	۴۴۰–۱۱۶۰	۰/۰۵۴–۰/۱۰۴
نقره:		
صیقلی، خالص	۴۴۰–۱۱۶۰	۰/۰۲۰–۰/۰۳۲
صیقلی	۱۰۰–۷۰۰	۰/۰۲۲–۰/۰۳۱
فولادهای ضدزنگ:		
صیقلی	۲۱۲	۰/۰۷۴
نوع ۳۰۱؛ *B*	۴۵۰–۱۷۲۵	۰/۵۴–۰/۶۳
قلع آهن قلع‌دار براق	۷۶	۰/۰۶۴ و ۰/۰۴۳
تنگستن، رشته	۶۰۰۰	۰/۳۹
روی، آهن ورقه‌ای گالوانیزه، نسبتاً براق	۸۲	۰/۲۳
مواد نسوز، مصالح ساختمانی، رنگ‌ها و متفرقه		
آلومین (٪۸۵–۹۹/۵ Al_2O_3 , ٪۰–۱۲ SiO_2 , ٪۰–۱ Ge_2O_3)؛		
مقدار اندازه متوسط ذرات، میکرون (μm):		
۱۰ μm		۰/۳۰–۰/۱۸
۵۰ μm		۰/۳۹–۰/۲۸
۱۰۰ μm		۰/۵۰–۰/۴۰
آزبست تخته‌ای	۷۴	۰/۹۶
آجر:		
قرمز، ناصاف، ولی بدون ناصافی‌های بزرگ	۷۰	۰/۹۳
خاک نسوز	۱۸۳۲	۰/۷۵
زغال:		
زغال–*T* (گبرودر– زیمنس)٪۰/۹ خاکستر، با شروع از ضریب گسیل ۰/۷۲ در ۲۶۰°F که در موقع گرم کردن به مقادیر داده شده تغییر می‌کند	۲۶۰–۱۱۶۰	۰/۷۹–۰/۸۱
رشته	۱۹۰۰–۲۵۶۰	۰/۵۲۶

☑جدول A-۱۰ ضریب گسیل کل به هنجار سطوح مختلف (ادامه)

سطح	T,°F	ضریب گسیل ε
فلزات و اکسیدهای آنها		
ورق ناصاف	۶۰۸-۲۱۲	۰/۷۷
دوده چراغ، رسوب ناهموار	۹۳۲-۲۱۲	۰/۷۸-۰/۸۴
آجرهای بتونی	۱۸۳۲	۰/۶۳
لعاب، هم جوشیده سفید، روی آهن	۶۶	۰/۹۰
شیشه:		
صاف	۷۲	۰/۹۴
پیرکس، سرب و سودا	۱۰۰۰-۵۰۰	۰/۸۵-۰/۹۵
رنگ‌ها، لاک‌ها، جلاها:		
جلای لعابی سفید برقی روی ورق آهنی ناهموار	۷۳	۰/۹۰۶
لاک سیاه شفاف، روی آهن پاشیده شده	۷۶	۰/۸۷۵
شلاک سیاه شفاف روی ورق آهنی قلع‌دار	۷۰	۰/۸۲۱
شلاک سیاه مات	۲۹۵-۱۷۰	۰/۹۱
لاک سیاه یا سفید	۲۰۰-۱۰۰	۰/۹۵-۰/۸۰
لاک سیاه یک دست	۲۰۰-۱۰۰	۰/۹۸-۰/۹۶
رنگ‌ها و لاک‌های آلومینیمی:		
۱۰٪ *Al* ،۲۲٪ لاک ، روی سطح صاف یا ناصاف	۲۱۲	۰/۵۲
سایر رنگ‌های آلومینیمی، با عمرهای مختلف و مقادیر *Al* متفاوت	۲۱۲	۰/۶۷-۰/۲۷
چینی، براق	۷۲	۰/۹۲
کوارتز، ناهموار، هم‌جوشیده	۷۰	۰/۹۳
کاغذ پوشش بام	۶۹	۰/۹۱
لاستیک، سخت، ورق جلادار	۷۴	۰/۹۴
آب	۲۱۲-۳۲	۰/۹۶۳-۹/۹۵

☑جدول A-۱۱ ابعاد لوله‌های فولادی

مساحت مقطع داخلی ft²	مساحت مقطع فلز in²	قطر داخلی in	ضخامت دیوار in	شماره	قطر خارجی in	اندازه اسمی لوله in
۰/۰۰۰۴۰	۰/۰۷۲	۰/۲۶۹	۰/۰۶۸	۴۰	۰/۴۰۵	$\frac{۱}{۸}$
۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۹۳	۰/۲۱۵	۰/۰۹۵	۸۰		
۰/۰۰۰۷۲	۰/۱۲۵	۰/۳۶۴	۰/۰۸۸	۴۰	۰/۵۴۰	$\frac{۱}{۴}$
۰/۰۰۰۵۰	۰/۱۵۷	۰/۳۰۲	۰/۱۱۹	۸۰		
۰/۰۰۱۳۳	۰/۱۶۷	۰/۴۹۳	۰/۰۹۱	۴۰	۰/۶۷۵	$\frac{۳}{۸}$
۰/۰۰۰۹۸	۰/۲۱۷	۰/۴۲۳	۰/۱۲۶	۸۰		
۰/۰۰۲۱۱	۰/۲۵۰	۰/۶۲۲	۰/۱۰۹	۴۰	۰/۸۴۰	$\frac{۱}{۲}$
۰/۰۰۱۶۳	۰/۳۲۰	۰/۵۴۶	۰/۱۴۷	۸۰		
۰/۰۰۳۷۱	۰/۳۳۳	۰/۸۲۴	۰/۱۱۳	۴۰	۱/۰۵۰	$\frac{۳}{۴}$
۰/۰۰۳۰۰	۰/۴۳۳	۰/۷۴۲	۰/۱۵۴	۸۰		
۰/۰۰۶۰۰	۰/۴۹۴	۱/۰۴۹	۰/۱۳۳	۴۰	۱/۳۱۵	۱
۰/۰۰۴۹۹	۰/۶۳۹	۰/۹۵۷	۰/۱۷۹	۸۰		
۰/۰۱۴۱۴	۰/۷۹۹	۱/۶۱۰	۰/۱۴۵	۴۰	۱/۹۰۰	$۱\frac{۱}{۲}$
۰/۰۱۲۲۵	۱/۰۶۸	۱/۵۰۰	۰/۲۰۰	۸۰		
۰/۰۰۹۷۶	۱/۴۲۹	۱/۳۳۸	۰/۲۸۱	۱۶۰		
۰/۰۲۳۳۰	۱/۰۷۵	۲/۰۶۷	۰/۱۵۴	۴۰	۲/۳۷۵	۲
۰/۰۲۰۵۰	۱/۴۷۷	۱/۹۳۹	۰/۲۱۸	۸۰		
۰/۰۵۱۳۰	۲/۲۲۸	۳/۰۶۸	۰/۲۱۶	۴۰	۳/۵۰۰	۳
۰/۰۴۵۸۷	۳/۰۱۶	۲/۹۰۰	۰/۳۰۰	۸۰		
۰/۰۸۸۴۰	۳/۱۷۳	۴/۰۲۶	۰/۲۳۷	۴۰	۴/۵۰۰	۴
۰/۷۹۸۶	۴/۴۰۷	۳/۸۲۶	۰/۳۳۷	۸۰		
۰/۱۳۹۰	۴/۳۰۴	۵/۰۴۷	۰/۲۵۸	۴۰	۵/۵۶۳	۵
۰/۱۲۶۳	۶/۱۲۲	۴/۸۱۳	۰/۳۷۵	۸۰		
۰/۱۱۳۶	۷/۹۵۳	۴/۵۶۳	۰/۵۰۰	۱۲۰		
۰/۱۰۱۵	۹/۶۹۶	۴/۳۱۳	۰/۶۲۵	۱۶۰		
۰/۲۰۰۶	۵/۵۸۴	۶/۰۶۵	۰/۲۸۰	۴۰	۶/۶۲۵	۶
۰/۱۸۱۰	۸/۴۰۵	۵/۷۶۱	۰/۴۳۲	۸۰		
۰/۵۴۷۵	۱۱/۹۰	۱۰/۰۲۰	۰/۳۶۵	۴۰	۱۰/۷۵	۱۰
۰/۵۱۸۵	۱۶/۱۰	۹/۷۵۰	۰/۵۰۰	۸۰		

☑جدول A–۱۲ ضرایب تبدیل

طول:

۱۲ in = ۱ ft

۲/۵۴ cm = ۱ in

۱ μm = $۱۰^{-۶}$ m = $۱۰^{-۴}$ cm

جرم:

۱ kg = ۲/۲۰۵ lb_m

۱ slug = ۳۲/۱۶ lb_m

۴۵۴ g = ۱ lb_{fm}

نیرو:

۱ dyn = $۲/۲۴۸\times۱۰^{-۶}$ lb_f

۱ lb_f = ۴/۴۴۸ N

$۱۰^{۵}$ dyn = ۱ N

انرژی:

۱ $ft.lb_f$ = ۱/۳۵۶ J

۱ kWh = ۳۴۱۳ Btu

۱ hp.h = ۲۵۴۵ Btu

۱ Btu = ۲۵۲ cal

۱ Btu = ۷۷۸ $ft.lb_f$

فشار:

۱ atm = ۱۴/۶۹۶ $\frac{lb_f}{in^2}$ = ۲۱۱۶ $\frac{lb_f}{ft^2}$

۱ atm = $۱/۰۱۳۲۵\times۱۰^{۵}$ Pa

۱ in Hg = ۷۰/۷۳ $\frac{lb_f}{ft^2}$

لزجت:

۱ سانتی پواز = ۲/۴۲ $\frac{lb_m}{b.ft}$

۱ $\frac{lb_f.s}{ft^2}$ = ۳۲/۱۶ $\frac{lb_m}{s.ft}$

ضریب هدایت گرمایی

۱ $\frac{cal}{s.cm.^\circ C}$ = ۲۴۲ $\frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$

۱ $\frac{W}{cm.^\circ C}$ = ۵۷/۷۹ $\frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$

تبدیل مفید به واحدهای SI

حجم:

۱ in^3 = $۱/۶۳۸۷۱\times۱۰^{-۵}$ m^3

۱ ft^3 = ۰/۰۲۸۳۱۶۸ m^3

۱ gal = ۲۳۱ in^3 = ۰/۰۰۳۷۸۵۴ m^3

جرم:

۱ lb_m = ۰/۴۵۳۵۹۲۳۷ kg

چگالی:

۱ $\frac{lb_m}{in^3}$ = $۲/۷۶۷۹۹\times۱۰^{۴}$ $\frac{kg}{m^3}$

۱ $\frac{lb_m}{ft^3}$ = $۱۶/۰۱۸۵\times۱۰^{۴}$ $\frac{kg}{m^3}$

نیرو:

۱ dyn = $۱۰^{-۵}$ N

۱ lb_f = ۴/۴۴۸۲۲ N

طول:

۱ in = ۰/۰۲۵۴ m

۱ ft = ۰/۳۰۴۸ m

۱ mi = ۱/۶۰۹۳۴ km

مساحت:

۱ in^2 = ۶۴۵/۱۶ mm^2

۱ ft^2 = ۰/۰۹۲۹۰۳ m^2

۱ mi^2 = ۲/۵۸۹۹۹ km^2

☑جدول A–۱۲ ضرایب تبدیل (ادامه)

تبدیل مفید به واحدهای SI

فشار:

۱ $\frac{N}{m^2}$ = ۱ Pa

۱ atm = $۱/۰۱۳۲۵\times۱۰^{۵}$ Pa

۱ $\frac{lb_f}{in^2}$ = ۶۸۹۴/۷۶ Pa

انرژی:

۱ erg = $۱۰^{-۷}$ J

۱ Btu = ۱۰۵۵/۰۴ J

۱ $ft.lb_f$ = ۱/۳۵۵۸۲ J

۱ cal (۱۵°C) = ۴/۱۸۵۵ J

توان:

۱ hp = ۷۴۵/۷ W

۱ $\frac{Btu}{h}$ = ۰/۲۹۳ W

شار گرمایی:

۱ $\frac{Btu}{h.ft^2}$ = ۳/۱۵۳۷۲ $\frac{W}{m^2}$

۱ $\frac{Btu}{h.ft}$ = ۰/۹۶۱۲۸ $\frac{W}{m}$

ضریب هدایت گرمایی:

۱ $\frac{Btu}{h.ft.^\circ F}$ = ۱/۷۳۰۷ $\frac{W}{m.^\circ C}$

ضریب انتقال گرما:

۱ $\frac{Btu}{h.ft^2.^\circ F}$ = ۵/۶۷۸۲ $\frac{W}{m^2.^\circ C}$

پیوست

حل دقیق معادلات لایه مرزی آرام

می‌خواهیم معادلات انرژی و اندازه حرکت لایه مرزی آرام را با فرض ثابت بودن خواص فیزیکی سیال و گرادیان فشار صفر حل کنیم. داریم:

پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1-B)$$

اندازه حرکت:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2-B)$$

انرژی:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (3-B)$$

جمله اتلاف - لزجی را در معادله انرژی فوق حذف کرده‌ایم. طبق تحلیل مرتبه بزرگی بخش ۶-۱:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \qquad (4-B)$$

اکنون فرض می‌کنیم که نیم‌رخ‌های سرعت در فواصل مختلف از لبه بالا روند صفحهٔ تخت مشابه‌اند. بنابراین متغیر مهم $\frac{y}{\delta}$ است و فرض می‌کنیم که بتوان سرعت را بر حسب تابعی از این متغیر بیان کرد. بنابراین داریم:

$$\frac{u}{u_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

با وارد کردن تخمین مرتبه بزرگی δ از معادله $(4-B)$ داریم:

$$\frac{u}{u_\infty} = g(\eta) \qquad (5-B)$$

که:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}} = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \qquad (6-B)$$

η به متغیر تشابه معروف است و $g(\eta)$ همان تابعی است که به عنوان جواب به دنبال آن می‌گردیم. می‌توان تابع جریان ψ را طبق معادله پیوستگی تعریف کرد به‌طوری که:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (7-B)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (8-B)$$

با وارد کردن $(7-B)$ در معادله $(5-B)$ داریم:

$$\psi = \int u_\infty g(\eta)\, dy = \int u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\, g(\eta)\, d\eta$$

یا:

$$\psi = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} f(\eta) \qquad (9-B)$$

که $f(\eta) = \int g(\eta)\, d\eta$ است.

از $(8-B)$ و $(9-B)$ داریم:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}\left(\eta \frac{df}{d\eta} + f\right) \qquad (10-B)$$

با استفاده از تبدیلات مشابه روی سایر جملات معادلهٔ $(2-B)$ داریم:

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0 \qquad (11-B)$$

این معادله دیفرانسیل معمولی است که می‌توان آن را به طور عددی حل کرده، تابع $f(\eta)$ را به‌دست آوریم. شرایط مرزی عبارتند از:

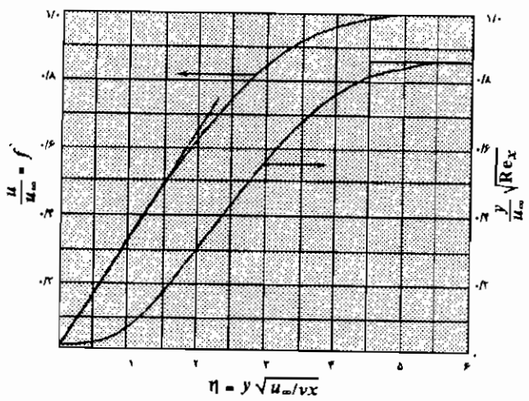
مختصات تشابه			مختصات فیزیکی		
$\eta = 0$	در	$\frac{df}{d\eta} = 0$	$y = 0$	در	$u = 0$
$\eta = 0$	در	$f = 0$	$y = 0$	در	$v = 0$
$\eta \to \infty$	در	$\frac{df}{d\eta} = 1/0$	$y \to \infty$	در	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

بلاسیوس Blasius اولین جواب معادلهٔ $(11-B)$ را به‌دست آورد. مقادیر u و v که از این جواب به‌دست می‌آیند در شکل $1-B$ ارائه شده‌اند.

معادله انرژی با معرفی متغیر دمایی بی‌بعد به‌صورت زیر به نحوی مشابه حل می‌شود:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_w}{T_\infty - T_w} \qquad (12-B)$$

که فرض می‌شود بتوان θ و T را به‌صورت توابعی از متغیر تشابه η



شکل $B-1$ نیم‌رخ‌های سرعت در لایه مرزی آرام، در $\eta = 0$، $\frac{du}{d\eta} = 0/332$ شیب.

بیان کرد. بنابراین معادله $(B-3)$ چنین می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \qquad (13-B)$$

با شرایط مرزی زیر:

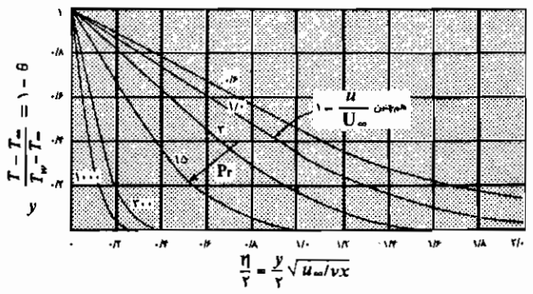
$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{در } y = 0,\ \eta = 0 \\ 1/0 & \text{در } y = \infty,\ \eta = \infty \end{cases}$$

وقتی تابع $f(\eta)$ معلوم است، جواب معادله $(B-13)$ چنین به‌دست می‌آید:

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{\Pr}{2}\int_0^\eta f d\eta\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Pr}{2}\int_0^\eta f d\eta\right) d\eta} \qquad (14-B)$$

پل‌هاوسن Pohlhausen این جواب را ارائه کرد و در شکل $2-B$ نشان داده شده است. به ازای اعداد پراندل بین ۰/۶ و ۱۵ معلوم شد که گرادیان دمای بی‌بعد در سطح را می‌توان به نحو رضایت‌بخشی ارائه کرد:

$$\left(\frac{d\theta(\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0/332\,\Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (15-B)$$



شکل $B-2$ نیم‌رخ‌های دما در لایه مرزی با دیوار هم‌دما.

پس ضریب انتقال گرما را می‌توان مطابق نتایج فصل ۵ چنین بیان کرد:

$$\mathrm{Nu}_x = 0/332\,\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\,\Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (16-B)$$

اکنون جواب معادله انرژی کامل شامل جمله اتلاف - لزجی را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (17-B)$$

حل این معادله را نخست برای حالت صفحه بی‌دررو به‌دست می‌آوریم. با وارد کردن نیم‌رخ دمایی بی‌بعد جدید بر حسب دمای رکود T_0 داریم:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T(\eta) - T_\infty}{\frac{u_\infty^2}{2c_p}}$$

معادله $(B-17)$ چنین می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f \frac{d\theta}{d\eta} + 2\Pr\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2 = 0 \qquad (18-B)$$

شرایط مرزی برای حالت دیوار - بی‌دررو چنین است:

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \qquad \text{در} \qquad y = 0,\ \eta = 0$$

$$\theta = 0 \qquad \text{در} \qquad y = \infty,\ \eta = \infty$$

پل‌هاوسن حل معادلهٔ $(B-18)$ را چنین ارائه کرده است:

$$\theta_a(\eta, \Pr) = 2\Pr\int_\eta^\infty \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^{Pr}\left[\int_0^\eta \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^{2-pr} d\eta\right] d\eta \qquad (19-B)$$

که نماد θ_a برای نشان دادن جواب دیوار بی‌دررو به‌کار رفته است. منحنی این جواب در شکل $B-3$ ارائه شده است. ضریب بازیابی چنین است:

$$r = \theta_a(0, \Pr)$$

این رابطه برای اعداد پراندل نزدیک واحد به معادلهٔ (۵-۱۲۲) تبدیل می‌شود:

$$r = \Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (5-122)$$

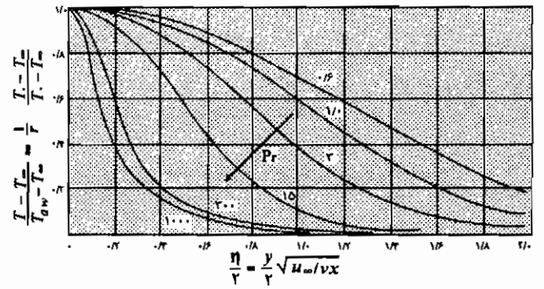
اکنون حالتی را در نظر بگیرید که دمای دیوار غیر از T_{aw} باشد، یعنی انتقال گرما به سیال یا از آن وجود ندارد، شرایط مرزی در این حالت چنین بیان می‌شود:

$$T = \begin{cases} T_w & \text{در } y = 0,\ \eta = 0 \\ T_\infty & \text{در } y = \infty,\ \eta = \infty \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که جملهٔ گرمایش - لزجی معادلهٔ $(B-18)$ جواب خاص این معادله است. چنان‌چه هیچ‌گونه گرمایش لزجی وجود نداشته باشد جواب دیواره بی‌دررو موجب نیم‌رخ دمایی یکنواخت در سراسر لایه مرزی می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم که بتوان نیم‌رخ دمای حالت مرکب دیوار گرمادیده و اتلاف لزجی را به صورت ترکیب خطی از جواب‌های داده شده در معادلهٔ $(B-14)$ و $(B-19)$ ارائه کرد. از آنجا که معادلهٔ $(B-18)$ نسبت به متغیر

وابسته θ خطی است این فرض درست به نظر می‌رسد. از این‌رو می‌نویسیم:

$$T - T_\infty = (T_a - T_\infty) + (T_c - T_{aw}) \qquad (۲۰-B)$$



شکل B-۳ نیم‌رخ‌های دما در لایه مرزی آرام با دیواره بی‌دررو.

که $T_a - T_\infty$ پخش دما از معادلهٔ $(19-B)$ و $T_c - T_{aw}$ جواب معادله $(14-B)$ است که T_{aw} همان نقش T_∞ را در آن جواب دارد. معادله $(20-B)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$T-T_\infty = \theta_a(T_\circ-T_\infty)+\theta(T_{aw}-T_w)+T_w-T_{aw} \qquad (۲۱-B)$$

این جواب را می‌توان با وارد کردن در معادلهٔ $(18-B)$ آزمایش کرد. نتایج چنین است:

$$(T_\circ - T_\infty)\left[\frac{d^2\theta_a}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f\frac{d\theta_a}{d\eta} + 2\Pr\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2\right]$$

$$+ (T_{aw} - T_w)\left(\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f\frac{d\theta}{d\eta}\right) = 0$$

بررسی این رابطه نشان می‌دهد که معادلهٔ $(21-B)$ جواب معتبری برای شرایط مرزی واقعی دیوار گرما دیده است. بنابراین گرادیان دما را می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]_{\eta=0} = (T_\circ - T_\infty)\left.\frac{\partial\theta_a}{\partial\eta}\right]_{\eta=0} + (T_{aw} - T_w)\left.\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}$$

اولین جمله صفر است و می‌توان معادلهٔ $(15-B)$ را برای ارزیابی دومین جمله به‌کار برد. نتایج چنین است:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]_{\eta=0} = 0/332\,(T_{aw} - T_w)\,\Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (۲۲-B)$$

این رابطه تعریف ضریب انتقال گرما را برای حالتی که گرمایش لزجی اهمیت دارد چنین پیشنهاد می‌کند:

$$\frac{q}{A} = h(T_w - T_{aw}) \qquad (۲۳-B)$$

سپس تحلیل مطابق بخش ۵-۱۲ ادامه می‌یابد.

روابط تحلیلی برای نمودارهای هیسلر

راه‌حل‌های تحلیلی برای سه حالت گذرا که در نمودارهای هیسلر فصل ۴ مورد بحث قرار گرفت در مرجع ۱ فصل ۴ داده شده‌اند. هیسلر (مرجع ۷ از فصل ۴) توانست نشان دهد که به ازای $\frac{\alpha\tau}{L^2}$ یا $\frac{\alpha\tau}{r_\circ^2} > 0/2$ جواب‌های به صورت سری نامتناهی مربوط به دمای مرکز ($x = 0$ یا $r = 0$) را می‌توان با دقت یک درصد با تنها یک جمله تقریب زد:

$$\frac{\theta_\circ}{\theta_i} \approx C_B \exp\left(-A_B^2\frac{\alpha\tau}{s^2}\right) \qquad (۱-C)$$

که $s = L$ برای صفحهٔ نامتناهی و $s = r_\circ$ برای استوانه یا کره است. C_B و A_B مقادیری ثابت و تابعی از عدد بیو، $\frac{hL}{k}$ یا $\frac{hr_\circ}{k}$، هستند و از معادلات زیر تعیین می‌شوند.

صفحه نامتناهی

A_B جواب معادله زیر است:

$$A_B(\tan A_B) = \mathrm{Bi} = \frac{hL}{k} \qquad (۲-C)$$

C_B از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$C_B = \frac{4\sin A_B}{2A_B + \sin 2A_B}$$

شناسه‌های توابع مثلثاتی بر حسب رادیانند.

استوانه نامتناهی

A_B جواب معادلهٔ زیر است:

$$\frac{A_B J_1(A_B)}{J_\circ(A_B)} = \mathrm{Bi} = \frac{hr_\circ}{k} \qquad (۳-C)$$

که $J_\circ$ و J_1 توابع بسل نوع اول هستند و در مراجعی مثل مرجع ۱ و ۳ از فصل ۴ به جدول در آمده‌اند. خلاصه‌ای از این توابع در جدول $1-C$ آورده شده‌اند.

سپس C_B برای استوانه از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C_B = \frac{2}{A_B}\frac{J_1(A_B)}{J_\circ^2(A_B) + J_1^2(A_B)} \qquad (۴-C)$$

کره

A_B جواب معادلهٔ زیر است:

$$1 - A_B\cot A_B = \mathrm{Bi} = \frac{hr_\circ}{k} \qquad (۵-C)$$

و C_B از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C_B = \frac{4(\sin A_B - A_B\cos A_B)}{2A_B - \sin 2A_B} \qquad (۶-C)$$

برای راحتی کار در جدول $2-C$ فهرستی از سنجه‌های A_B و C_B به صورت تابعی از عدد بیو برای سه حالت تحت بررسی آورده شده‌اند.

دماهای غیر مرکزی

چون سری نامتناهی دمای مرکزی را تنها با یک جمله تقریب زدیم، جواب‌های دماهای غیر مرکزی را نیز می‌توان به صورت‌های سادهٔ زیر بیان کرد:

صفحه نامتناهی:

$$\frac{\theta}{\theta_\circ} = \cos\left(\frac{A_B x}{L}\right) \qquad (۷-C)$$

استوانهٔ نامتناهی:

$$\frac{\theta}{\theta_\circ} = J_\circ\left(\frac{A_B r}{r_\circ}\right) \qquad (۸-C)$$

کره:

$$\frac{\theta}{\theta_\circ} = \frac{r_\circ}{rA_B}\sin\left(\frac{A_B r}{r_\circ}\right) \qquad (۹-C)$$

باز هم شناسه‌های توابع مثلثاتی بر حسب رادیانند.

اتلاف گرمای کل

اتلاف گرمای کل بر حسب زمان τ شکل‌های ۴-۱۶ تا ۴-۱۸ را نیز می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

صفحهٔ نامتناهی:

$$\frac{Q}{Q_\circ} = 1 - \left(\frac{\theta_\circ}{A_B\theta_i}\right)\sin A_B \qquad (۱۰-C)$$

استوانهٔ نامتناهی:

$$\frac{Q}{Q_\circ} = 1 - \left(\frac{2\theta_\circ}{A_B\theta_i}\right)J_1(A_B) \qquad (۱۱-C)$$

کره:

$$\frac{Q}{Q_\circ} = 1 - \left(\frac{3\theta_\circ}{A_B^3\theta_i}\right)(\sin A_B - A_B\cos A_B) \qquad (۱۲-C)$$

در تمام معادلات بالا A_B و C_B ضرایب مربوط به هندسه خاص هستند که به صورت تابعی از عدد بیو در جدول $2-C$ آورده شده‌اند.

از راه‌حل‌های تحلیلی دقت بیش‌تری حاصل می‌شود تا از نمودارها ولی کار با آنها پرزحمت‌تر است. روش انتخاب شده برای حل مسأله به عدم اطمینان‌ها در شرایط مرزی جابه‌جایی بستگی دارد. در بعضی موارد می‌توان از راه‌حل مرکب استفاده کرد؛ مثلاً از روش تحلیلی برای یافتن θ_o و از نمودارها برای ارزیابی $\frac{\theta}{\theta_o}$ و به این وسیله نیازی به ارزیابی توابع بسل نخواهد بود.

مثال C-۱

استوانهٔ بلندی به قطر 5 cm به دمای یکنواخت و اولیهٔ 250°C ناگهان در معرض محیطی جابه‌جایی به دمای 80°C با $h = 500\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\cdot^\circ\mathrm{C}}$ قرار می‌گیرد. دما در شعاع 1/2 Cm را پس از ۱ دقیقه و اتلاف گرمای واحد طول را در این دوره حساب کنید.

خواص فیزیکی فولاد را $\rho = ۷۸۰۰ \frac{kg}{m^۳}$ ، $C = ۰/۴۸ \frac{kJ}{kg.^\circ C}$ و $k = ۳۵ \frac{W}{m.^\circ C}$ بگیرید.

حل :

نخست ضریب پخشندگی گرمایی را چنین حساب می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{۳۵}{(۷۸۰۰)(۴۸۰)} = ۹/۳۵\times۱۰^{-۶} \frac{m^۲}{s}$$

عدد بیو برابر است با:

$$Bi = \frac{hr_\circ}{k} = \frac{(۵۰۰)(۰/۰۲۵)}{۳۵} = ۰/۳۵۷$$

از جدول $C-۲$ داریم:

$$A_B = ۰/۸۰۶۴ \; ; \quad C_B = ۱/۰۸۳۷$$

از معادلهٔ $(C-۱)$ داریم:

$$\frac{\theta_\circ}{\theta_i} = (۱/۰۸۳۷) \exp\left[\frac{-(۰/۸۰۶۴)^۲(۹/۳۵\times۱۰^{-۶})(۶۰)}{(۰/۰۲۵)^۲}\right] = ۰/۶۰۴۵$$

برای به‌دست آوردن دمای غیرمرکزی باید از معادلهٔ $(C-۸)$ استفاده کرد و داریم:

$$\frac{\theta}{\theta_\circ} = J_\circ \left[\frac{(۰/۸۰۶۴)(۰/۰۱۲)}{۰/۰۲۵}\right] = J_\circ\ (۰/۳۸۷) = ۰/۹۶۲۳$$

سپس:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = (۰/۶۰۴۵)(۰/۹۶۲۳) = ۰/۵۸۱۷$$

و :

$$T = (۰/۵۸۱۷)(۲۵۰-۸۰) + ۸۰ = ۱۷۸/۹^\circ C$$

برای به‌دست آوردن اتلاف گرمایی از معادلهٔ $(C-۱۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{Q}{Q_\circ} = ۱ - \left[\frac{(۲)(۰/۶۰۴۵)}{۰/۸۰۶۴}\right] J_۱\ (۰/۸۰۶۴)$$

از جدول $C-۱$ داریم $J_۱\ (۰/۸۰۶۴) = ۰/۳۷۱۱۲$، از این رو:

$$\frac{Q}{Q_\circ} = ۰/۴۴۳۶$$

داریم:

$$Q_\circ = \rho\, cV\, \theta_i = (۷۸۰۰)(۴۸۰)\pi(۰/۰۲۵)^۲(۲۵۰-۸۰) = ۱/۲۵\times۱۰^۶ J$$

از این رو:

$$Q = (۰/۴۴۳۶)(۱/۲۵\times۱۰^۶) = ۵/۵۴\times۱۰^۵ \frac{J}{m} \text{ طول}$$

☑جدول $C-۱$ جدول خلاصه توابع بسل نوع اول

u	$J_\circ(u)$	$J_۱(u)$	u	$J_\circ(u)$	$J_۱(u)$
۰/۰	۱/۰	۰/۰	۶/۰	۰/۱۵۰۶۵	-۰/۲۷۶۶۸
۰/۲	۰/۹۹۰۰۳	۰/۰۹۹۵۰	۶/۲	۰/۲۰۱۷۵	-۰/۲۳۲۹۲
۰/۴	۰/۹۶۰۴۰	۰/۱۹۶۰۳	۶/۴	۰/۲۴۳۳۱	-۰/۱۸۱۶۴
۰/۶	۰/۹۱۲۰۰	۰/۲۸۶۷۰	۶/۶	۰/۲۷۴۰۴	-۰/۱۲۴۹۸
۰/۸	۰/۸۴۶۲۹	۰/۳۶۸۸۴	۶/۸	۰/۲۹۳۱۰	-۰/۰۶۵۲۲
۱/۰	۰/۷۶۵۲۰	۰/۴۴۰۰۵	۷/۰	۰/۳۰۰۰۸	-۰/۰۰۴۶۸
۱/۲	۰/۶۷۱۱۳	۰/۴۹۸۲۹	۷/۲	۰/۲۹۵۰۷	۰/۰۵۴۳۲
۱/۴	۰/۵۶۶۸۶	۰/۵۴۱۹۵	۷/۴	۰/۲۷۸۶۰	۰/۱۰۹۶۳
۱/۶	۰/۴۵۵۴۰	۰/۵۶۹۹۰	۷/۶	۰/۲۵۱۶۰	۰/۱۵۹۲۱
۱/۸	۰/۳۳۹۹۹	۰/۵۸۱۵۲	۷/۸	۰/۲۱۵۴۱	۰/۲۰۱۳۶
۲/۰	۰/۲۲۳۸۹	۰/۵۷۶۷۲	۸/۰	۰/۱۷۱۶۵	۰/۲۳۴۶۴
۲/۲	۰/۱۱۰۳۶	۰/۵۵۵۹۶	۸/۲	۰/۱۲۲۲۲	۰/۲۵۸۰۰
۲/۴	۰/۰۰۲۵۱	۰/۵۲۰۱۹	۸/۴	۰/۰۶۹۱۶	۰/۲۷۰۷۹
۲/۶	-۰/۰۹۶۸۱	۰/۴۷۰۸۲	۸/۶	۰/۰۱۴۶۲	۰/۲۷۲۷۵
۲/۸	-۰/۱۸۵۰۴	۰/۴۰۹۷۰	۸/۸	-۰/۰۳۹۲۳	۰/۲۶۴۰۷
۳/۰	-۰/۲۶۰۰۵	۰/۳۳۹۰۶	۹/۰	-۰/۰۹۰۳۳	۰/۲۴۵۳۱
۳/۲	-۰/۳۲۰۱۹	۰/۲۶۱۳۴	۹/۲	-۰/۱۳۶۷۵	۰/۲۱۷۴۱
۳/۴	-۰/۳۶۴۳۰	۰/۱۷۹۲۳	۹/۴	-۰/۱۷۶۷۷	۰/۱۸۱۶۳
۳/۶	-۰/۳۹۱۷۷	-۰/۰۹۵۴۷	۹/۶	-۰/۲۰۸۹۸	۰/۱۳۹۵۲
۳/۸	-۰/۴۰۲۵۶	۰/۰۱۲۸۲	۹/۸	-۰/۲۳۲۲۸	۰/۰۹۲۸۴
۴/۰	-۰/۳۹۷۱۵	-۰/۰۶۶۰۴	۱۰/۰	-۰/۲۴۵۹۴	۰/۰۴۳۴۷
۴/۲	-۰/۳۷۶۵۶	-۰/۱۳۸۶۵	۱۰/۲	-۰/۲۴۹۶۲	-۰/۰۰۶۶۲
۴/۴	-۰/۳۴۲۲۶	-۰/۲۰۲۷۸	۱۰/۴	-۰/۲۴۳۳۷	-۰/۰۵۵۴۷
۴/۶	۰/۲۹۶۱۴	-۰/۲۵۶۵۵	۱۰/۶	-۰/۲۲۷۶۴	-۰/۱۰۱۲۳
۴/۸	-۰/۲۴۰۴۳	-۰/۲۹۸۵۰	۱۰/۸	-۰/۲۰۳۲۰	-۰/۱۴۲۱۷
۵/۰	-۰/۱۷۷۶۰	-۰/۳۲۷۶۰	۱۱/۰	-۰/۱۷۱۱۹	-۰/۱۷۶۷۹
۵/۲	-۰/۱۱۰۲۹	-۰/۳۴۳۲۲	۱۱/۲	-۰/۱۳۲۹۹	-۰/۲۰۳۸۵
۵/۴	-۰/۰۴۱۲۱	-۰/۳۴۵۳۴	۱۱/۴	-۰/۰۹۰۲۱	-۰/۲۲۲۴۵
۵/۶	۰/۰۲۶۹۷	-۰/۳۳۴۳۳	۱۱/۶	-۰/۰۴۴۶۲	-۰/۲۳۲۰۰
۵/۸	۰/۰۹۱۷۰	-۰/۳۱۱۰۳	۱۱/۸	۰/۰۰۱۹۷	-۰/۲۳۲۲۹
			۱۲/۰	۰/۰۴۷۶۹	-۰/۲۲۳۴۵

☑جدول $C-2$ ضرایب جواب‌های حل

$\frac{hL}{k}$	صفحه نامتناهی		استوانهٔ بلند		کره	
$\frac{hr_o}{k}$	A_B	C_B	A_B	C_B	A_B	C_B
۰/۰۱	۰/۰۹۹۸	۱/۰۰۱۷	۰/۱۴۱۲	۱/۰۰۲۵	۰/۱۷۳۰	۱/۰۰۳۰
۰/۰۲	۰/۱۴۱۰	۱/۰۰۳۳	۰/۱۹۹۵	۱/۰۰۵۰	۰/۲۴۴۵	۱/۰۰۶۰
۰/۰۴	۰/۱۹۸۷	۱/۰۰۶۶	۰/۲۸۱۴	۱/۰۰۹۹	۰/۳۴۵۰	۱/۰۱۲۰
۰/۰۶	۰/۲۴۲۵	۱/۰۰۹۸	۰/۳۴۳۸	۱/۰۱۴۸	۰/۴۲۱۷	۱/۰۱۷۹
۰/۰۸	۰/۲۷۹۱	۱/۰۱۳۰	۰/۳۹۶۰	۱/۰۱۹۷	۰/۴۸۶۰	۱/۰۲۳۹
۰/۱	۰/۳۱۱۱	۱/۰۱۶۱	۰/۴۴۱۷	۱/۰۲۴۶	۰/۵۴۲۳	۱/۰۲۹۸
۰/۲	۰/۴۳۲۸	۱/۰۳۱۱	۰/۶۱۷۰	۱/۰۴۸۳	۰/۷۵۹۳	۱/۰۵۹۲
۰/۳	۰/۵۲۱۸	۱/۰۴۵۱	۰/۷۴۶۵	۱/۰۷۱۲	۰/۹۲۰۸	۱/۰۸۸۰
۰/۴	۰/۵۹۳۲	۱/۰۵۸۰	۰/۸۵۱۶	۱/۰۹۳۱	۱/۰۵۲۸	۱/۱۱۶۴
۰/۵	۰/۶۵۳۳	۱/۰۷۰۱	۰/۹۴۰۸	۱/۱۱۴۳	۱/۱۶۵۶	۱/۱۴۴۱
۰/۶	۰/۷۰۵۱	۱/۰۸۱۴	۱/۰۱۸۵	۱/۱۳۴۵	۱/۲۶۴۴	۱/۱۷۱۳
۰/۷	۰/۷۵۰۶	۱/۰۹۱۹	۱/۰۸۷۳	۱/۱۵۳۹	۱/۳۵۲۵	۱/۱۹۷۸
۰/۸	۰/۷۹۱۰	۱/۱۰۱۶	۱/۱۴۹۰	۱/۱۷۲۴	۱/۴۳۲۰	۱/۲۲۳۶
۰/۹	۰/۸۲۷۴	۱/۱۱۰۷	۱/۲۰۴۸	۱/۱۹۰۲	۱/۵۰۴۴	۱/۲۴۸۸
۱/۰	۰/۸۶۰۳	۱/۱۱۹۱	۱/۲۵۵۸	۱/۲۰۷۱	۱/۵۷۰۸	۱/۲۷۳۲
۲/۰	۱/۰۷۶۹	۱/۱۷۸۵	۱/۵۹۹۵	۱/۳۳۸۴	۲/۰۲۸۸	۱/۴۷۹۳
۳/۰	۱/۱۹۲۵	۱/۲۱۰۲	۱/۷۸۸۷	۱/۴۱۱۹	۲/۲۸۸۹	۱/۶۲۲۷
۴/۰	۱/۲۶۴۶	۱/۲۲۸۷	۱/۹۰۸۱	۱/۴۶۹۸	۲/۴۵۵۶	۱/۷۲۰۲
۵/۰	۱/۳۱۳۸	۱/۲۴۰۳	۱/۹۸۹۸	۱/۵۰۲۹	۲/۵۷۰۴	۱/۷۸۷۰
۶/۰	۱/۳۴۹۶	۱/۲۴۷۹	۲/۰۴۹۰	۱/۵۲۵۳	۲/۶۵۳۷	۱/۸۳۳۸
۷/۰	۱/۳۷۶۶	۱/۲۵۳۲	۲/۰۹۳۷	۱/۵۴۱۱	۲/۷۱۶۵	۱/۸۶۷۴
۸/۰	۱/۳۹۷۸	۱/۲۵۷۰	۲/۱۲۸۶	۱/۵۵۲۶	۲/۷۶۵۴	۱/۸۹۲۰
۹/۰	۱/۴۱۴۹	۱/۲۵۹۸	۲/۱۵۶۶	۱/۵۶۱۱	۲/۸۰۴۴	۱/۹۱۰۶
۱۰/۰	۱/۴۲۸۹	۱/۲۶۲۰	۲/۱۷۹۵	۱/۵۶۷۷	۲/۸۳۶۳	۱/۹۲۴۹
۲۰/۰	۱/۴۹۶۱	۱/۲۶۹۹	۲/۲۸۸۱	۱/۵۹۱۹	۲/۹۸۵۷	۱/۹۷۸۱
۳۰/۰	۱/۵۲۰۲	۱/۲۷۱۷	۲/۳۲۶۱	۱/۵۹۷۳	۳/۰۳۷۲	۱/۹۸۹۸
۴۰/۰	۱/۵۳۲۵	۱/۲۷۲۳	۲/۳۴۵۵	۱/۵۹۹۳	۳/۰۶۳۲	۱/۹۹۴۲
۵۰/۰	۱/۵۴۰۰	۱/۲۷۲۷	۲/۳۵۷۲	۱/۶۰۰۲	۳/۰۷۸۸	۱/۹۹۶۲
۱۰۰/۰	۱/۵۵۵۲	۱/۲۷۳۱	۲/۳۸۰۹	۱/۶۰۱۵	۳/۱۱۰۲	۱/۹۹۹۰

نرم افزار انتقال گرما

❑ D-۱ مقدمه

بسته نرم‌افزاری انتقال گرمای همراه این کتاب توسط پروفسور آلن دی.کراوس Alan D.Kraus از مدرسه پیش فارغ‌التحصیلی دریایی تهیه شد و قبلاً به‌صورت محصول جداگانه‌ای از طرف شرکت انتشاراتی مک گروهیل ارائه شد. برنامه‌ها را می‌توان در دو حالت اساسی به کاربرد:

۱. به صورت ابزاری محاسباتی برای پدیده‌های مختلف انتقال گرما. در این مورد سیستم را مطابق دستور راه‌اندازی، به‌طورخودکار راه‌اندازی کنید، *boot up* و فهرست انتخاب را دنبال کنید.

۲. به صورت وسیله‌ای آموزشی در مسائل طراحی گرمایی. مسائل تشریحی این پیوست شامل نمونه‌های متنوع است که توان کامپیوتر در طراحی انتقال گرما را به نمایش می‌گذارند.

علی‌رغم اشتیاقی که این نرم‌افزار ممکن است ایجاد کند یادآور می‌شویم که :

برنامه‌های کامپیوتری جای‌گزینی برای درک موضوع انتقال گرما نیستند.

این گفته به این معنی است که هم دانش‌جویان و هم مدرسان باید ابتدا درکی از نظریه و هنر پشت معادلات ارائه شده در این فصل به‌دست آورند تا سود بیشینه را از برنامه نرم‌افزاری ببرند.

در این پیوست ابتدا پس از بحث در مورد چگونگی برپایی *set up* برنامه برای کار، شرح مختصری در مورد هر برنامه ارائه می‌کنیم و آنگاه مسائلی را ارائه می‌کنیم که با فصل‌های کتاب گره خورده‌اند یا از نوع طراحی انتها باز هستند.

توجه داشته باشید که فصل های کتاب قائم به ذات هستند بدون اینکه اصلاً به نرم‌افزار وابسته باشند. برعکس، کاربرد درست نرم‌افزار به درک کامل نظریهٔ انتقال بستگی دارد که در فصل‌های کتاب ارائه شده است.

❑ D-۲ برپا کردن برنامه

برای دیسک برنامه که همراه کتاب است به یک کامپیوتر *IBM PC* یا سازگار با *IBM* و ۲۵۶ *K* حافظه و سیستم عامل *DOS* ویرایش ۲/۰ یا بالاتر نیاز است. کپی سخت از خروجی‌های برنامه را می‌توان در صورتی که چاپگر به کامپیوتر وصل باشد تهیه کرد. دستگاه شامل دو گروه برنامه است: *PROG1* ، با

A. ارزیابی عملکرد پره
B. دما در گوشه
C. دماهای گذرا در یک دال
D. دماهای گذرا در جسم جامد نیمه متناهی
E. خواص هوا و جریان هوا روی صفحه‌ای تخت
F. ضرایب جابه‌جایی اجباری
و *PROG2* ، با برنامه‌های
G. ضرایب جابه‌جایی اجباری یا طبیعی
H. توابع تابش
I. شبکه تابشی
K. ضریب تأثیر مبدل گرمایی
L. آرایش‌های جریان مبدل گرمایی برای بازیافت گرمای زیاد شده

برای راه‌اندازی برنامه‌ها، ابتدا کامپیوتر را با سیستم عامل راه‌اندازی کنید تا پیام‌واره $A>$ ظاهر شود ($B<$ اگر دیسک ران *B* برای دیسک به‌کار می‌رود). سپس یکی از برنامه‌های زیر را فرا بخوانید تا برنامه راه اندازی شود.

$A>\ PROG1$ یا $A>\ PROG2$

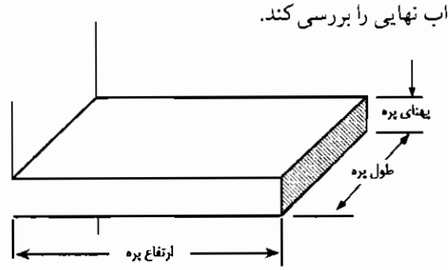
❑ D-۳ مستندسازی دوازده برنامه

برنامه A : ارزیابی عملکرد پره

در این برنامه از رابطه پره فصل ۲ برای محاسبه ضرایب مختلف عملکرد استفاده می‌شود. فهرست انتخاب توضیح سر خود است و نام‌گذاری پره در شکل $D-1$ داده شده است.

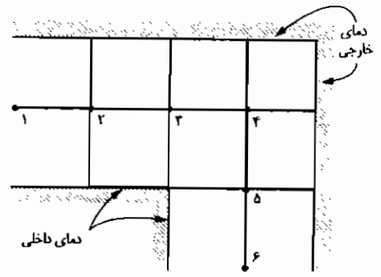
برنامه B: دماهای گوشه

این برنامه کاربرد فن تکرار گوس سایدل فصل ۳ را به نمایش می‌گذارد. دو انتخاب برای نموهای گرهی موجودند: ۶ گره مطابق شکل $D-2$ ، و ۳۳ گره مطابق شکل $D-3$. کاربر می‌تواند مقادیر مختلف ضریب هدایت گرمایی، دماهای داخل و بیرون دیوار و حدس اولیه‌ای برای دماهای گرهی برای راه‌اندازی تکرار، انتخاب کند. با اجرا کردن چند مورد، کاربر می‌تواند اثر تعداد گره بر دقت نتایج و اثر حدس دمایی اولیه بر تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به جواب نهایی را بررسی کند.

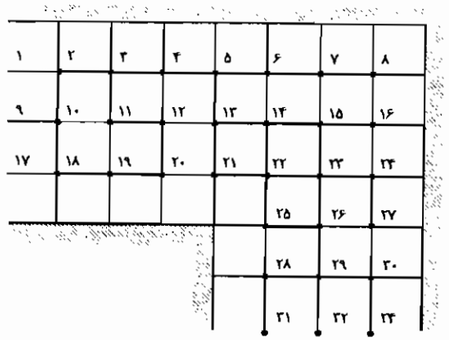


شکل $D-1$ پره طولی با نیم‌رخ مستطیلی. ارتفاع پره با طول L، عرض با ضخامت t، و طول با عمق z فصل ۲ متناظر است.

کاربر می‌تواند در معرض ناگهانی محیط جابه‌جایی یا تغییر ناگهانی دمای سطحی که با $h \to \infty$ متناظر است،نمونه‌هایی را نیز انتخاب کند. کاربر برای رسیدن به زمان نهایی ۹۰۰ s باید مقادیر $\Delta\tau$ای انتخاب کند که تقسیمات زوج این مقدار است: ۲۲۵، ۱۱۲/۵، ۵۶/۲۵ s، و الی آخر. برنامه به‌طور خودکار انتخاب‌هایی را رد می‌کند که با محک پایداری فصل ۴ سازگاری ندارند که برحسب مقادیر قابل قبول مدول فوریه بیان می‌شوند. بالاخره اینکه، این برنامه مقدار تحلیلی دمای خط مرکزی را برای مقایسه با جواب عددی محاسبه می‌کند.



شکل D–۲ مدل شش گره گوشه کانال مستطیلی.



شکل D–۳ مدل گرهی سی‌وسه کانال مستطیلی.

برنامه D : دماهای گذرا در جسم نیمه متناهی

این برنامه دماهای مورد اشاره برای سه مورد زیر را محاسبه می‌کند:

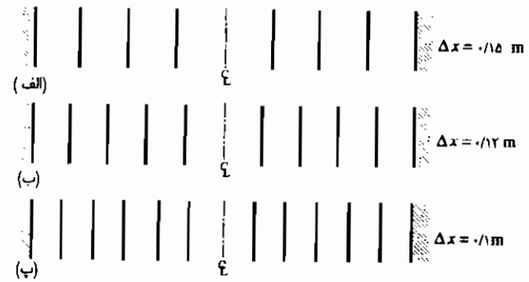
۱. تغییر ناگهانی دمای سطح مطابق معادلهٔ (۴-۸)
۲. قرارگرفتن در معرض ناگهانی شارگرمایی سطحی ثابت مطابق معادلهٔ (۴-۱۳)
۳. قرارگرفتن در معرض ناگهانی محیط جابه‌جایی مطابق معادله (۴-۱۵) و شکل (۴-۵)

این برنامه مقادیر تابع خطای شناسه‌های مختلف را نیز محاسبه می‌کند.

برنامهٔ C: دماهای گذرا در یک دال

این برنامه چگونگی کاربرد فن عددی در تعیین پخش دما در دال یک بعدی را مطابق شکل D–۴ نشان می‌دهد. این برنامه برای مجموعه شرایط زیر کار می‌کند:

ضخامت کل = (از شکل ۴-۶ الف $2L$) ۱/۲m
ضریب هدایت گرمایی = ۱۵۰ $\frac{W}{m.°C}$
چگالی = ۲۵۰۰ $\frac{kg}{m^3}$
گرمای ویژه = ۱۰۰۰ $\frac{J}{kg.°C}$
زمان کلی = ۹۰۰ s



شکل D–۴ سه مدل برای تحلیل عددی گذرای دال تخت؛ (الف) هشت زیر لایه، (ب) ده زیر لایه، (پ) دوازده زیر لایه. ضخامت کل در هر مورد ۱/۲m است.

برنامهٔ E : خواص هوا و جریان هوا روی صفحه‌ای تخت

این برنامه خواص هوا را مطابق جدول A–۵ برای دماهای بین ۲۵۰ و ۵۰۰ K محاسبه می‌کند. انتقال گرما برای جریان هوا روی صفحه‌ای تخت را برای هر دو حالت آرام و ناآرام نیز با استفاده از معادلات جدول ۵-۲ حساب می‌کند. تدارکی هم برای محاسبهٔ ضخامت لایه مرزی شده است.

برنامهٔ F : ضرایب جابه‌جایی اجباری

برنامهٔ F مقدار انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری را مطابق معادله فصل ۶ و جدول ۶-۸ محاسبه می‌کند. این برنامه خواص سیالات هوا و آب را برای مقایسه با جدول‌های A–۵ و A–۹ حساب می‌کند. محدودهٔ دما بین ۲۵۰ و ۵۰۰ K برای هوا و از ۰ تا ۱۰۴/۴°C برای آب مایع اشباع است. کاربر باید برای سایر سیالات خواص را جای‌گزین کند (خواصی که از جدول‌های پیوست A یا از سایر منابع به‌دست می‌آیند). البته فهرست انتخاب توضیح سرخود است.

کاربر ممکن است بخواهد به‌عنوان تمرین، موارد زیر را بررسی کند:

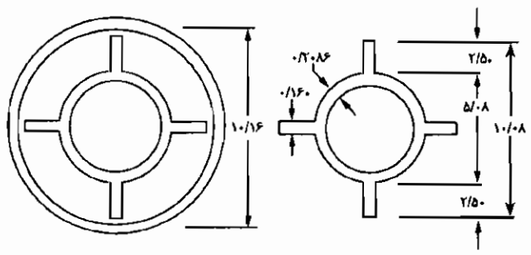
F–۱ درگذرگاه حلقوی پره‌دار شکل D–۵ روغن موتور مصرف نشده در ۲ $\frac{m}{s}$ به دمای کپه‌ای ۸۰°C جاری است. فرض کنید دمای دیواره لوله ۶۰°C است و

ضریب انتقال گرما را به شرطی محاسبه کنید که طول شکل بندی ۲m باشد. کاربر باید برای این محاسبه ابتدا قطر هیدرولیکی گذرگاه پره‌دار را با استفاده از تعریف معادلهٔ (۶-۱۴) تعیین کند.

F–۲ داخل لولهٔ شکل D–۵ گلیکول اتیلن با سرعت متوسط ۴ $\frac{m}{s}$ و دمای کپه‌ای ۴۰°C جاری است. طول شکل‌بندی ۲m است. ضریب انتقال گرما چه‌قدر است؟

برنامه G : ضرایب جابه‌جایی آزاد یا طبیعی

این برنامه از معادله‌های فصل ۷ و جدول ۷-۴ برای محاسبه مقدار انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد استفاده می‌کند که هوا یا آب سیال عامل است. خواص هوا و آب در برنامه وجود دارد و با جدول‌های A–۵ و A–۹ سازگار است. محدودهٔ دمایی مجاز ۲۵۰ تا ۵۰۰ K



شکل D–۵ آرایش لولهٔ دوتایی که لوله داخلی چهار پره طولی خارجی با نیم‌رخ مستطیلی دارد. همه ابعاد به سانتی‌متر است.

برای هوا و ۰ تا ۱۰۴/۴°C برای آب مایع اشباع است. این برنامه به کاربر اجازه می‌دهد که تابش از سطح و هم‌چنین انتقال گرمای جابه‌جایی آزاد را در نظر بگیرد. مقدار انتقال گرمای تابشی در بسیاری از مسائل جابه‌جایی آزاد با اتلاف جابه‌جایی قابل مقایسه است. محاسبه تابش برای سطحی محدب محصور در محفظه‌ای بزرگ به دمای محیط مطابق معادلهٔ (۸-۴۳ الف) انجام می‌شود. به هر حال، فهرست انتخاب توضیح سرخود است.

کاربر ممکن است به‌عنوان تمرین بخواهد با مسائل طراحی زیر کار کند.

G–۱ جعبهٔ قطعات الکترونیکی را در نظر بگیرید که در شکل D–۶ با ابعاد نمایش داده شده است. فرض کنید تمام سطوح در انتشار گرمای جابه‌جایی آزاد و تابش مؤثرند. اثر ساختار سوار کردن که به‌صورت مسیر جریان گرما به محیط عمل می‌کند را می‌توان نادیده گرفت.

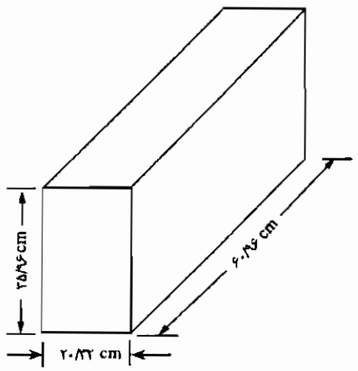
این قطعات ۳۲۵ W منتشر می‌کند و دمای سطح جعبه نباید به خاطر نیازهای اطمینان از ۱۰۰°C تجاوز کند. روی جعبه را رنگی زده‌اند که ضریب گسیل آن ۰/۶۲ است و باید در چاه چرخ هواپیمای جتی در (۱) سطح دریا (p = ۱ atm) با دمای محیط ۷۱°C و (۲) در ارتفاعی که فشار ۰/۱۵ atm و دمای محیط ۵۵°C است کار کند.

وظیفه شما تحلیل انتقال گرما در دو محیط با هوای ساکن است. نخست دمای سطحی ۱۰۰°C در حالت سطح دریا را به کار برده، انتشار گرما را ملاحظه کنید. کل به‌دست آمده بیش‌تر، مساوی، یا کم‌تر از ۳۲۵ W است.

اگر با دمای ۱۰۰°C به انتشار گرمای ۳۲۵ W نرسیم دو راه داریم: (۱) کم کردن دمای محیط یا (۲) رنگ کردن جعبه با ضریب گسیل بالاتر.

نخست بیشینهٔ مجاز دمای محیط را پیدا کنید. آن‌گاه روش را تکرار کنید و جوابی (در صورت وجود) برای دمای محیط ۷۱°C ولی با ضریب گسیل بالاتر پیدا کنید. پس از انجام این کار، کل فرآیند را برای حالت فشار ۰/۱۵ atm تکرار کنید.

در مورد اهمیت تابش در این مسأله نظر بدهید.



شکل D–۶ خنک کردن جعبه قطعات الکترونیک.

برنامهٔ H : توابع تابش

این برنامه توابع تابش را مطابق معادلهٔ (۸-۱۲) جسم سیاه پلانک محاسبه می‌کند که در جدول ۸-۱ نشان داده می‌شود. قالب فهرست انتخاب، توضیح سرخود است.

برنامهٔ I : تعیین ضریب شکل تابش

این برنامه ضرایب شکل را مطابق شکل‌های ۸-۱۲ تا ۸-۱۶ و معادلات جدول ۸-۲ محاسبه می‌کند. مخصوصاً توجه کنید که :

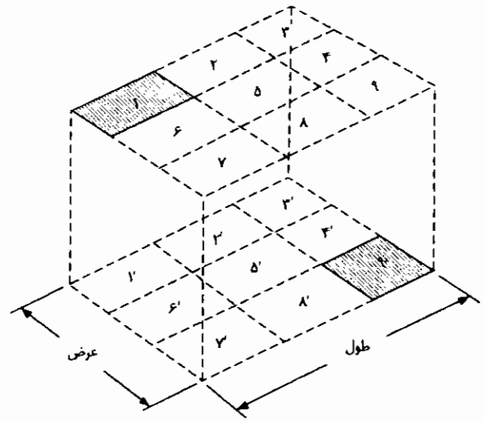
۱. این برنامه F_{12} مستطیل بزرگ‌تر به کوچک‌تر مستطیل‌های عمود بر هم مایل با یال مشترک را محاسبه می‌کند.
۲. این برنامه F_{21} متناظر با شکل ۸-۱۵ را برای استوانه‌های کوتاه محاسبه می‌کند.
۳. این برنامه F_{12} دیسک‌های موازی نابرابر را مطابق نام‌گذاری

شکل ۸-۱۶ محاسبه می‌کند.

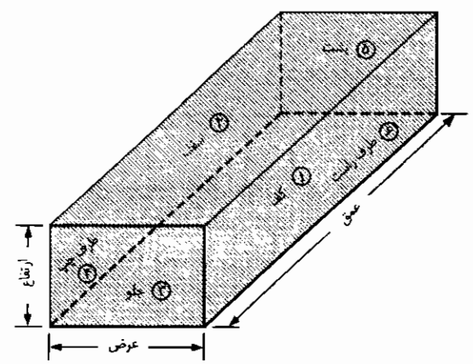
۴. این برنامه $F_{1\text{-}2}$ گوشه‌های مستطیل‌های موازی را مطابق نام‌گذاری شکل D-۷ محاسبه می‌کند. برنامه شانزده ضریب K این آرایش را مطابق معادلهٔ (۸-۳۵) جدول‌بندی می‌کند. این ضرایب به همان ترتیب معادلهٔ (۸-۳۵) در جواب به نمایش در آمده، فهرست می‌شوند.

برنامهٔ J : شبکه تابشی

این برنامه آهنگ‌های انتقال گرما و رادیوسیتی‌های مسألهٔ شش جسمی به شکل اتاق را مطابق شکل D-۸ محاسبه می‌کند. از روش شبکه تابشی فصل ۸ برای این محاسبه همراه با تعیین ضریب شکل برنامهٔ I استفاده می‌شود.



شکل D-۷ نام‌گذاری برای ضریب شکل گوشه‌های مستطیل‌های موازی. ضرایب حاصل ضربی با معادله (۸-۳۵) متناظر هستند.



شکل D-۸ مسألهٔ شبکه تابشی شش جسمی به شکل یک اتاق. سطوح عبارتند از کف،۱؛ سقف،۲؛ دیوار جلو،۳؛ طرف چپ،۴؛ دیوار عقب،۵؛ و طرف راست،۶.

این برنامه می‌تواند به چند نوع مسأله بپردازد، مثلاً:

۱. مسألهٔ شش جسمی با دماها و ضرایب گسیل مشخص تمام سطوح.
۲. محصور در سطحی بسیار بزرگ که به‌صورت $\varepsilon \to 1/0$ رفتار می‌کند. زیرا $A \to \infty$ و مقاومت سطح به صفر نزدیک می‌شود.
۳. سطوح مقعر وقتی که ضریب شکل به مقدار صفحهٔ تخت معادل آن که سوراخ را می‌پوشاند تبدیل می‌شود، با ضریب گسیل ظاهری بحث شده در فصل ۸ (مسألهٔ ۸-۱۵۲).
۴. سطحی عایق‌شده که مثل آن عمل می‌کند که گویی $\rho \to 1/0$، $\varepsilon \to 0$، مقاومت سطحی به ∞ نزدیک می‌شود، و رادیوسیتی محاسبه شده به توان گسیل جسم سیاه سطح عایق‌شده نزدیک می‌شود.

در استفاده از این برنامه، سطح عایق‌شده به ازای مقدار خیلی پایین ضریب گسیل ورودی (مثلاً ۰/۰۰۱) و دمایی بررسی می‌شود که برابر مقدار متوسط تقریبی دماهای سایر سطوح است. حاصل برنامه مقدار کوچکی برای انتقال گرمای این سطح است که نشان می‌دهد $J = E_b$ (برای $q = 0$). دمای حاصل برای سطح عایق‌شده را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$T = \left(\frac{J}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} (\mathrm{K})$$

که J رادیوسیتی نمایش‌یافته برای سطح عایق‌شده است.

توجه دارید که حاصل جمع مقادیر انتقال گرمای شش سطح، $\sum q_i$، دقیقاً صفر نیست. این از گرد کردن در تعیین ضرایب شکل تابشی و جواب ماتریسی حاصل از آن نتیجه می‌شود. با توجه به عدم اطمینان در مورد ضرایب گسیل، این خطا صرف‌نظر کردنی است.

برنامه K : ضریب تأثیر مبدل گرمایی

این برنامه از روش ضریب تأثیر – NTU مورد بحث در فصل ۱۰ و معادله‌های جدول‌های ۱۰-۳ و ۱۰-۴ استفاده می‌کند که در شکل‌های ۱۰-۱۲ تا ۱۰-۱۷ رسم شده‌اند. فهرست انتخاب برنامه توضیح سرخود است اما توجه داریم که کاربر چند اختیار دارد:

۱. شخصی می‌تواند نوعی مبدل انتخاب کند و ضریب تأثیر را از مساحت، ضریب انتقال گرمای کلی، و داده‌های جریان مبدل تعیین کند، یا
۲. شخص می‌تواند مساحت لازم مبدل را از ضریب تأثیر مورد نیاز، ضریب انتقال گرمای کلی، و داده‌های جریان تعیین کند، یا
۳. شخص می‌تواند ضریب تأثیر و داده‌های دما را از جریان و

داده‌های NTU داده شده تعیین کند، یا ۴. شخص می‌تواند NTU مورد نیاز را از داده‌های دما و جریان داده شده تعیین کند.

برنامه در هر یک از این اختیارها می‌تواند پنج نوع مبدل گرمایی را بررسی کند:

۱. جریان مخالف
۲. جریان موازی
۳. جریان متقاطع با سیالات آمیخته و نیامیخته
۴. مبدل پوسته و لوله با یک پاس پوسته، n-۱ مبدل معروف، که n عددی زوج است
۵. مبدل‌های با یک سیال به دمای ثابت که در مسائل جوش یا چگالش با آن روبه‌رو هستیم.

برنامهٔ L : آرایش جریان مبدل گرمایی برای بازیافت بیش‌تر گرما

این برنامه طراحی دو هدف دارد: (۱) نشان دهد که چگونه دو عملکرد گرمایی و نیازهای فشار-اتلاف منجر به انتخاب مبدل گرمایی می‌شود و (۲) نشان دهد که چگونه آرایش سیال مبدل گرمایی می‌تواند بر بازیافت گرمایی نهایی اثر بگذارد.

داده‌ها

داده‌های این برنامه همراه آن است. اساساً، مقدار جریان‌های سیال گرم و سیال سرد، گرماهای ویژه، و دماهای ورودی در برنامه وجود دارند. به‌علاوه، این برنامه مبدلی با تعداد لوله ثابت را بررسی می‌کند که می‌تواند با دیوارک گذاری مناسب در طرف لوله، جریان مخالف چند آرایش n-۱ (n زوج) را امکان‌پذیر سازد.

کاربر می‌تواند نوعی مبدل انتخاب و طول لوله را بین حدود ۳/۵ m و ۷/۰ m تنظیم کند. طول اصلی لوله در برنامه ۵/۵ m گذاشته شده است.

تمام داده‌های مورد نیاز در برنامه برای حل خوب مسألهٔ طراحی، نمایش داده می‌شود و پیوسته در دسترس کاربر قرار می‌گیرد. به روشنی نشان می‌دهد که وقتی تعداد پاس‌ها زیاد می‌شود، سرعت سمت لوله زیاد می‌شود تا مقدار ضریب انتقال گرما بیش‌تر شده، دمای خروجی طرف گرم پایین‌تر شود. این افزایش سرعت موجب افزایش افت فشار در طرف لوله نیز می‌شود. کاربر می‌تواند ببیند که وقتی تعداد پاس‌های لوله زیاد می‌شود، اتلاف خم بیش‌تر و بیش‌تر اهمیت می‌یابد.

طرز کار

دستورالعمل‌های فهرست انتخاب را دنبال کرده، بهترین مبدلی (کوتاه‌ترین) را انتخاب کنید که دمای بیشینه خروجی طرف گرم آن ۳۶/۵°C و اتلاف فشار بیشینه طرف لوله آن ۴۰ kPa است. بهترین مبدل آن است که کوتاه‌ترین طول را در عملکرد یاد شده، داشته باشد. پس از پایان برنامه، نتایج را در قالب مناسبی خلاصه کنید.

مسائل با استفاده از نرم‌افزار انتقال گرما

D-۱ *مسألهٔ طراحی پره*

پره‌ای طولی با نیم‌رخ مستطیلی مطابق شکل D-۱ ساخته شده است و ارتفاع پره = ۴ cm، طول پره = ۱۰۰ cm، و عرض پره = ۰/۲۲۸ cm. شما دو انتخاب برای ماده با خواص زیر دارید:

	Al	Mg
k , $\frac{W}{m \cdot °C}$	۲۰۲	۱۵۴
چگالی ρ , $\frac{kg}{m^3}$	۲۷۱۰	۱۷۵۰

ابعاد پره را باید اصلاح کرد تا ***کمینهٔ وزن پره دارای اهمیت عمده شود.*** برای اجرای فرآیند طراحی، طرز کار زیر را دنبال کنید.

۱. جریان گرما، بازده پره، و وزن دو پره در شکل‌بندی اساسی را برای $h = 50 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$ و اختلاف دمای پایه به محیط ۱۰۰°C مقایسه کنید.
۲. عرض پره منیزیمی را افزایش دهید (با ثابت نگه‌داشتن ارتفاع پره ۴ cm) تا جریان گرما با مقدار آن در پره آلومینیمی مرحله ۱ یکسان شود. به وزن و بازده پره توجه کنید و در مورد آن اظهار نظر کنید.
۳. به شکل‌بندی اصلی مرحله ۱ برگشته، ارتفاع پره منیزیمی را افزایش دهید (با ثابت نگه داشتن عرض در ۰/۲۲۸ cm) تا جریان برابر جریان پره آلومینیمی در مرحله ۱ شود. مجدداً به وزن و بازده پره توجه کرده، در مورد آنها اظهار نظر کنید و بین پره‌های منیزیمی مرحله‌های ۱ و ۲ مقایسه‌ای انجام دهید.
۴. مرحله ۲ یا ۳ را به‌عنوان پایهٔ مقایسه پره‌های منیزیمی و آلومینیمی انتخاب کنید. انتخاب روشنی در اینجا وجود دارد (محک وزن را به خاطر آورید). قبل از ادامه کار، در مورد مقایسه بازده پره اظهار نظر کنید.
۵. بر پایه انتخاب مرحله ۴ کار را ادامه داده، هر دو پره منیزیمی و آلومینیمی را به ازای ضرایب انتقال گرمای $h = 40 \frac{W}{m^2 \cdot °C}$ و ۳۰ و ۲۰ و ۱۰ بررسی کنید. در مورد اینکه کدام یک از دو پره عملکرد بهتری دارد اظهارنظر کنید.
۶. این پرسش پیش می‌آید که اگر کوشش شود تصویر وزن با تراش مقداری فلز بهبود یابد چه اتفاقی می‌افتد. برای این کار به بررسی پره‌های مثلثی می‌رسیم. ارتفاع پره‌های آلومینیمی و منیزیمی مورد نیاز برای رسیدن به همان مقدار جریان انتقال پره آلومینیم در مرحلهٔ

۱ را به ازای مقدار اصلی $h = ۵۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ و عرض پایه اصلی ۰/۲۸۸ cm تعیین کنید. وزن و بازده پره را مقایسه و اظهار نظر کنید.

۷. این بار دو پره مرحلهٔ ۶ را در مقادیر انتقال گرماهای $\frac{W}{m^{۲}.°C}$ ۴۰ و ۳۰ و ۲۰ و ۱۰ $h =$ مقایسه و در مورد اینکه کدام پره عملکرد بهتری دارد اظهار نظر کنید.

۸. شما اطلاعات زیادی جمع‌آوری کرده‌اید و اکنون در موقعیتی هستید که در مورد نوع پره مورد کاربرد توصیه کنید: مستطیلی آلومینیمی، مثلثی آلومینیمی، مستطیلی منیزیمی، یا مثلثی منیزیمی. توصیه خود را اعلام کنید.

۹. فرض کنید که ضریب انتقال گرما در شکل‌بندی اصلی شکل $D-۱$ و مرحلهٔ ۱ به $h = ۳۵۰ \frac{W}{m^{۲}.°C}$ تغییر یابد. مقدار جریان گرما را برای هر دو پرهٔ آلومینیمی و منیزیمی به‌ازای این مقدار ضریب انتقال گرما دوباره محاسبه کنید. سپس سعی کنید با هر روشی که مایلید، یعنی افزایش عرض یا ارتفاع یا هر دو، پره منیزیمی را مجبور به انتشار همان مقدار گرما در این مقدار h کنید.پس از پایان کار، در مورد استفاده از پره منیزیمی در مقدار ضریب انتقال گرمای بالاتر اظهار نظر کنید.

D–۲ دماها و جریان‌های گرما در گوشه

کانالی را مطابق شکل‌های $D-۲$ و $D-۳$ ساخته‌اند. ابعاد داخلی ۱/۰ در ۲/۰ m و ابعاد خارجی ۳/۰ در ۴/۰ m است. مقطع گوشه را طبق طرز کار زیر تحلیل کنید:

۱. پس از انتخاب چارچوب واحدها، از کامپیوتر بخواهید که اختیار ۱ را به شما بدهد. حال با مسألهٔ شش گرهی کار می‌کنید.

۲. مقادیر ضریب هدایت گرمایی، دماهای دیوارهای داخل و خارج، دمای راه‌اندازی اولیه را وارد کنید.

۳. مقدار هر شش دما و دو جریان گرما یعنی جریانی که از داخل وارد دیوار می‌شود و جریانی که در بیرون، از دیوار خارج می‌شود را ثبت کنید. در مورد هر اختلافی که در این جریان‌های گرما می‌بینید بحث کنید.

۴. به بخش اختیار برگشته، این بار اختیار ۲ را انتخاب کنید. اکنون با مسأله ۳۳ گرهی کار می‌کنید. همان داده‌های ورودی را حفظ کنید غیر از دمای راه‌اندازی اولیه که باید آن‌را ۰°C یا ۰°F قرار دهید.

۵. مقدار دما در گره‌های ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۲۶ و ۳۲ را ثبت کنید. این‌ها متناظرند با شش گره در نظر گرفته شده در اختیار ۱. مقادیر دو جریان گرما را نیز ثبت کنید.

۶. فرآیند مرحلهٔ ۵ را هر بار با تعویض دمای راه‌اندازی اولیه به مقادیر ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰ و ۴۰۰ تکرار کنید. مقادیر دماهای اولیه و تعداد تکرارهای مورد نیاز در این راه‌حل را ثبت کنید.

۷. در مورد دقت حاصل در مسأله ۳۳ گره (اختیار ۲) اظهار نظر کرده، بگویید آیا نیازی به اصلاح باز هم بیش‌تر نمو هست. در مورد اینکه آیا انتخاب دمای راه‌اندازی اثری بر تعداد تکرار دارد یا نه اظهار نظر کنید.

D–۳ برای تحلیل دماهای گذرا در دال برنامه C باید از طرز کار زیر استفاده کرد.

۱. پس از انتخاب چارچوب واحدها، از کامپیوتر بخواهید که اختیار ۱ را به شما بدهد که دالی را با تغییر دمای ناگهانی در وجوه آن بررسی می‌کند؛ سپس تقاضای مدل دال هشت لایه را بکنید.

۲. هر مقداری می‌خواهید برای دماهای محیطی و اولیه انتخاب کنید. آنها را وارد کنید اما مطمئن شوید که نمو زمانی ۲۲۵ s را برای رسیدن به زمان ۹۰۰ s در چهار نمو زمانی انتخاب کرده‌اید. ببینید چه اتفاقی می‌افتد. چرا ۲۲۵ s انتخاب خوبی نیست؟

۳. نمو زمانی را به ترتیب به ۱۱۲/۵، ۵۶/۲۵، ۲۸/۱۲۵، ۱۴/۰۶۲۵، ۷/۰۳۱۲۵، ۶، ۴، ۳ و ۲ ثانیه تغییر دهید. این اعداد واقعی را وارد کنید تا تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن دقیق به ۹۰۰ s عددی کامل باشد (در این مورد به ترتیب ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۱۵۰، ۲۲۵، ۳۰۰ و ۴۵۰). نتایج را ثبت کنید.

۴. در پایان اجرای نمو ۲ s، به پرسش مربوط به راه‌حل کلاسیک Y یا y (برای «آری») پاسخ دهید. از زمان ۹۰۰ s استفاده کرده، نتیجه را ثبت کنید. این را به عنوان جواب درستی در نظر می‌گیریم که از حل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم تعیین می‌شود.

۵. دوباره با مدل دال ۱۰ لایه شروع کنید و تمام محاسبات را با شروع از نمو زمانی ۱۱۲/۵ s تکرار کنید. تمام نمو‌های زمانی را یادداشت کنید که کامپیوتر برای آنها «مدول فوریه از حد بیرون» می‌دهد. نتایج را ثبت کنید.

۶. از روش یکسانی برای مدل دال ۱۲ لایه استفاده کنید و تمام نقاطی را یادداشت کنید که نمو زمانی آنها از حد بیرون است و نتایج را ثبت کنید.

۷. اکنون مقدار مدول فوریه در تمام نقاطی را یادداشت کنید که پیام خطا برایشان ظاهر می‌شود. در مورد اثر متقابل نمو زمانی و مکانی اظهار نظر کنید.

۸. اکنون اختیار ۲ را بیاورید که شامل ضریب انتقال گرمایی در وجوه دال است. مدل دال ۱۲ لایه را نگه دارید و ضریب انتقال گرمای بزرگ‌تری، مثلاً $\frac{W}{m^{۲}.°C}$ ۳۰۰۰ یا $\frac{Btu}{ft^{۲}.h.°F}$ ۶۰۰ را انتخاب کنید. با نمو زمانی ۹۰ s شروع کنید (۱۰ نمو زوج بگیرید تا به ۹۰۰ s برسید). پیامی دریافت می‌کنید که می‌گوید محاسبه نمی‌تواند ادامه یابد. به ترتیب نمو‌های زمانی کوچک‌تر، مثلاً ۵۶/۱۲۵، ۵۰، ۴۵، ۳۰، ۲۸/۱۲۵، ۲۵، ۲۰، ۱۵، ۱۲، ۹، ۶ و ۵ ثانیه را انتخاب کنید و ببینید کی پیام عوض می‌شود و آن‌گاه کی محاسبه پایان می‌یابد. این نمو زمانی را یادداشت کنید و در مورد اینکه چرا پیام عوض می‌شود اظهار نظر کنید.

۹. بالاخره، مقدار ضریب انتقال گرما را به ازای نمو زمانی مرحله ۸ که تحلیل پایان می‌یابد به ترتیب به مقادیر کوچک‌تر تغییر دهید. این عمل را چهار بار انجام داده، نتایج را ثبت کنید. سپس به ازای یکی از این مقادیر ضریب انتقال گرما تلاش کنید نتیجه را با استفاده از نمودار هیسلر مناسب تأیید کنید.

D–۴ خاک در یک محل معین را می‌توان به صورت جسمی نیمه متناهی با $k = ۱/۰ \frac{W}{m.°C}$، گرمای ویژه $c = ۱۸۴۰ \frac{J}{kg.°C}$، و چگالی $\rho = ۱۵۰۰ \frac{kg}{m^{۳}}$ در نظر گرفت. دما در عمق ۲۵ cm در ۸ بعد از ظهر روز یکشنبه ۱۰°C است و فرض می‌کنیم که دمای خاک در سراسر آن یکنواخت است. دما در عمق ۲۵ cm را با مقطع لوله‌ای اندازه می‌گیرند که حاوی وسیلهٔ ثبت دما است. از برنامهٔ کامپیوتری برای تحقیق در موارد زیر استفاده کرده، نتایج را ثبت کنید.

۱. دمای سطحی در ۸ بعد از ظهر یکشنبه به ۱۰°C- افت می‌کند و تا ۸ صبح دوشنبه در همان‌جا باقی می‌ماند. دمای اولیه، زمان سپری شده، و دمای نهایی در ۲۵ cm را ثبت کنید.

۲. خورشید در ۸ صبح دوشنبه شروع به درخشیدن می‌کند که فرض می‌شود تمام لولهٔ درون خاک به دمای در عمق ۲۵ cm است و شار گرمایی سطحی ثابت مؤثر $۲۴/۸۵ \frac{W}{m^{۲}}$ را تأمین می‌کند و این حالت تا ۴ عصر همان روز ادامه می‌یابد. باز هم دمای اولیه، زمان سپری شده، و دمای نهایی را ثبت کنید.

۳. فرض اینکه تمام لوله درون خاک در دمای یکنواختی است باز هم برای وقتی که خورشید به زیر افق می‌رود، معتبر است و باد سردی از ۴ عصر دوشنبه شروع به وزیدن می‌کند و سرعت آن طوری است که ضریب انتقال گرمای مؤثر $h = ۱۸/۳ \frac{W}{m.°C}$ را به‌وجود می‌آورد. دمای باد ۵°C- است. با دمای اولیه‌ای که در پایان مرحلهٔ ۲ محاسبه می‌شود شروع و دما در ۲۵ cm زیر سطح را در ۸ صبح سه‌شنبه محاسبه کنید. این مقدار را ثبت کنید.

۴. فرض کنید دما در ۸ صبح سه‌شنبه در سراسر لوله درون خاک، مقداری یکنواخت است که در ۲۵ cm محاسبه شد. در این لحظه دمای سطحی به ۱۲°C- افت کرده، تا ۳ صبح جمعه در همان‌جا باقی می‌ماند. آیا دمای لوله به ۰°C می‌رسد؟ اگر می‌رسد، نزدیک‌ترین ساعت تقریبی به آن را (زمان و روز، پیش از ظهر یا عصر) مشخص کنید. این مقادیر را ثبت کنید.

۵. قبل از خروج از این برنامه متوجه باشید که این برنامه می‌تواند مقادیر تابع خطا و تابع خطای مکمل را به ازای شناسه‌ای خاص محاسبه کند. دو شناسه مجاور، مقادیر x، متناظر مقادیری را انتخاب کنید که در جدول $A-۱$ ظاهر می‌شود. از این مقادیر به‌عنوان شناسه استفاده کرده، کامپیوتر را وادارید که $\mathrm{erf}\,x$ و $\mathrm{erfc}\,x$ را تعیین کند. نتیجه حاصل از کامپیوتر را با عدد جدول مقایسه کنید.

۶. بالاخره، شناسه‌ای بین دو مقدار مفروض در نظر گرفته، نتیجهٔ کامپیوتری را به‌دست آورید. دو مقدار جدول $A-۱$ را دستی درون‌یابی کرده، آن را با مقدار محاسبه شده مقایسه کنید. آیا درست است که از درون‌یابی مقادیر جدول برای مسأله‌ای مثل دال نیمه‌متناهی استفاده کنید؟ اظهار نظر کنید.

D–۵ مسأله طراحی حفاظ رادار (Radome)

می‌خواهیم آنتن با آرایه فازی به ارتفاع ۱ m و عرض ۲ m را در ناحیه شمالگان نصب کنیم که می‌توان دمای آن را ۲۰°C- گرفت. لازم است که دمای کمینهٔ سطح، موسوم به حفاظ *radome*، تجهیزات الکترونیک ۱۰°C باشد. این کار با نصب گرم‌کن‌های برقی انجام می‌شود که در پانل‌های ۲۰ × ۲۰ cm در حفاظ قرار می‌دهند. گرم‌کن‌ها باید طوری طرح شوند که با دو توان کار کنند و در باد با سرعت‌های تا $۲۵ \frac{m}{s}$ در راستای عرض ۲ متری، گرما را به تجهیزات انتقال دهد. از روش زیر برای بررسی طرح‌های مختلف استفاده کنید.

۱. انتقال از جریان آرام به ناآرام خط فاصل روشنی است. جریان آرام و طول صفحه را برای اختیارهای جریان گذرا به ناآرام انتخاب کرده، با سعی و خطا مقادیر سرعت باد را امتحان کنید تا ملاحظه کنید که گذار به جریان ناآرام در ۲۰۰ cm صورت می‌گیرد. چون این محاسبه برای صفحه گرما ندیده انجام می‌شود می‌توانید این سرعت را کمی افزایش دهید زیرا لزجت گازها با دما زیاد می‌شود. مقدار سعی و خطا و مقداری را که فرض خواهید کرد ثبت کنید.

۲. اکنون می‌توانید نیازهای انتشار گرما را برای نوارهای گرم‌کن عمودی ۲۰ cm انتخاب کنید. هر نوار در تلاش برای ایجاد دمای سطحی ثابت ۱۰°C به اتلاف گرمای متفاوتی نیاز دارد. انتقال گرما و جریان آرام را برای اختیار صفحه - دما ثابت انتخاب کرده، نیاز اتلاف گرمای اولین پانل را با قرار دادن طول مورد نظر برابر ۲۰ cm تعیین کنید. این مقدار را ثبت کنید و توجه داشته باشید که باید جریانی گرمایی به وات باشد نه شاری گرمایی به وات بر متر مربع.

۳. کار را با استفاده از ۴۰ cm به عنوان طول مورد نظر تکرار کرده، نتیجه را تا یک انتشار گرما تنظیم کنید و آن‌گاه انتشار قبلی را از مقدار جدید کسر کنید. حاصل برابر مقدار انتشار برای پانل عمودی دوم می‌شود. از کل مقدار انتشار دو پانل اول لگاریتم بگیرید تا وقتی روش را برای ۶۰ cm تکرار می‌کنید بتوانید مقدار انتشار پانل سوم را با کم کردن کل دو انتشار اول به‌دست آورید. این روش را با نمو‌های ۲۰ cm ادامه دهید تا به کل ۲ m (۲۰۰ cm) برسید. چرا فکر می‌کنید انتشار گرما با عکس طول جریان پایین دست تغییر می‌کند؟

۴. اکنون پرسش این است: آیا می‌توان نیاز انتشار گرما را با تقاضای انتشار گرمای ثابت و یکنواخت برای تمام پانل‌ها آسان کرد؟ توجه کنید که توزیع دما روی حفاظ از لبه بالا روند تا لبه پایین‌روند تحت

شرایط انتشار گرمای ثابت احتمالاً خطی است و کامپیوتر دمای سطحی متوسط و دما در طول مشخص را به شما می‌دهد. پس وقتی تقاضای انتقال گرما و جریان آرام را برای اختیار صفحه شار گرمایی ثابت می‌کنید، داده‌های مربوط به نقاط طول - جریان ۱۰۰ و ۲۰۰ cm را به‌دست می‌آورید. آن‌گاه می‌توانید رابطه خطی را فرض کنید و دما در لبه بالاروند را از رابطه زیر محاسبه کنید:

$$T\ (x = 0) = 2\ T_{avg} - T\ (x = 200\ \text{cm})$$

بنابراین، طرز کار به این ترتیب است که مقادیر انتشار گرمای مختلفی را فرض کرده و طول مورد نظر ۲۰۰ cm و عرض صفحه ۱۰۰ cm را به‌کار برده، با سعی و خطا انتشار گرمایی را پیدا می‌کنیم که دمای $T\ (x = 0) = 10°C$ را می‌دهد. این انتشار را ثبت کرده، بگویید آیا این مقدار یا مقداری را که از مرحله ۳ پیدا کرده‌اید باید به کار برد؟

۵. خوب است ضخامت لایه مرزی در لبه پایین‌روند $(x = 200\ \text{cm})$ و جایی که (x هر چه می‌خواهد باشد) ضخامت لایه مرزی نصف مقدار آن در لبه پایین‌روند است را بدانیم. این مقادیر را محاسبه و نتایج را ثبت کنید.

۶. مورد جریان ناآرام را در نظر بگیرید. سرعت باد در محاسبات بعدی به $25\ \frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد. این سرعت را به کار برده، محاسبات مرحلهٔ ۲ را تکرار کنید. وقتی متوجه شدید که هیچ نتیجه‌ای در نقطهٔ ۲۰ cm به‌دست نمی‌آید، در مورد دلیل آن اظهار نظر کنید.

۷. کار را تا نقطهٔ ۴۰ cm ادامه داده، طرز کار مرحلهٔ ۳ را تکرار کنید و به ترتیب نقاط ۶۰، ۸۰ ... و ۲۰۰ cm را با نمودهای ۲۰ cm انتخاب کنید. در این مورد می‌توانید برای ۲۰ cm تقاضای نصف مقدار انتشار گرمای پانل ۴۰ cm را بکنید.

۸. ضخامت لایه مرزی در نقطه ۲۰۰ cm چیست؟

D-۶ قطر بیرونی لوله‌ای به طول ۲ m برابر ۳/۱۷۵ cm و ضخامت دیواره آن ۱/۸۲ mm است. در لوله آب با دمای کپه‌ای ۷۶°C در $1/5\ \frac{m}{s}$ جریان دارد. دمای دیواره لوله ۶۰°C است. ضریب انتقال گرما چیست؟

D-۷ در لولهٔ مسألهٔ $D-6$ هوا در ۱ atm مایل بر لوله با $8\ \frac{m}{s}$ و دمای کپه‌ای ۳۸/۵°C جاری است. ضریب انتقال گرما چیست؟ فرض مسألهٔ $D-6$ که دمای دیواره لوله ۶۰°C است، چه‌قدر مناسب است؟

D-۸ گاز کربنیک در تأسیساتی صنعتی در یک مبدل جریان متقاطع خنک می‌شود که هشت ردیف لوله در آرایشی غیر یک خط با نسبت فاصله به قطر ۱/۵ چه در جهت عرضی و چه طولی دارد. فریون داخل لوله‌ها در ۱۰°C چگالیده می‌شود. اگر CO_2 در ۱ atm و ۴۴°C وارد رشته لوله‌ها شود و سرعت جریان آزاد $12\ \frac{m}{s}$ و قطر بیرونی لوله ۲/۵۴ cm باشد، ضریب انتقال گرما را تعیین کنید.

D-۹ هوا در ۱ atm با $2/5\ \frac{m}{s}$ و ۲۷°C در کانالی مستطیلی ۲۰ cm × ۲۰ به طول ۴ m جاری است. اگر دمای ثابت دیواره‌ها ۷۷°C باشد، ضریب انتقال گرما را پیدا کنید.

D-۱۰ در کاربردی پزشکی از آب مقطر (از خواص آب استفاده کنید) داخل لوله‌ای به قطر داخلی ۱ mm با $0/25\ \frac{m}{s}$ جاری است. دمای کپه‌ای ۱۴°C و دمای ثابت دیواره لوله به طول ۱/۵ cm برابر ۵°C است. متوسط ضریب انتقال گرما را تعیین کنید.

D-۱۱ کدهای سیم‌ها ظرفیت انتقال شدت جریان آنها را محدود می‌کنند زیرا بیشینهٔ انتشار I^2R باید در حد معینی باشد تا از دمای اضافی و آتش‌سوزی جلوگیری شود. دو سیم که طول هر کدام ۱ m است را در نظر بگیرید که دمای سطحی آنها نباید از (۱۲۵°C) ۲۵۷°F بیش‌تر شود. قطر یکی از سیم‌ها ۱ mm و مقاومت آن $2/2\ \frac{\Omega}{m}$ و قطر دیگری ۲ mm و مقاومت آن $0/55\ \frac{\Omega}{m}$ است. ضریب گسیل هر دو سطح ۰/۷۲۵ است. بیشینهٔ مجاز شدت جریان هر سیم را پیدا کنید. دمای محیط را ۳۵°C و فشار را ۱ atm بگیرید.

D-۱۲ دمای ثابت استوانه‌ای عمودی به ارتفاع ۸۰ cm و قطر ۲۹ cm برابر ۸۸°C است. انتشار گرما از اطراف استوانه را به شرطی تعیین کنید که محیط (الف) آب به ۴۲°C و (ب) هوا به ۱/۵ atm و ۴۲°C باشد.

D-۱۳ در یک تأسیسات تعمیر موتور جت، موتورها را در حالی آزمایش می‌کنند که در محفظه‌ای «ضد صدا» قرار دارد و از طریق پنجره‌ای شیشه‌ای در عقب آن می‌توان منطقه دود را ملاحظه کرد. فرض کنید که بتوان دود موتور را این‌طور در نظر گرفت که تابش جسم سیاه را در ۲۵۰۰ K گسیل می‌دارد و ضریب تراگسیل شیشه بین ۰/۴ و ۰/۶ μm برابر ۰/۴ و بین ۰/۶ و ۱/۲ μm برابر ۰/۶۵ است. پنجره مربعی به ضلع ۰/۴۸ m است. مقدار اتلاف گرما از پنجره را پیدا کنید.

۱. نخست اختیار ۱ را از برنامه H انتخاب کنید که تابع تابش برای حاصل‌ضرب طول‌موج - دمای خاص را به‌دست می‌دهد. دمای ۴۰۰۰ K و طول‌موج ۱/۲ μm را مشخص کنید. تابع تابش را ثبت کنید. سپس بین نزدیک‌ترین مقادیر بالا و پایین حاصل‌ضرب طول‌موج - دما درون‌یابی کنید و تابع تابش را یادداشت کنید. در مورد دقتی که می‌توان با استفاده از درون‌یابی توابع تابش جدول ۸-۱ به‌دست آورد اظهار نظر کنید.

۲. اختیار ۲ را از برنامه H انتخاب و دستورالعمل‌های داده شده در فهرست انتخاب برنامه را دنبال کنید. هدف شما تعیین تابع تابش بین ۰/۴ و ۰/۶ μm و بین ۰/۶ و ۱/۲ μm است. پس از تعیین آنها می‌توانید مسأله را دستی کامل کنید.

D-۱۴ ضریب شکل تابش آرایش‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) دو مستطیل ۸ cm × ۱۲ روبه‌روی هم به فاصلهٔ ۳ cm.

(ب) دو دیسک به قطر ۶ cm روبه‌روی هم به فاصلهٔ ۳ cm.

(پ) دیسک‌های موازی به قطرهای ۲۰ و ۱۶ cm روبه‌روی هم به فاصله ۱۰ cm. نام‌گذاری برای ضریب شکل را حتماً مشخص کنید.

(ت) دو استوانه هم‌مرکز به ارتفاع ۲۰ cm با شعاع‌های ۶ و ۱۰ cm. نام‌گذاری برای ضریب شکل را حتماً مشخص کنید.

(ث) دو مستطیل عمود بر هم بایال مشترک. ارتفاع مستطیل کوچک ۸ cm و ارتفاع مستطیل بزرگ ۱۶ cm و طول یال مشترک ۲۰ cm است. حتماً نام‌گذاری ضریب شکل را مشخص کنید.

(ج) آرایشی مرکب مطابق شکل $D-7$ با

طول کلی مستطیل‌ها = ۵/۰ m

عرض کلی مستطیل‌ها = ۴/۰ m

فاصله بین مستطیل‌ها = ۲/۰ m

طول زیر سطح ۱ = ۱/۲ m

عرض زیر سطح ۱ = ۰/۸ m

سطح ۹ مربعی به ضلع ۱/۰ m است.

مقدار F_{1-9} را محاسبه کنید. ضلع مربع ۹ تا نزدیک‌ترین سانتی‌متر را نیز تعیین کنید به‌طوری که مقدار ضریب شکل آن ۰/۰۱۰ شود.

D-۱۵ مکعب مستطیلی ابعاد ۱۰، ۲۰ و ۳۰ cm را دارد. دمای وجه ۳۰ × ۱۰ برابر ۸۰۰ K و ضریب گسیل آن ۰/۷ است. دمای پنج سطح دیگر برابر ۳۵۰ K و ضریب گسیل آنها ۰/۴ است. گرمای تلف‌شده از سطح گرم را (الف) با استفاده از برنامه کامپیوتری شش جسمی و (ب) با استفاده از روابط فصل ۸ برای کار با آن به صورت مسأله‌ای دو جسمی، حساب کنید. در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

D-۱۶ گرمای دریافت شده توسط هر یک از پنج سطح سرد مسألهٔ $D-15$ را با استفاده از برنامه کامپیوتری و مدل دو جسمی محاسبه کنید. در مورد نتایج اظهار نظر کنید.

D-۱۷ یکی از وجوه ۲۰ × ۱۰ cm جعبه مسأله $D-15$ باز و در معرض محفظه‌ای بزرگ به ۲۵۰ K است دماها همان قبلی‌ها هستند. انتقال گرمای هر یک از پنج سطح را محاسبه کنید.

D-۱۸ وجه سردتر ۳۰ × ۱۰ cm جعبه مسألهٔ $D-15$ عایق‌شده، طوری رفتار می‌کند که گویی ضریب گسیل آن خیلی پایین و حدود ۰/۰۱ است. انتقال گرمای تمام سطوح در این حالت را محاسبه کنید.

D-۱۹ سطوح ۲۰ × ۱۰ cm و ۳ × ۲۰ cm جعبهٔ مسألهٔ $D-15$ دارای ضرایب گسیل ۰/۰۱ هستند. آهنگ‌های انتقال گرما در این شرایط را بیابید.

D-۲۰ مسأله $D-19$ را به‌صورت مسأله‌ای سه جسمی با استفاده از روش‌های فصل ۸ حل کرده، نتایج را با آنچه در مسألهٔ $D-19$ به‌دست می‌آید، مقایسه کنید.

D-۲۱ دو صفحهٔ موازی ۶۰ cm × ۴۰ به فاصله ۲۰ cm از هم در محفظه‌ای بزرگ به ۳۰۰ K قرار دارند. ضریب گسیل یکی از صفحات ۰/۸ و دمای آن ۹۰۰ K و ضریب گسیل دیگری ۰/۴ و دمای آن ۵۰۰ K است. انتقال گرما از هر صفحه را با استفاده از برنامهٔ کامپیوتری حساب کنید.

D-۲۲ جعبه شش وجهی شکل $D-8$ خواص زیر را دارد:

سطح	۱	۲	۳	۴	۵	۶
T، °C	۵۰۰	۴۵۰	۴۰۰	۴۲۵	۲۰۰	۳۰۰
ضریب گسیل	۰/۹	۰/۷	۰/۶	۰/۶۵	۰/۳	۰/۱۵

انتقال گرما و تابش‌دهی هر سطح را حساب کنید. ارتفاع را ۴۰ cm، عرض را ۸۰ cm و عمق را ۱۲۰ cm بگیرید. به یاد آورید که تابش‌دهی با انتقال گرما و رادیو سیتی با رابطهٔ زیر به هم ربط دارند.

$$\frac{q}{A} = J - G$$

D-۲۳ انباری به شکل $D-8$ دارای عرض ۶ m، طول ۱۲ m و ارتفاع ۴ m است.

۱. داده‌های زیر را برای شش سطح وارد کنید:

سطح	T , °C	ضریب گسیل
جلو	۳۳	۰/۸۸۷
دیوار چپ	۲۵	۰/۸۴۱
دیوار راست	۲۶	۰/۷۹۲
دیوار عقب	۲۶	۰/۸۲۵
سقف	۳۱	۰/۶۴۹
کف	۲۳	۰/۹۳۳

اگر در مورد این داده‌ها سر در گم هستید، تصور کنید که دیواره‌های چپ و راست روبه مکان‌های مجاوری هستند که تهویه مطبوع می‌شود، کف روبه گاراژ پارکینگ است که خیلی سرد است، سقف بار تابشی پشت بام را دریافت می‌کند، و دیوار عقب که رو به محیط است، در سایه قرار دارد.

۲. به دقت چگونگی باز شدن ماتریس ضرایب شکل در مقابل خود را ببینید. تقابل را یک بار بازرسی کنید. آیا ضریب شکل بین جلو و سقف با ضریب شکل بین سقف و جلو تقابلی نشان می‌دهد؟ توجه کنید که در انتهای ظاهر شدن ضریب شکل، خاصه اضافی هر سطح آشکار می‌شود.

۳. ضرایب هدایت و رادیوسیتی‌های بین دیوار که نمایش داده می‌شود جالب است و باید یادداشت شود. اما مهم‌تر از آن، مبادله تابشی بین شش دیوار است. مقدار دریافت تابش (به وات) دیوار جلویی را یادداشت کنید.

۴. از شما خواسته می‌شود که مقدار ضریب گسیل دیوار جلویی را پیدا کنید که دریافت تابش دیوار جلو را به ۵۰۰ W تغییر می‌دهد. این مقدار را با روش سعی و خطا در پاسخ به پرسش‌های انتهای برنامه تا سه رقم اعشار پیدا کنید.

۵. همان نتیجهٔ ۵۰۰ W را می‌توان با تغییر دمای دیوار جلو به‌دست آورد. ضریب گسیل را به مقدار اولیه (۰/۸۸۷) برگردانید و سپس از سعی و خطا برای پیدا کردن دمای دیوار جلو تا نزدیک‌ترین دهم درجه استفاده کنید.

۶. با کم کردن ضریب گسیل دیوار راست تا ۰/۰۱۰ و دمای تا ۲۷۳°C- آن را به سطحی عایق نزدیک کنید. رادیوسیتی دیوار چه خواهد بود؟ دمای دیوار عایق‌شده چه خواهد بود؟

D-۲۴ مقایسه مبدّل گرمایی

هدف این مسأله بررسی اثر متغیرها و آرایش‌های جریان مختلف مبدل گرمایی بر عمل‌کرد مبدل گرمایی است. چهار بررسی مقایسه‌ای تقاضا خواهد شد و در هر کدام شرایط زیر ثابت گرفته می‌شود:

	سیال سرد	سیال گرم
آهنگ جریان جرمی، $\frac{kg}{s}$	۱۵/۰	۱۲/۵
گرمای ویژه، $\frac{J}{kg.^\circ C}$	۲۴۵۰	۳۶۸۰

در پایان خلاصه چهار مورد، جدولی با جاهای سفید می‌بینید که باید نتایج را در آنها بنویسید.

۱. انتخاب ۱ و سپس جریان متقاطع را تقاضا کنید. سپس از شما خواسته می‌شود تا شرایط جریان جدول بالا را وارد کنید. هدف مقایسه ضریب تأثیر هر نوع مبدل بر پایه نسبت آهنگ ظرفیت خاص C و به ازای مقدار NTUای خاص است. پس از وارد کردن داده‌ها از شما خواسته می‌شود مقادیر ضریب انتقال گرمای کلی و مساحت انتقال گرما را وارد کنید. این مقادیر را به صورت زیر وارد کنید.

ضریب انتقال گرمای کلی U = ۲۰۰ $\frac{W}{m^2.^\circ C}$

مساحت مبدل گرمایی = ۲۹۴ m^2

در نتیجه، NTU = ۱/۶۰ را دریافت می‌کنید و می‌توانید ضریب تأثیر مبدل را بخوانید. این مقدار را روی ورقه نتیجه وارد کنید. اکنون تمام انواع دیگر مبدل‌ها را امتحان کنید و ضریب تأثیر آنها را بیابید. پس از وارد کردن مقادیر روی ورقه نتیجه می‌توان ضریب تأثیر تمام انواع مبدل‌ها را به صورت تابع NTU مقایسه کنید.

۲. متأسفانه، مقایسه انواع مبدل به‌صورت تابعی از NTU به ازای مقدار معلوم نسبت آهنگ ظرفیت پرمعنا نیست زیرا مشکل است تمام مبدل‌ها را واداشت که با مقادیر NTU یکسان کار کنند. در این بخش از مسأله از شما خواسته می‌شود انواع مبدل با همان ضریب تأثیر را مقایسه و مقدار NTU لازم برای رسیدن به این ضریب تأثیر را پیدا کنید. پس از پیدا کردن NTU می‌توانید مقدار ضریب انتقال گرمای کلی مورد نیاز در همان شرایط جریان مرحله ۱ و مساحت سطح ۲۹۴ m^2 را پیدا کنید. این طرز کار سریعاً با تقاضای اختیار ۲ و بهتر از آن با تکرار طرز کار مرحله ۱ اجرا می‌شود. توجه کنید که در ورقهٔ نتیجهٔ شما برای درصد افزایش ضریب کلی حالت جریان متقاطع و هم‌چنین مقدار آن از شما اطلاعات می‌خواهد. توجه کنید که در اختیار ۲ نیز تقاضای طرز کار سعی و خطا می‌شود.

۳. در اختیارهای ۱ و ۲ هیچ ذکری از دماهای نهایی مبدل گرمایی نیست. فرض کنید می‌دانیم سیال گرم در ۸۰°C و سیال سرد در ۳۰°C وارد مبدل می‌شود. طرز کار مرحله ۲ را تکرار و دماهای خروجی تمام انواع مبدل‌ها را به ازای شرایط معلوم جریان و مقدار NTU برابر ۱/۶۰۰ پیدا کنید. این مقادیر را در جاهای مناسب روی ورقه نتیجه وارد کنید.

۴. می‌توانید از اختیار ۴ برای پیدا کردن مقدار NTU لازم برای ایجاد عمل‌کرد دمایی از قبل تعیین شده استفاده کنید. اختیار ۴ و سپس مورد جریان متقاطع را انتخاب کنید. به ازای دمای ورودی مرحله ۳ و دمای خروجی طرف سرد ۶۲/۷°C، بگذارید کامپیوتر به شما نشان دهد که مقدار مورد نیاز NTU ≠ ۱/۶۰۰ است. اقلام مناسب را روی ورقه نتیجه وارد کنید.

D-۲۵ آثار مدخل می‌تواند در جریانِ لوله وقتی مهم باشد که طول در مقایسه با قطر بزرگ نیست. برای بررسی این اثر، لوله‌ای به طول ۲۰ cm را در نظر بگیرید. برای آهنگ‌های مختلف جریان هوا، آب و روغن موتور (خواص از پیوست A) به تدریج قطر لوله را از ۲/۰ cm تا ۱/۰ mm کم کنید. دمای سیال را ۲۰°C بگیرید. در مورد رفتار ضرایب انتقال گرما در شرایط مختلف نظر بدهید.

D-۲۶ مبدل گرمایی جریان متقاطعی با هر دو سیال نیامیخته را برای گرم کردن ۱۰ $\frac{kg}{s}$ گاز CO_2 از ۲۰ تا ۸۰°C با استفاده از آبی به‌کار می‌بریم که در ۱۶۰°C وارد و در ۹۰°C خارج می‌شود. ضریب انتقال گرمای کلی ۴۵ $\frac{W}{m^2.^\circ C}$ است. فرض کنید جریان CO_2 مقدار U را کنترل می‌کند و $U \sim \dot{m}^{0.8}$. انتقال گرما، دمای آب خروجی و دمای CO_2 خروجی را به‌صورت تابعی از درصد آهنگ جریان طرح CO_2 $\left(۱۰ \frac{kg}{s}\right)$ تعیین کنید.

D-۲۷ فرض کنید CO_2 مسأله D-۲۵ را با بخاری چگالشی به ۱۰۰°C و U (طراحی) = ۱۸۰ $\frac{W}{m^2.^\circ C}$ گرم کرده‌ایم. با استفاده از همان فرض $U \sim \dot{m}^{0.8}$، مسألهٔ D-۲۵ را در این شرایط جدید تکرار کنید.

☑ **جدول D-۱** نتایج مسأله D-۲۴

برای تمام اقلام ورقه نتیجه:

	سیال سرد	سیال گرم
آهنگ جریان، $\frac{kg}{s}$	۱۵/۰	۱۲/۵
گرمای ویژه، $\frac{J}{kg.^\circ C}$	۲۴۵۰	۳۶۸۰
C_{min}، $\frac{J}{^\circ C}$	____	____
نسبت ظرفیت $= \frac{C_{min}}{C_{max}}$ $C=$	____	____

ضریب تأثیر به صورت تابعی از C و NTU

ضریب انتقال گرمای کلی، $\frac{W}{m^2.^\circ C}$ ____

مساحت مبدل گرمایی، m^2 ____

نوع مبدل	ضریب تأثیر، ε
جریان مخالف	____
جریان موازی	____
جریان متقاطع:	
هر دو سیال آمیخته	____
یک سیال آمیخته، یکی نیامیخته؛	
سیال سرد آمیخته	____
سیال گرم آمیخته	____
هر دو سیال نیامیخته	____
مبدل‌های پوسته و لوله (n-۱):	
یک پاس پوسته، دو پاس لوله	____
یک پاس پوسته، چهار پاس لوله	____
یک پاس پوسته، شش پاس لوله	____
یک پاس پوسته، هشت پاس لوله	____
یک پاس پوسته، ده پاس لوله	____
یک پاس پوسته، دوازده پاس لوله	____

به چه نتایجی می‌رسید؟

ضریب انتقال گرمای کلی برای رسیدن به یک ضریب تأثیر

C_{min}، $\frac{J}{^\circ C}$ برابر C_c است. مقدار C_{min} برابر است با ____

مساحت مبدل، m^2	۲۹۴
ضریب تأثیر مورد نیاز	۰/۶۵۴
NTU جریان مخالف	۱/۶۰۰
نسبت ظرفیت C	۰/۷۹۹

نوع مبدل	ضریب کلی U، $\frac{W}{m^2.^\circ C}$	درصد افزایش مورد نیاز
جریان موازی	____	____
جریان متقاطع:		
دو سیال آمیخته	____	____
یک سیال آمیخته، یکی نیامیخته:		
سیال سرد آمیخته	____	
سیال گرم آمیخته	____	____
هر دو سیال نیامیخته	____	____
مبدل‌های پوسته و لوله (n-۱):	____	____
یک پاس پوسته، دو پاس لوله	____	
یک پاس پوسته، چهار پاس لوله	____	
یک پاس پوسته، شش پاس لوله	____	
یک پاس پوسته، هشت پاس لوله	____	
یک پاس پوسته، ده پاس لوله	____	
یک پاس پوسته، دوازده پاس لوله	____	

دمای نهایی مبدّل

ضریب انتقال گرمای کلی U، $\frac{W}{m^2.^\circ C}$	۲۰۰
مساحت مبدل، m^2	۲۹۴
نسبت آهنگ ظرفیت C	۰/۷۹۹
تعداد واحدهای انتقال، NTU	۱/۶۰۰
دمای ورودی طرف گرم، °C	۸۰
دمای ورودی طرف سرد، °C	۳۰

نوع مبدّل	دماهای خروجی، °C: طرف گرم	طرف سرد
جریان مخالف	____	____
جریان موازی	____	____
جریان متقاطع:		
هر دو سیال آمیخته	____	____
یک سیال آمیخته، یکی نیامیخته:		
سیال سرد آمیخته	____	____
سیال گرم آمیخته	____	____
هر دو سیال نیامیخته‌اند	____	____
مبدل‌های پوسته و لوله (n-۱):		
یک پاس پوسته، دو پاس لوله	____	____
یک پاس پوسته، چهار پاس لوله	____	____
یک پاس پوسته، شش پاس لوله	____	____
یک پاس پوسته، هشت پاس لوله	____	____
یک پاس پوسته، ده پاس لوله	____	____
یک پاس پوسته، دوازده پاس لوله	____	____

مقدار NTU برای ایجاد عملکرد دمایی مشخص

ضریب انتقال گرمای کلی U، $\frac{W}{m^2 \cdot °C}$	۲۰۰
مساحت مبدل، m^2	۲۹۴
نسبت آهنگ ظرفیت C	۰/۷۹۹
دمای خروجی طرف سرد، °C	۶۲/۷
دمای ورودی طرف گرم، °C	۸۰
دمای ورودی طرف سرد، °C	۳۰
ضریب تأثیر مورد نیاز	ــــ
دمای خروجی طرف گرم، °C	ــــ

نوع مبدل	NTU لازم
جریان مخالف	ــــ
جریان موازی	ــــ
جریان متقاطع:	
هر دو سیال آمیخته	ــــ
یک سیال آمیخته، یکی نیامیخته:	
سیال سرد آمیخته	ــــ
سیال گرم نیامیخته	ــــ
دو سیال نیامیخته	ــــ
مبدل‌های لوله و پوسته (n – ۱):	ــــ
یک پاس پوسته، دو پاس لوله	ــــ
یک پاس پوسته، چهار پاس لوله	ــــ
یک پاس پوسته، شش پاس لوله	ــــ
یک پاس پوسته، هشت پاس لوله	ــــ
یک پاس پوسته، ده پاس لوله	ــــ
یک پاس پوسته، دوازده پاس لوله	ــــ

D–۲۸ مسالهٔ D–۲۴ را با تعویض آهنگ‌های جریان و گرمای ویژه‌های سیال گرم و سرد تکرار کنید.

D–۲۹ انتقال گرماها و رادیوسیتی‌های همه سطوح جعبه شش وجهی شکل D–۸ را به شرطی تعیین کنید که طول آن ۱۰۰ cm عرض آن ۶۰ cm و ارتفاع آن ۴۰ cm و شرایط سطح چنین باشد:

سطح	۱	۲	۳	۴	۵	۶
T، °C	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
ضریب گسیل	۰/۳	۰/۴	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۳

D–۳۰ دمای پنج وجه از شش وجه مکعبی به ضلع ۱۰ cm برابر ۶۰۰°C و ضریب گسیل آنها ۰/۷ است. وجه ششم بازو در معرض اتاقی بزرگ به ۲۵°C است. اتلاف گرما به اتاق را (الف) با استفاده از برنامه کامپیوتر و (ب) در نظر گرفتن مسأله به‌صورت دوجسمی و استفاده از اطلاعات فصل ۸ حساب کنید.

D–۳۱ فرض کنید سطح کف (مقابل وجه باز) مسألهٔ D–۳۰ در دمای ۶۰۰°C است و $\varepsilon = ۰/۷$ و چهار سطح دیگر عایقند؛ یعنی $\varepsilon \to ۰$. اتلاف انرژی به اتاق در این شرایط را محاسبه کنید.

D–۳۲ می‌خواهیم مبدل گرمایی لوله پره‌داری طرح کنیم که ۴۴ kW گرما را به هوای روی پره‌ها منتقل کند. آب گرمی که در لوله‌ها جاری است هوا را از ۲۰ تا ۳۰°C گرم می‌کند. آب در ۱۶۰°C وارد و در ۱۴۰°C خارج می‌شود. اگر ضریب انتقال گرمای کلی $\frac{W}{m^2 \cdot °C}$ ۳۵ باشد، مساحت مبدل گرمایی را بیابید. اگر آهنگ جریان آب دو برابر شود اما سایر عوامل تغییر نکنند، انتقال گرما برای این مساحت مبدل چه‌قدر است؟

فهرست راهنما

آب:
خواص فیزیکی، ۳۷۱
کشش سطحی برای، ۲۹۹
آثار مدخل در لوله‌ها، ۱۷۰
آثار ناصافی بر انتقال گرما، ۱۶۹
آخنیاخ، ای.، ۱۹۳
آدامز، جی، ای.، ۸۸
آریاچی، وی. اس.، ۸۸، ۱۲۹، ۲۲۴
آلن، آر. دبلیو.، ۱۹۳
آمانو، دبلیو. اس.، ۲۲۶
آمس، دبلیو. اف.، ۸۸
آودانسان، تی.، ۲۲۴
آی‌هارا، تی.، ۳۲۵
ابعاد و واحدها، ۲۰
دیپری، دی.اف.، ۱۹۳
دیتوس، اف. دبلیو.، ۱۹۲
دوهرتی، پی.، ۲۶
اپنهایم، ای. کی.، ۲۴۱، ۲۸۹
اتلاف گرما از پره، ۳۷
اُنول، جی.، ۲۲۵
اختلاف دمای متوسط لگاریتمی، ۳۱۶
ضرائب اصلاح برای، ۳۱۷
ادوارد، دی. کی.، ۲۲۶، ۲۹۰
اسپارو، ای. ام.، ۲۲۴، ۲۲۶، ۲۸۹
اُستراخ، اس.، ۲۲۴
استرانگ، پی. اف.، ۸۸
استرنون، ای. جی.، ۲۲۶
استفانی، ان. ای.، ۲۲۳
استوارت، دبلیو. ای.، ۳۵۴
استوانه‌ها:
ضریب کشش برای، ۱۷۴
جریان در عرض (ر. ک. جریان در عرض استوانه‌ها)
انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری از، ۱۷۵
جابه‌جایی آزاد روی، ۲۰۳
اسکانلان، جی. ای.، ۲۲۳
اسکوپینسکی، ای.، ۱۹۳
اسمیت، جی. دبلیو.، ۱۹۳
اشتاین، آر.، ۱۹۲
اشلاندر، ای. دبلیو.، ۳۴۳
اشلیختینگ، اچ.، ۱۶۳، ۱۹۲
اشمیت، ای.، ۲۲۵، ۳۰۹
اشمیت، ای. دبلیو.، ۲۲۴
اشنایدر، پی. جی.، ۵۳، ۸۸، ۱۲۹
افت فشار:
در ردیف‌های لوله، ۱۸۰
درلوله‌ها، ۱۶۹
اکرت، ای. آر. جی.، ۱۶۳، ۱۹۳، ۲۲۴، ۲۹۰
اِگبرت، آر. بی.، ۲۹۰
البدو:
تعریف، ۲۷۳
سطوح طبیعی، ۲۷۳
العربی، ام.، ۳۲۶
امیری، ای. پی.، ۱۲۹، ۲۲۴
اِمسلی، ای. جی.، ۸۸
انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری، برای جریان روی صفحهٔ تخت، ۱۴۲، ۱۵۶
انتقال گرمای چگالی پایین، ۲۱۱
انتقال گرمای فلز مایع، تحلیل جریان اسلاک، ۱۸۲
انتقال گرمایی سریع، ۱۵۳
اندازه حباب در جوش، ۲۹۶
اندازه‌گیری دما، اثر تابش، ۲۷۴
اندازه‌های لوله، ۳۷۵
اِندو اس.، ۲۲۵
اوج شارگرمایی در جوش، ۳۰۱
اوزی، اچ.، ۱۶۳
اوزیسیک، ام. ان.، ۸۸، ۱۲۹
اوکازاکی، تی.، ۱۹۳
اِونس، اِل. بی.، ۲۲۳
ایتو، سی. اچ.، ۲۲۶
ایروین، تی. آر.، ۱۹۲
ایمورا، اچ.، ۲۲۵
با چشمه‌های گرمایی، ۳۴
باراکات، اچ. زد.، ۸۸
بارون، آر.، ۲۶
بازتاب آینه‌ای، ۲۲۸
بازتاب پخشنده برای تابش گرمایی، ۲۲۹
بازدهی پره:
محاسبه، ۳۸
پره‌های محیطی، ۳۸
تعریف، ۳۸
پره‌های مستطیلی و مثلثی، ۳۹
باگز، جی. اچ.، ۲۲۵
بجورج، آر. دبلیو.، ۳۱۰
بخار آب، ضریب گسیل، ۲۴۹
براون، دی. آر.، ۵۳
براون، سی. کی.، ۲۲۴
برخورد قطره، انتقال گرما در، ۳۰۱
برد، آر.بی.، ۳۵۴
برگلز، ای. ای.، ۲۲۴
برنشتین، ام.، ۱۹۳
برواملی، ال. ای.، ۳۰۹
بکمان، دبلیو. ای.، ۲۹۰
بلازیوس، اچ.، ۳۷۸
بلاک، آی. ای.، ۲۶
بل، کی. جی.، ۳۱۰
بلوم، اچ. ای.، ۵۳
بنارد، آچ.، ۲۲۴
بوتلر، ال. ام.، ۱۹۲
بیرکبک، آر. سی.، ۲۲۶
بیشاپ، ای. ان.، ۲۲۳
بیکر، دی. آر.، ۳۵۴
بیلی، اف. جی.، ۲۲۳
پترسون، جی. پی.، ۳۱۰
پتوخف، بی. اس.، ۱۹۳
پخش:
هم مولال، ۳۴۷
قانون فیک، ۳۴۵
درگازها، ۳۴۶
در مایعات و جامدات، ۳۴۹
سازوکار فیزیکی، ۳۴۵
آب در جو، ۳۴۸
بخار آب، ۳۵۲
پخش دما:
درپره‌ها، ۳۷
در لایه مرزی آرام، ۱۴۰
در جریان آرام در لوله، ۱۵۱
در جامدات دارای چشمه‌های گرمایی، ۳۴
پخش هم مولال، ۳۴۷
پدیده لیدن فراست، ۳۰۱
پراه، ال.، ۲۲۵
پراکندگی در جو، ۲۷۳
پراندل، لودویک، ۱۴۱
پرش دمایی، ۲۱۲
پره‌ها:
گرمای هدر رفته از، ۳۷
توزیع دما در، ۳۷
انواع، ۳۹
پریجوجین، آی.، ۳۵۴
پُل‌هاوزن، ای.، ۳۷۹
پوو، آر. ای.، ۲۲۶
پروی، آر. ای.، ۲۲۶
پیتز، سی. سی.، ۳۰۹
تابش:
در محیط جاذب و تراگسیلنده، ۲۵۲
ضریب جذب برای، ۲۲۸
جسم سیاه، ۲۲۸
بازتاب پخشنده برای، ۲۲۹
اثر آن براندازه‌گیری دما، ۲۷۴
از هادی‌های الکتریکی، ۲۳۷
از غیر هادی‌های الکتریکی، ۲۳۷
توان پخش برای، ۲۲۸
فرمول‌بندی راه حل عددی، ۲۶۱
جسم خاکستری، ۲۲۹
شدت، ۲۳۳
روش شبکه‌ای برای تحلیل، ۲۴۱
قانون پلانک در، ۲۳۰
رفتار سطح حقیقی، ۲۳۶
ضریب بازتاب برای، ۲۲۸
خلاصه فرمول‌ها، ۲۷۵
ضریب تراگسیل برای، ۲۲۸
(تابش خورشیدی را نیز ببینید)
تابش خورشیدی، ۲۷۰
ضریب جذب برای، ۲۷۱
اثر جذب جوی، ۲۷۳
تابش دهی، تعریف، ۲۴۱
تابع خطایی، ۹۲، ۳۵۵
تانگ، ال. اس.، ۳۰۹
تانگر، جی. ای.، ۳۰۹
تبخیر آب، ۳۵۲
تحلیل ظرفیت فشرده، محدودیت‌های، ۹۱
تراگسیل آینه‌ای - پخشنده، ۲۵۹
ترلکلد، جی. ال.، ۲۸۹
تشابه:
الکتریکی، برای هدایت گرمای حالت پایدار، ۷۸
بین انتقال گرما و اصطکاک سیال، ۱۴۴ و ۱۶۹
تشابه الکتریکی برای هدایت حالت پایدار، ۷۸
تشابه کولبورن، ۱۴۵
NTU (تعداد واحدهای انتقال)، تعریف، ۳۲۱
تفاضل پس‌رو در روش‌های عددی، ۱۷۳
تفاضل پیش‌رو در روش‌های عددی، ۱۰۶
تنش برشی:
تعریف، ۱۳۱
توان پخش تابش گرمایی، ۲۲۸
توربورگ، آر. اچ.، ۲۸۹
تولید گرما، ۳۴
تورنس، اچ. دبلیو.، ۱۹۳
تین، سی. ال.، ۲۲۶

ثابت خورشیدی، ۲۷۰
جابه‌جایی:
بحث کلی، ۱۸،۱۳۱
سازوکار فیزیکی، ۱۸
(جابه‌جایی اجباری را نیز ببینید، جابه‌جایی آزاد)
جابه‌جایی آزاد:
ضخامت لایه مرزی در، ۱۹۶
در ترکیب با جابه‌جایی اجباری، ۲۱۳
روی استوانه‌های افقی، ۲۰۳
در فضاهای بسته، ۲۰۷
روی صفحات افقی، ۲۰۴
از اجسام مکعب مستطیلی، ۲۰۴
ازکره‌ها، ۲۰۷
روی صفحه تخت عمودی، ۱۹۵
جدول خلاصه، ۲۱۶
جابه‌جایی اجباری:
در ترکیب با جابه‌جایی آزاد، ۲۱۳
در جریان خیلی سریع، ۱۵۳
فلزات مایع، ۱۸۳
درلوله‌ها، ۱۶۶
جدول‌های خلاصه، ۱۵۶، ۱۸۵
جاکوب، ماکس، ۱۲۹، ۱۹۲، ۲۲۳، ۲۸۹، ۳۰۹
جاگر، جی.سی.، ۸۸
جانسن، جی. ای.، ۲۸۹
جانسون، کی. آر.، ۸۸
جانسون، وی. کی.، ۲۸۹
جدایی جریان، ۱۷۴
جردن، آر. سی.، ۲۸۹
جریان جدا شده، ۱۷۴
جریان در عرض استوانه‌ها، ۱۷۳
جداشده، ۱۷۴
در عرض ردیف لوله‌ها، ۱۷۹
(ن. ک به جریان آرام؛ جریان در لوله؛ جریان نا آرام)
جریان در لوله:
معادله پیوستگی برای، ۱۳۳
ضریب اصطکاک برای، ۱۶۹
انتقال گرمای نا آرام در، ۱۶۶
جریان نا آرام:
خواص گردابی در ۱۴۵ ، ۱۴۶
روی صفحه تخت، ۱۴۵
تنش برشی در، ۱۴۷
در لوله‌ها، ۱۵۲
ضریب انتقال گرما برای، ۱۶۶
جریان عرضی:
روی استوانه‌ها، ۱۷۳
روی کره‌ها، ۱۷۴
جُست، دبلیو.، ۳۵۴
جسم خاکستری برای تابش گرمایی، ۲۲۹
جکسن، تی. دبلیو.، ۲۲۴
جوش:
اندازه حباب در، ۲۹۶
کپه‌ای، ۲۹۶
اثر حباب‌ها، ۲۹۶
فیلم، ۲۹۶
جابه‌جایی اجباری، ۳۰۰
موضعی، ۲۹۶
شار گرمایی اوج در، ۳۰۱
سازوکار فیزیکی، ۲۹۶
استخر، ۲۹۶
(جوش استخری هسته‌سازی را نیز ببینید)
اشباع، ۲۹۶
روابط ساده شده برای آب، ۳۰۲
زیرسرد یا موضعی، ۲۹۶
جوش اشباع، ۲۹۶
جوش جابه‌جایی اجباری، محاسبه، ۳۰۰
جوش زیر سرد، ۲۹۶
جوش فیلمی، ۲۹۶
ضریب انتقال گرما در، ۲۹۷
جوش کپه‌ای، ۲۹۶
جوش مخزنی، ۲۹۶
(جوش مخزنی هسته‌ای را نیز ببینید)
جوش مخزنی هسته‌ای:
رابطه مربوط به، ۲۹۸، ۲۹۹
سازوکار فیزیکی، ۲۹۸
جوش موضعی، ۲۹۶
چاپمن، ای. جی.، ۲۲۴
چرچیل، اس. دبلیو، ۱۶۳، ۱۹۳، ۲۲۶
چگالش:
مقادیر تقریبی ضرائب انتقال گرمای، ۳۰۴
قطره‌ای، ۲۹۱
فیلمی، ۲۹۱
روی سطوح مایل، ۲۹۴
داخل لوله‌های افقی، ۲۹۴
عدد، ۲۹۴
چگالش فیلمی، بررسی تحلیلی، ۲۹۱
چگالش قطره‌ای، ۲۹۱
چو، اچ. اچ. اس.، ۲۲۶
چیز رابت، آر.، ۲۲۴
حالت پایدار، روش عددی دو بعدی، ۶۲
حالت ناپایدار: باشرایط مرزی جابه‌جایی، ۹۳
تشابه الکتریکی برای، ۹۱
روش ظریف فشرده، ۹۰
سیستم‌های چند بعدی، ۱۰۰
روش عددی، ۱۰۳
در جسم یک طرف نامحدود، ۹۲
کاربرد نمودارهای هیسلر، ۹۴
خواص تابش تک‌فام، ۲۳۰
خواص سکون، ۱۵۳
خواص فیزیکی:
هوا، ۳۶۷
گازها، ۳۶۸
فلزات مایع، ۳۷۰
فلزات، ۳۵۶
غیر فلزات، ۳۶۰
مایعات اشباع، ۳۶۴
آب، ۳۷۱
خواص گردابی در جریان نا‌آرام، ۱۴۵، ۱۴۶
خورناب‌گیری:
متوسط خورشیدی، ۲۷۴
تعریف، ۲۷۲
عایق، کاربردهای، ۳۰
خواص، ۳۰
داده‌های انتقال گرمای جابه‌جایی، همبستگی، ۱۶۷
دازینبر، جی.ام.، ۸۸، ۱۲۹
دانکل، آر. وی.، ۲۹۰
دُپیو، سی. ای.، ۲۲۶
در استوانه توخالی، ۲۹
در دیواره نخت، ۲۷
دریک، آر.ام.، ۱۹۳، ۲۲۶
دستگاه واحد بین المللی، ۲۱
دقت: شرایط مرزی، ۷۱
راه حل‌های عددی، ۷۱
دُگروث، اس.آر.، ۳۵۴
دما:
دیواره بی‌دررو، ۱۵۴
کپه‌ای، ۱۵۱، ۱۶۶
فیلم، ۱۴۲
مرجع، برای جریان خیلی سریع، ۱۵۴
دمای خورشیدی معادل، ۲۷۰
دمای دیواره بی‌در رو، ۱۵۴
دمای فیلم، ۱۴۲
دمای کپه‌ای:
تعریف، ۱۵۱
مربوط به انتقال گرمایی جابه‌جایی اجباری، ۱۶۶
دوایر، اُ. ای.، ۱۹۳
دوفی،جی. ای.، ۲۹۰
دهیر،وی. کی.، ۳۱۰
دیل، چی. دی.، ۲۲۵
رابطه‌اصطکاک سیال با انتقال گرما، ۱۴۴، ۱۶۹
رانرن، زد.، ۲۲۴
راجرز، دی. اف.، ۸۸
رادیوسیتی پخشنده، تعریف، ۳۵۶
رادیوسیتی، تعریف، ۲۴۱
راس، دی. سی.، ۲۲۵
رایدآر. ال.، ۲۶
رایهر، اچ.، ۲۲۵
رُز، جی. دبلیو.، ۳۰۹
رُزنو، دبلیو. ام.، ۳۱۰
رژیم‌های جوش، ۲۹۶
روابط تجربی برای جریان در لوله، ۱۶۷
روش آنتالپی مرجع، ۱۵۴
روش ترسیمی برای هدایت حالت پایدار دوبعدی، ۵۷
روش تفاضل محدود (ن. ک روش عددی)
روش جداسازی متغیرها برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، ۵۶
روش دمای مرجع برای جریان خیلی سریع، ۱۵۴
روش شبکه‌ای برای تحلیل تابش، ۲۴۱
روش شبکه‌ای تابش، ۲۴۱
روش عددی، پایداری، ۱۰۹
روش گوس - سایدل، ۶۷
روش‌های ماتریسی برای مسائل هدایت، ۶۷
ریچاردسون، پی. دی.، ۱۲۹
ریچمایر، آر. دی.، ۸۸
ریسبای، جی. دی.، ۲۲۶
زونگن، ای.، ۲۲۵
سابرسکی، آر.، اچ.، ۱۹۳
ساروقیم، ای. اف.، ۲۹۰
سامرسکیلز، ای. اف. سی.، ۳۴۳
ساندرز، سی. جی.، ۲۲۴
ساندرلاند، جی. ای.، ۵۳، ۸۸
سبان، آر. ای.، ۱۹۲
سپتوسکی، دبلیو. کی.، ۸۸
سپرهای تابشی، اثر بر آهنگ انتقال گرما، ۲۴۶
سرمایش و گرمایش گذرا(ن. ک هدایت، حالت ناپایدار)
سری‌های فوریه، ۵۷
سس، آر. دی.، ۲۸۹ و ۳۴۳
سطح گسترش یافته، معادلهٔ یک بعدی، ۳۶
سطوح آینه‌ای - پخشنده، تحلیل برای، ۲۵۶
سلزچاپ، دبلیو.، ۳۰۹
سلمان، وای. کی.، ۲۲۶
سیتاک اوغلو، اف.، ۳۰۹
سیدر، ای. اِن.، ۱۹۲
سیگل، پی. ال.، ۲۹۰

سیموندز، آر. آر.، ۲۲۴
سینگ، اس. ان.، ۲۲۶
شارگرمایی اتمام سوخت، مقادیر تقریبی،۳۰۵
شاه، آر.، ۱۹۳
شدت تابش، ۲۳۴
شرایط مرزی، دقت، ۷۱
شریف، ان.، ۱۹۳
شوربگ، دبلیو.، ۳۰۹
شولنز، اچ. دی.، ۸۸
شیمازاکی، تی. تی.، ۱۹۲
ضخامت بحرانی عایق، ۳۳
ضخامت لایه مرزی:
تعریف، ۱۳۲
برای جابه‌جایی آزاد، ۱۹۶
برای جریان آرام روی صفحهٔ تخت، ۱۳۷
مرتبه بزرگی برای، ۱۶۶
ضرائب اصطکاک پوستی، فرمول‌های تجربی برای، ۱۴۸
ضرائب تبدیل، ۲۰
ضرائب شکل در تابش:
نمودارها برای، ۲۳۶
تعریف، ۲۳۳
روابط، ۲۳۶
ضریب اصطکاک برای صفحات تخت، ۱۴۴
ضریب اصطکاک برای لوله‌های صاف، ۱۶۹
ضریب انتقال جرم:
تعریف، ۳۴۹
برای جابه‌جایی اجباری، ۳۵۰
ضریب انتقال حرم جابه‌جایی اجباری، ۳۵۰
ضریب انتقال گرما:
مقادیر تقریبی، ۱۹
برای استوانه در جریان عرضی، ۱۷۳
تعریف، ۱۸
اثر ناصافی، ۱۶۹
در فضاهای بسته، ۲۰۷
در فضاهای تخلیه شده از هوا، ۲۱۱
در جوش فیلمی، ۲۹۶
در چگالش فیلمی، ۲۹۱
برای جابه‌جایی اجباری از کره‌ها، ۱۷۷
برای جابه‌جایی آزاد: در هوا، ۱۹۹
روی سطوح عمودی، ۲۰۰
جدول خلاصه، ۲۱۶
برای جریان سریع، ۱۵۳
برای جریان آرام روی صفحهٔ تخت، ۱۴۲، ۱۵۷
در لوله‌ها، ۱۶۶
برای فلزات مایع، ۱۸۳
برای چگالی پایین، ۲۱۱
برای استوانه غیر دایروی، ۱۷۷
کل، (ن. ک ضریب انتقال گرمای کل)
برای تابش، ۲۷۴
برای کره‌ها در جریان عرضی، ۱۷۷
برای ردیف‌های لوله، ۱۷۹
برای لایه مرزی نا‌آرام روی صفحه تخت، ۱۴۸
برای جریان نا آرام در لوله‌ها، ۱۶۶، ۱۷۰
نمودارهای هیسلر، ۹۵، ۹۷
روش تحلیلی، ۳۸۱
ضریب انتقال گرمای تابشی، ۲۷۴
ضریب انتقال کرمای جابه‌جایی(ر. ک. ضریب انتقال گرما)
ضریب انتقال گرمای کلی:
مقادیر تقریبی، ۳۱۳
تعریف، ۳۱۱
ضریب بازتاب در تابش گرمایی، ۲۲۸
ضریب بازیابی:
محاسبهٔ، ۱۵۳
تعریف، ۱۵۳
آنتالپی، ۱۵۴
ضریب بازیابی آنتالپی، ۱۵۴
ضریب پخش:
تعریف، ۳۴۶
گازها، ۳۴۶، ۳۷۰
ضریب تأثیر - NTU (تعداد واحدهای انتقال)
نمودارها، ۳۲۲، ۳۲۴
معادلات، ۳۲۵
ضریب تأثیر مبدل‌های گرمایی، ۳۲۰
ضریب تراگسیل برای تابش گرمایی، ۲۲۸
ضریب جذب:
برای تابش خورشیدی، ۲۷۱
برای تابش گرمایی، ۲۲۸
ضریب جذب تک فاز، ۲۴۸
ضریب دید، ۲۳۳
ضریب زاویه‌ای، ۲۳۳
ضریب شکل، ۲۳۳
ضریب شکل:
در هدایت، تعریف، ۵۸
برای تابش (ن. ک ضرائب شکل تابش)
ضریب شکل در، ۵۸
ضریب فولینگ مبدل‌های گرمایی، ۳۱۵
ضریب کشش،
برای استوانه، ۱۷۴
تعریف، ۱۷۴
برای کره، ۱۷۵
ضریب گسیل:
دی‌اکسیدکربن، ۲۴۹
سطوح: تعریف، ۲۲۹
مقادیر، ۳۷۴
بخار آب، ۲۴۹
ضریب مرواده:
تعریف، ۲۱۲
مقدار، ۲۱۲
ضریب هدایت نمانس، جدول مقادیر، ۴۴
ضریب هدایت (ضریب هدایت گرمایی را ببینید)
ضریب هدایت گرمایی:
معادلهٔ معرف، ۱۳
گازها، ۱۷
مایعات، ۱۷
سازوکار فیزیکی، ۱۶
جامدات، ۱۷
فوق عایق‌ها، ۱۸
طول آمیزش، ۱۴۶
طول‌های پرتو متوسط، جدول، ۲۵۰
طیف الکترومغناطیسی، ۲۲۸
طیف، الکترومغناطیسی، ۲۲۸
ظرفیت، گرمایی، ۹۱
ظرفیت گرمایی در فرمول‌بندی عددی، ۱۰۹
ظریف گرمایی، ۹۱
عدد استانتون، تعریف، ۱۴۴
عدد اشمیت، تعریف، ۳۵۰
عدد بیو، ۷۱ و ۹۱
عدد پراندل:
تعریف، ۱۴۱
اهمیت فیزیکی، ۱۴۲
عددپکلت، تعریف، ۱۶۹
عدد رینولدز:
برای چگالش، ۲۹۳
بحرانی، برای صفحهٔ تخت، ۱۳۳
تعریف، ۱۳۰
برای جریان در لوله، ۱۳۳
عدد شروود، تعریف، ۳۵۰
عدد فوریه، ۹۹
عددگراتز، ۱۷۰
عددگراشف:
تعریف، ۱۹۷
رابطهٔ آن باگذار در جابه‌جایی آزاد، ۱۹۸
عدد لویس، ۳۵۰
عددمودسن، تعریف، ۲۱۱
عدد نوسلت، تعریف، ۱۴۲
غیر فلزات، خواص فیزیکی، ۳۶۰
فاکس، دبلیو. ای.، ۳۵۴
فاند،آر.ام.، ۱۹۲
فرانکلین، جی. ال.، ۲۲۶
فراید، ای.، ۵۳
فرمول‌بندی، صریح و غیرصریح، ۱۰۶
فرمول‌بندی، عددی برای مسائل تابش، ۲۶۱
فضاهای تخلیه شده از هوا، ۲۱۱
فلدمن، کی.بی.، ۳۱۰
فلزات، خواص، ۳۵۶ (ن. ک به فلزات مایع؛ غیر فلزات)
فلزات مایع :
جابه‌جایی اجباری برای، ۱۸۳
انتقال گرما با، ۱۸۳
خواص، ۳۷۰
فوجی، تی.، ۲۲۵
فون کار مان، تی.، ۱۶۳
فهرست نمادها، ۷
فیشندن، ام.، ۲۲۵
قانون استفان - بولتزمن در تابش گرمایی، ۲۲۸
قانون پخش فیک، ۳۴۵
قانون تابش پلانک، ۲۳۰
قانون دالتن فشارهای جزئی، ۳۴۷
قانون فوریه در، ۱۴
قانون فوریه در هدایت گرمایی، ۱۴
قانون نیوتن در خنک کردن، ۱۸
قطر هیدرولیکی، ۱۶۹
کانز، دی. ال.، ۱۹۲
کارسلاو، اچ، اس.، ۸۸
کاسه استاندارد برای اندازه‌گیری‌های پخش، ۳۵۲
کافمن، اس. جی.، ۱۹۲
کالیش، اس.، ۱۹۳
کایان، دی. اف.، ۸۸
کرامرز، اچ.، ۱۹۲
کرانک، جی.، ۸۸
کراوس، ای. دی.، ۵۳، ۸۸، ۳۴۳
کرن، دی. کیو.، ۵۳، ۸۸، ۳۴۳
کره‌ها:
ضریب کشش برای، ۱۷۵
جابه‌جایی آزاد از، ۲۰۶
انتقال گرما در جریان عرضی، ۱۷۷
کشش سطحی برای آب، ۲۹۹
کلاسن، ال.، ۲۲۴
کلاوزینگ، ای. ام.، ۵۳
کلاین، اس. جی.، ۱۹۳
کلکتور خورشیدی، ۲۷۱
کلیفتن، جی.، وی.، ۲۲۴
کنالی، تی. جی.، ۲۲۶
کندراتیف، کی. وای.، ۲۹۰

کوتر، نی. پی.، ۳۱۰
کولبورن، ای. پی.، ۱۹۲
کُهلر، ام. ای.، ۳۵۴
کیز، دبلیو. ام.، ۱۹۲، ۳۴۳
گازها،
  پخش در، ۳۴۶
  ضریب پخش، ۳۴۶، ۳۷۰
  خواص، ۳۶۸
گامبیل، دبیلو.آر.، ۳۰۹
گیهارت، بی.، ۲۲۴، ۳۰۹
گذار لایه‌های مرزی، ۱۳۲
گراشف، فرانتز، ۱۹۸
گراف، جی. جی. ای.، ۲۲۵
گِرگ، جی. سی.، ۲۲۴
گرمایش لزجی در لایه مرزی، ۱۳۹، ۱۵۳
گردیر، اچ.، ۱۲۹
گروور، جی. ام.، ۳۱۰
گریگول، یو.، ۸۸
گریمسون، ای. سی.، ۱۹۲
گلدشتاین، آر. جی.، ۲۲۵
گلوب، اس.، ۲۲۳
گلبزر، پی.ای.، ۲۶
گوبارف، جی. سی.، ۲۸۹
گوملی، پی.، ۱۹۳
گوئیس، آر. سی.، ۲۲۴
گوون، آر. ای.، ۱۹۳
گودین، دبلیو. اچ.، ۲۲۴
گیبون، ان. سی.، ۲۶
گیدت، دبلیو. اچ.، ۱۹۲
گیلاند، ای. آر.، ۳۵۴
لاندن، ای. ال.، ۱۹۳، ۳۴۳
لاندیس، اف.، ۲۲۵
لانگستون، ال. اس.، ۱۲۹
لانگلی، تعریف، ۲۷۲
لاینفوت، ای.هان.، ۳۵۴
لایه مرزی گرمایی، تعریف، ۱۳۹
لایه مرزی هیدرواستاتیکی:
  بحث کلی، ۱۳۲
  ضخامت، ۱۳۸
لایه‌های مرزی:
  لایه میان‌گیر در، ۱۴۵
  معادله پیوستگی برای، ۱۳۶
  آثار اتلاف لزجی در، ۱۴۵
  معادله انرژی برای، ۱۳۹
  راه‌حل‌های دقیق برای، ۳۷۸
  بحث کلی، ۱۳۲
  هیدرودینامیک، ۱۳۲، ۱۳۷
  تحلیل انرژی انتگرالی برای، ۱۴۰
  آرام: معادلهٔ اندازه حرکت، ۱۳۷
  نیم‌رخ سرعت برای، ۱۳۷
  زیر لایه آرام، ۱۴۵
  معادله اندازه حرکت برای، ۱۳۶
  پخش دما در، ۱۴۰
  گرمایی، ۱۳۹
  گذار، ۱۳۲، ۱۴۵
  ناآرام، ضخامت، ۱۴۹
  گرمایش لزجی در، ۱۴۵، ۱۵۳
لزجت:
  تعریف، ۱۳۲
  سازوکار فیزیکی، ۱۳۲
لزجت دینامیکی، تعریف، ۱۳۲
لزجت گردابی، ۱۴۶
لوبارسکی، بی.، ۱۹۲
لرپرت، جی.، ۱۹۲، ۳۰۹
لولهٔ گرمایی، ۳۰۳
لوی، اس.، ۳۰۹
لیتهارد، جی. اچ.، ۲۲۶، ۳۱۰
لیود، جی. آر.، ۲۲۵
لیو، سی. وای.، ۲۲۵
مایرز، جی. ای.، ۸۸، ۱۲۹
مایعات :
  اشباع، خواص، ۳۶۴
  و جامدات، پخش در، ۳۴۹
مایعات اشباع، خواص، ۳۶۴
مبدل گرمایی:
  فشرده، ۳۲۷
  جریان متقاطع، ۳۱۶
  ملاحظات مربوط به طراحی، ۳۳۲
  دولوله، ۳۱۲
  اثر خواص متغیر، ۳۲۸
  ضریب تأثیر، ۳۲۰
  فرمول‌های، ۳۲۴
  ضریب فولینگ، ۳۱۴
  بحث کلی، ۳۱۱
  پوسته و لوله، ۳۱۵
  مبدل گرمایی پوسته و لوله، ۳۱۵
  مبدل گرمایی جریان متقاطع، ۳۱۵
  مبدل گرمایی دو لوله، ۳۱۲
  مبدل‌های گرمایی فشرده، ۳۲۷
متالیس، لی.، ۲۲۳
متغیر تشابه، ۳۷۸
مختصات استوانه‌ای، ۱۵
مرتبه بزرگی برای ضخامت لایه مرزی، ۱۶۵
مسیر آزاد متوسط:
  برای هوا، ۲۱۱
  اثر بر انتقال گرمای بین صفحات موازی، ۲۱۱
  مربوط به انتقال گرمایی جگالی پایین، ۲۱۱
معادله برتولی، ۱۳۳
معادله پیوستگی:
  برای لایه مرزی، ۱۳۶
  برای جریان در لوله، ۱۳۳
معادلهٔ انرژی جریان - پایدار، ۱۳۴
معیارپایداری، ۱۰۹
مقادیر در دستگاه‌های مختصات مختلف، ۷۰
مقاومت تماس، ۴۲
مقاومت گرمایی، ۲۸، ۶۸
  مرز جابه‌جایی، ۳۱
  در فرمول‌بندی عددی، ۶۸
مقاومت گرمایی تماس، ۴۲
مقدار R، تعریف، ۲۸
مک آدامز، دبلیو. اچ.، ۹۲، ۲۲۳ ، ۲۸۹، ۳۰۹
مک، ال . آر.، ۳۰۹
مک دونالد، جی. اس.، ۲۲۶
مک گریگور، آر. کی.، ۳۰۹
مک گینیس، اف. کی.، ۳۱۰
ملاحظات مربوط به طراحی مبدل‌های گرمایی، ۳۳۲
منحنی شار برای هدایت، ۵۸
مودی، اف. اف.، ۱۹۲
موران، دبلیو. آر.، ۲۲۵
مور، سی. جی.، ۵۳
مورگان، وی. تی.، ۱۹۳، ۲۲۶
مول، دبلیو.، ۲۲۵
مولر، دبلیو.کی.، ۲۲۵
مولندرف، جی. سی.، ۲۲۳
ناکاگاوی، اس.، ۱۹۳
نلسون، کی. ای.، ۲۹۰
نمادها، فهرست، ۷
نمودار شار در، ۵۷، ۵۸
نمودار مربعی منحنی‌الخط، ۵۸
نوارهای جذب در جو، ۲۷۳
نودسن، جی، دی.، ۱۹۲، ۳۴۳
نوردتسان، تی. جی.، ۳۵۴
نوسلت، ویلهلم، ۳۰۹
نیکس، جی. اچ.، ۳۰۹
نیکلسن، پی.، ۸۸
نیم رخ سرعت:
  در لایه مرزی آرام، ۱۳۷
  در جریان آرام در لوله، ۱۵۰
  عمومی، ۱۴۷
نیم‌رخ سرعت عمومی، ۱۴۷
نیوول، ام. ای.، ۲۲۴
واچون، اُر. آی.، ۳۰۹
واحدها:
  و ابعاد، ۲۰
  دستگاه بین‌المللی، ۲۱
وارنر، سی. وای.، ۲۲۴
واریتگتون، آر. اُ.، ۲۲۶
والیس، جی. بی.، ۳۰۹
وان در هلد، ای.، ۲۲۵
وب، آر. ال.، ۳۵۴
ولپت، جی. سی.، ۱۹۲، ۲۲۴
هابنه، ای. دبلیو. پی.، ۲۲۴
هانفیلد، دی. دبلیو.، ۲۲۶
هارپر، دبلیو. بی.، ۵۳
هارتنت، جی. پی.، ۸۸، ۱۹۳، ۳۱۰
هال، جی. آر.، ۳۱۰
هالی، کی. دبلیو.، ۳۰۹
هاوسن، اچ.، ۱۹۲
هاوکینز، جی.، ۳۰۹
هاول، جی. آر.، ۲۹۰
هاهنه، ای.، ۸۸
هُتل، اچ. سی.، ۲۹۰
هدایت:
  از دیوار مرکب، ۲۷
  در سیستم‌های استوانه‌ای، ۲۸
  اثر ضریب هدایت متغیر بر، ۲۷
  تشابه الکتریکی برای، ۷۸
معادلات: در مختصات استوانه‌ای، ۱۵
  معرف، ۱۴
  عمومی یک‌بعدی، ۱۴
  عمومی سه‌بعدی، ۱۵
  در مختصات کروی، ۱۵
هرینگ، آر. جی.، ۲۸۹
همانی کریشهف، ۲۲۹
هوا، خواص فیزیکی، ۳۶۶
هولن، جی. پی.، ۱۶۳، ۲۲۳، ۳۱۰
هولندز، کی. جی. تی.، ۲۲۶
هیسلر، ام. پی.، ۱۳۰
هیلپرت، آر.، ۱۹۲
هیوسار، آر. بی.، ۲۲۴