


پخش بار اقتصادی ELD (Economic Load Dispatch)

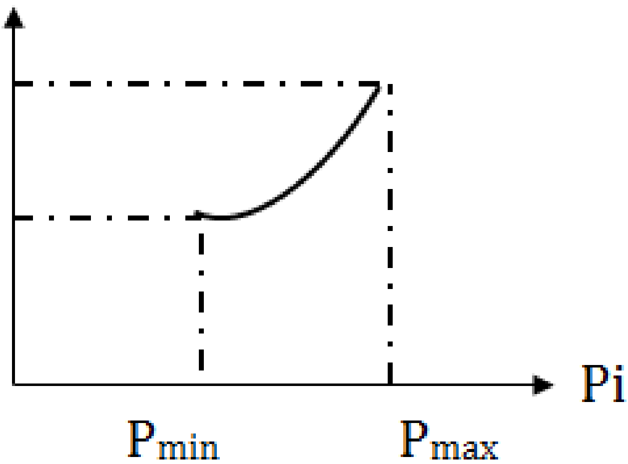
تابع هزینه با واحد پول بر ساعت $(\frac{\$}{hr})$

مشخصه ورودی – خروجی واحد های حرارتی Gen. I/O characteristic

$C_i = f(P_i)$

یا

$H_i = F(P_i)$



تابع سوخت با واحد انرژی بر ساعت

$(\frac{MBTU}{hr})$

در مورد واحدهای بزرگ حرارتی ⇦ $P_{min} \neq 0$ است. چرا؟

معمولاً هزینه ی مربوط به تولید توان P_i بصورت تابع درجه دوم از P_i نمایش داده می‌شود:

$$c_i(P_i) = a_i P^2{}_i + b_i p_i + C_i \quad (\frac{\$}{h})$$




هزینه افزایشی (IC): بیانگر میزان افزایش هزینه به ازای تولید ۱ مگاوات بیشتر انرژی

$$Incremental\ Cost\ (IC) = \frac{dC_i(P_i)}{dp_i} = 2_{ai}P_i + b_i \qquad (\$/\mathrm{MWh})$$

تابع هدف تعریف شده توسط اپراتور سیستم: حداقل کردن هزینهٔ کل سیستم هدف اصلی می باشد. (اپراتور سیستم در ایران مرکز مدیریت شبکه (IGMC) می‌باشد که کل سیستم را Dispatch میکند و هدفش حداقل کردن هزینه کل سیستم است).

تابع هدف $J = c_1(P_1) + c_2(P_2) + \cdots. + c_N(P_N)$

قید تساوی $Equatity\ constraint\colon\ P_1 + P_2 + \cdots + P_N = P_D + P_{Loss}$

یعنی اینکه مجموع توان تولیدی توسط ژنراتورها باید برابر تقاضا و تلفات سیستم باشد

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = P_D + P_{loss}$$

قید نامساوی Inequality constraint: $P_i^{min} \le P_i \le P_i^{max}$

یعنی توان تولیدی هر ژنراتور باید بین حداقل و حداکثر مقدار مجاز آن باشد.




شکل کلی مسائل بهینه سازی بصورت زیر قابل بیان است:

$Min\ f(x)$ → حداقل سازی تابع هدف (Minimization)

$Subject\ to:\ \ g(x) = 0$ → قید مسئله

$F = f(x) + \lambda g(x)$ → تابع لاگرانژ

λ → ضریب لاگرانژ

این تابع لاگرانژ در مسئله ELD بصورت زیر خواهد بود که در آن هدف حداقل سازی هزینهٔ تولید نیروگاهها با شرط برابری مجموع تولید با توان مصرفیِ بار می باشد.

$$\boldsymbol{Largrangian\ Function}:\quad \boldsymbol{F = C(P_G) + \lambda(P_D - e^T P_G)}$$

تابع لاگرانژ

هزینهٔ کل

ضریب لاگرانژ

بار

مجموع تولید

جهت رسیدن به شرایط بهینه، باید مشتق تابع نسبت به هریک از متغیرهای آن برابر صفر باشد:

شرایط بهینه سازی

$$\frac{\partial F}{\partial P_{Gi}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow P_D - e^T P_G = 0 \longrightarrow e^T P_G = P_D$$

همان قید تساوی مسئله

$$\frac{\partial F}{\partial P_{Gi}} = 0 \Rightarrow \frac{d\,C(P_{Gi})}{dP_{Gi}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{d\,C(P_{Gi})}{dP_{Gi}} = \lambda \xrightarrow{\text{بصورت برداری}} a + BP_G = \lambda e$$

$$\boxed{P_G = \lambda B^{-1}e - B^{-1}a} \quad \text{I}$$

داشتیم $\boxed{e^T P_G = P_D}$ II

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{P_D + e^T B^{-1} a}{e^T B^{-1} e}} \quad \text{III}$$

با جایگذاری III در I، رابطه توان تولیدی می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\boxed{P_G = \propto P_D + \beta}$$

که در آن ضرایب $\propto$ و β عبارتند از:

$$\boxed{\propto = \frac{B^{-1}e}{e^T B^{-1} e}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{B^{-1}e(e^T B^{-1} a)}{e^T B^{-1} e} - B^{-1}a}$$

$$\boxed{P_G = \propto P_D + \beta}$$

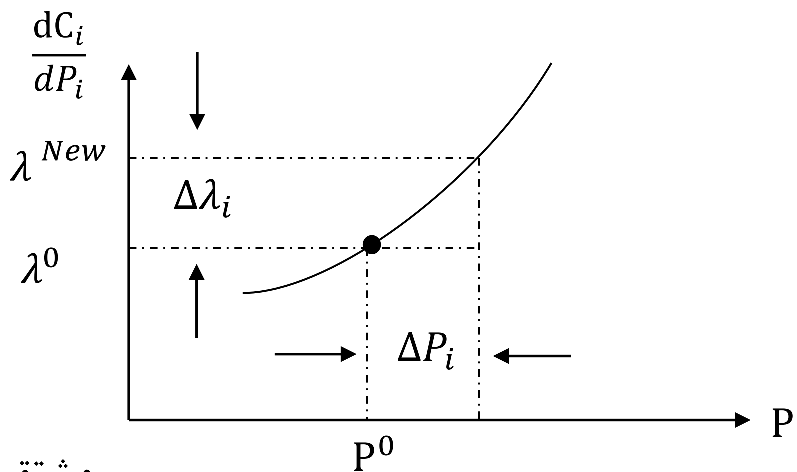
α ضریب مشارکت بار توسط ژنراتورها (Participation Factors) نامیده میشود.

طبق رابطه بالا اگر تقاضا به میزان dP_D تغییر کند توان خروجی ژنراتورها به میزان $dP_G = \alpha dP_D$ تغییر خواهند نمود.

توجه شود که به خاطر شرط توازن توان $e^T \propto = 1$ یا $\sum_{i=1}^{N} \propto_i = 1$ خواهد بود.

فرض کنید در یک نقطه کار مشخص (P^0 و λ^0) هستیم و می خواهیم به ازای تغییری کوچک در توان مصرفی (P_D)، نقطه بهینهٔ جدید را به دست آوریم:



مشتق مرتبه ۲

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\Delta P_i} = \frac{d}{dP_i}\left(\frac{dC_i}{dP_i}\right) \Rightarrow \Delta\lambda_i = C_i''(P_i)\Delta P_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta P_i = \frac{\Delta\lambda}{C_i''}} \quad \text{I}$$

قید تعادل توان

$$\boxed{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \cdots + \Delta P_N = \Delta P_D} \quad \text{II}$$

با توجه به اینکه λ^{New} برای کل سیستم برابر خواهد بود، لذا $\Delta\lambda$ برای کل سیستم و تمام واحدها برابر است:

$$\Delta\lambda = \lambda^{\text{New}} - \lambda^0$$

I و II $\Rightarrow$

$$\Delta P_D = \frac{\Delta\lambda}{C''_1} + \frac{\Delta\lambda}{C''_2} + \cdots + \frac{\Delta\lambda}{C''_N} = \Delta\lambda \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{C''_i}\right)$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\Delta P_D}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C''_i}}}$$ III

I و III $\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta P_i = \frac{\frac{1}{C''_i}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{c''_i}} \Delta P_D}$$

مقدار اولیهٔ توان تولیدیِ ژنراتور iام

$$P_{new\,i} = P_{base\,i} + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta P_D}\right)\Delta P_D \Rightarrow P_{new\,i} = P_{base\,i} + \Delta P_i$$

مقدار جدید توان تولیدیِ ژنراتور iام

$$\Rightarrow \boxed{P_{new\,i} = P_{base\,i} + \frac{\frac{1}{C''_i}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C''_i}}\Delta P_D}$$

مثال: یک سیستم شامل سه نیروگاه با توابع هزینه زیر است:

$$\begin{cases} C_1(P_1) = 561 + 7.92P_1 + 0.001562P_1^2 \\ C_2(P_2) = 310 + 7.85P_2 + 0.00194P_2^2 \\ C_3(P_3) = 78 + 7.97P_3 + 0.00482P_3^2 \end{cases}$$

فرض کنید که P_D=850MW و P_{Dnew}=900MW باشد.

حل مسئله بهینه سازی با ازای توان بار P_D=850MW

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dP_1} = 7.92 + 0.003124P_1 = \lambda \\ \dfrac{dC_2}{dP_2} = 7.85 + 0.00388P_2 = \lambda \\ \dfrac{dC_3}{dP_3} = 7.97 + 0.00964P_3 = \lambda \\ P_1 + P_2 + P_3 = 850 \end{cases}$$

۴ معادله ۴ مجهولی




پس از حل ELD (حل ۴ معادلهٔ ۴ مجهولی) به ازای P_D=850MW، توانهای تولیدی سه واحد بصورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} P_1 = 393.2MW \\ P_2 = 334.6MW \\ P_3 = 122.2MW \\ \lambda = 9.147 \end{cases}$$

حال بدون حل دوبارهٔ ELD، توانهای تولیدیِ جدید را به ازای P_D=900MW بصورت زیر بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta P_1}{\Delta P_D} = \dfrac{\frac{1}{C''_1}}{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{C''_i}} = \dfrac{(2\times 0.001562)^{-1}}{(2\times 0.001562)^{-1} + (2\times 0.00194)^{-1} + (2\times 0.00482)^{1}} \Rightarrow \dfrac{\Delta P_1}{\Delta P_D} = 0.47 \\ \dfrac{\Delta P_2}{\Delta P_D} = \dfrac{\frac{1}{C''_2}}{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{C''_i}} = \dfrac{(2\times 0.00194)^{-1}}{(2\times 0.001562)^{-1} + (2\times 0.00194)^{-1} + (2\times 0.00482)^{1}} \Rightarrow \dfrac{\Delta P_2}{\Delta P_D} = 0.38 \\ \dfrac{\Delta P_3}{\Delta P_D} = \dfrac{\frac{1}{C''_3}}{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{C''_i}} = \dfrac{(2\times 0.00482)^{-1}}{(2\times 0.001562)^{-1} + (2\times 0.00194)^{-1} + (2\times 0.00482)^{1}} \Rightarrow \dfrac{\Delta P_3}{\Delta P_D} = 0.15 \end{cases}$$

ΔP_D =50MW

$$\begin{cases} P_{new1} = P_{base1} + \frac{\Delta P_1}{\Delta P_D}\Delta P_D = 393.2 + 0.47 \times 50 = 416.7\text{MW} \\ P_{new2} = P_{base2} + \frac{\Delta P_2}{\Delta P_D}\Delta P_D = 353.6 \text{ MW} \\ P_{new3} = P_{base3} + \frac{\Delta P_3}{\Delta P_D}\Delta P_D = 129.7 \text{ MW} \end{cases}$$

در واقع چون تغییرات توان کوچک بود (50MW) بدون اینکه دوباره مساله بهینه سازی را حل کنیم نقاط کار جدید را بر حسب نقاط کار قبلی بدست آوردیم. این کار وقتی درست است که تغییرات حول نقطه کار (ΔP_D) زیاد نباشد.

تابع لاگرانژ بصورت مجموع تابع هدف و قیود مسئله است که البته قیود در ضرایبی به نام ضرایب لاگرانژ ضرب شده اند.

ضرایب لاگرانژ

The Lagrangian Function:

تابع لاگرانژ

$$F(P_i,\lambda,\mu_i,\Upsilon_i) = J(P_i) + \lambda\Phi(P_i) + \sum_{i=1}^{N}\mu_i g_i(P_i) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i h_i(P_i)$$

شرایط بهینه سازی کوهن–تاکر Kuhn- Tucker(KT)

شرایط اصلی

A $$\frac{\partial F}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad \forall i = 1,2,\ldots,N$$

B $$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

شرایط مکمل

C $$\begin{cases}\mu_i g_i = 0\\ \mu_i \geq 0\end{cases}$$

D $$\begin{cases}\Upsilon_i h_i = 0\\ \Upsilon_i \geq 0\end{cases}$$

- اگر متغیری به حد خود برسد $\longleftarrow$ $g_i(P_i) = 0$ و در این صورت: $\mu_i \neq 0$
- اگر متغیری در محدوۀ خود باشد $\longleftarrow$ $g_i(P_i) < 0$ و در این صورت: $\mu_i = 0$
- قیود می توانند قیود پایین یا بالا باشند (حداقل و حداکثر)

در مسئله ELD تابع هدف و قیود مساوی و نامساوی بصورت زیر است:

$$
\begin{cases}
Min\,J = \sum_{i=1}^{N} C_i(P_i) \\
\text{s.t.} \\
\Phi\,(P_i) = P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0 \\
g_i(P_i) = P_i^{min} - P_i \leq 0 \\
h_i(P_i) = P_i - P_i^{max} \leq 0
\end{cases}
$$

با توجه به تابع هدف و قیود بیان شده، تابع لاگرانژ بصورت زیر خواهد بود:

$$F = \sum_{i=1}^{N} C_i(P_i) + \lambda[P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i] + \mu_1[P_1^{min} - P_1] + \mu_2[P_2^{min} - P_2] + \cdots + \mu_N[P_N^{min} - P_n] + \gamma_1[P_1 - P_1^{max}] + \gamma_2[P_2 - P_2^{max}] + \cdots + \gamma_N[P_n - P_N{}^{max}]$$

شرایط اصلی KT

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow \dfrac{dc_i(P_i)}{dP_i} - \lambda - \mu_i + \gamma_i = 0 \qquad \forall i = 1 \ldots\ldots N \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0 \end{cases}$$

شرایط بعدی همان شرایط مکمل هستند که بایستی حدود مربوط به مقدار تولید هر ژنراتور را چک کنیم که آیا در محدودهٔ مینمم و ماکزیمم خودش هست یا نه.

ضرایب لاگرانژ مربوط به حد بالای متغیرها

ماکزیمم

$$\begin{cases} \gamma_1[P_1 - P_1^{max}] = 0 \quad ; \Upsilon_1 \geq 0 \\ \gamma_2[P_2 - P_2^{max}] = 0 \quad ; \Upsilon_2 \geq 0 \\ \vdots \\ \gamma_N[P_N - P_N^{max}] = 0 \quad ; \Upsilon_N \geq 0 \end{cases}$$

ضرایب لاگرانژ مربوط به حد پایین متغیرها

مینیمم

$$\begin{cases} \mu_1\left[P_1^{min} - P_1\right] = 0 \quad ; \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2\left[P_2^{min} - P_2\right] = 0 \quad ; \mu_2 \geq 0 \\ \vdots \\ \mu_N\left[P_N^{min} - P_N\right] = 0 \quad ; \mu_N \geq 0 \end{cases}$$




چند حالت مختلف را برای برقراری قیود در نظر می گیریم:

حالت اول

فرض کنید که هیچ ژنراتوری به حد خود (بالا و پایین) نرسد؛ یعنی تولید تمامی ژنراتورها مابین ماکزیمم و مینیمم خودشان باشند، بنابراین:

$$\mu_i = \gamma_i = 0 \longrightarrow \frac{dc_i(P_i)}{dP_i} = \lambda \qquad \forall i$$

یعنی همه ژنراتورها در نقطه ای کار خواهند کرد که مشتق هزینه‌ی همهٔ آن ها با هم برابر باشد. در نتیجه هزینه افزایشی همه آن‌ها با هم برابر خواهد بود.




حالت دوم

فقط یک ژنراتور به حد بالای خود رسیده و تمامی ژنراتورهای دیگر داخل محدودهٔ خود هستند

$$\begin{cases} P_1 = P_1^{max} \\ all\ other P_i\ \ are\ within\ their\ limits \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dC_1(P_1)}{dP_1} = \lambda - \gamma_1 \leq \lambda \quad \&\& \quad \frac{dc_i(P_i)}{dP_i} = \lambda \quad \forall i \neq 1}$$

نتیجه: هزینه افزایشی ژنراتوری که به حداکثر خود رسیده از همه ژنراتورهای دیگر کمتر است، به عبارت دیگر این ژنراتور ارزانترین ژنراتور سیستم است.

حالت سوم

فرض کنید یک ژنراتور به حداقل خود برسد و بقیه ژنراتورها داخل حدود خود می‌باشند.

$$\begin{cases} P_1 = P_1^{min} \\ all\ other P_i\ \ are\ within\ their\ limits \end{cases} \Rightarrow \mu_1 > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dc_1(P_1)}{dP_1} = \lambda + \mu_1 \geq \lambda \qquad \&\& \qquad \frac{dc_i(P_i)}{dP_i} = \lambda \qquad \forall i \neq 1}$$

نتیجه: هزینه افزایشی ژنراتوری که به حداقل خود رسیده از همه ژنراتورهای دیگر بیشتر است، به عبارت دیگر این ژنراتور گرانترین ژنراتور سیستم است.




مفهوم ضرایب لاگرانژ

λ : هزینه افزایشی سیستم برای برآورده کردن یک MW توان بیشتر

μ_i : تغییر در هزینه افزایشیِ ژنراتور iام وقتی این ژنراتور به حد پایین خود رسیده است.

γ_i : تغییر در هزینه افزایشیِ ژنراتور iام وقتی این ژنراتور به حد بالای خود رسیده است.




مثال: **پخش بار اقتصادی را برای سیستم زیر که شامل سه ژنراتور با مشخصات زیر است حل کنید.**

$$\begin{cases} C_2(P_1) = 0.00128{P_1}^2 + 6.48P_1 + 459 & 150^{MW} \leq P_1 \leq 600^{MW} \\ C_2(P_2) = 0.00194{P_2}^2 + 7.85P_2 + 310 & 100^{MW} \leq P_2 \leq 400^{MW} \\ C_3(P_3) = 0.00482{P_3}^2 + 7.97P_3 + 78 & 50^{MW} \leq P_3 \leq 600^{MW} \end{cases}$$

$$Total\ Load = 850MW \Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 = 850\text{MW}$$

ابتدا فرض می کنیم که تمامی ژنراتورها بین حدود خود باشند، مگر اینکه بعد از حل، خلاف این موضوع مشخص شود.
پس ابتدا تابع لاگرانژ بصورت زیر می‌باشد:

$$F = \sum_{i=1}^{3} c_i(P_i) + \lambda(850 - P_1 - P_2 - P_3)$$

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^{3} c_i(P_i) + \lambda(850 - P_1 - P_2 - P_3) \\ \dfrac{\partial F}{\theta P_1} = 0.00256P_1 + 6.48 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\theta P_2} = 0.00388P_2 + 7.85 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\theta P_3} = 0.00964P_3 + 7.97 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\theta \lambda} = 850 - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \end{cases}$$

۴ معادله ۴ مجهولی

$$\begin{cases} P_1 = 707.15MW \\ P_2 = 112.16MW \\ P_3 = 32.7MW \\ \lambda = 8.285\dfrac{\$}{MW} \end{cases}$$

ژنراتور G_1 حد بالا و G_3 حد پایین خود را نقض کرده است. بنابراین تابع لاگرانژ را بایستی با توجه به ژنراتورهایی که از حد خود خارج شده اند دوباره بنویسیم. برای ژنراتور اولی که به حد بالای خود رسیده γ_1 و برای ژنراتور سومی که به حد پایین خود رسیده μ_3 را لحاظ میکینم.

$$F = \sum_{i=1}^{3} c_i(P_i) + \lambda(850 - P_1 - P_2 - P_3) + \gamma_1(P_1 - {P_1}^{max}) + \mu_3({P_3}^{min} - P_3)$$

شرایط مکمل

$$\mu_3, \gamma_1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1(P_1 - {P_1}^{max}) = 0 & \longrightarrow P_1 = {P_1}^{max} = 600\text{MW} \\ \mu_3({P_3}^{min} - P_3) = 0 & \longrightarrow P_3 = {P_3}^{min} = 50\text{MW} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $P_2 = 850 - 600 - 50 = 200MW$ $\Rightarrow$ در محدوه خودش است P2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\theta P_1} = 0.00256P_1 + 6.48 - \lambda + \gamma_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\theta P_2} = 0.00388P_2 + 7.85 - \lambda = 0 \xrightarrow{P_2 = 200} \lambda = 8.626\dfrac{\$}{MWh} \\ \dfrac{\partial F}{\theta P_3} = 0.00964P_3 + 7.97 - \lambda - \mu_3 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\theta \lambda} = 850 - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \end{cases}$$




حالا باید چک کنیم که ژنراتوری که به ماکزیمم خود رسیده آیا ارزان ترین بوده و ژنراتوری که به مینیمم رسیده آیا گران ترین بوده یا خیر؟

$$\frac{dC(P_1)}{dP_1}|P_{1=600MW} = 8.016 < \lambda \rightarrow ok$$

$$\frac{dC(P_3)}{dP_3}|P_{3=50MW} = 8.452 \ngtr \lambda \rightarrow not\ ok$$

بنابراین خروجی G3 نباید 50MW در نظر گرفته شود، بلکه به صرفه تر خواهد بود که ژنراتور سوم توان بیشتری تولید نماید.

حال که مطمئن شدیم که ژنراتور اول ok است پس آن را در ماکزیمم خود در نظر می‌گیریم و حالا هدف مساله مینیمم سازی هزینۀ توان باقی مانده بین دو ژنراتور دیگر (G2 و G3) است.

بازنویسی مسئله

$$Min\ \ f = C_2(P_2) + C_3(P_3)$$

$$s.t\ \ \ P_2 + P_3 = 250\text{MW}$$

$$F = C_2 + C_3 + \lambda(250 - P_2 - P_3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial P_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial P_3} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = 187.1\text{MW} \\ P_3 = 62.9\text{MW} \\ \lambda = \dfrac{dC_2}{dP_2} = 8.576 \dfrac{\$}{MWh} \end{cases} \Rightarrow$$

✓ هر دوی G2 و G3 در محدودهٔ خود می‌باشند.




پخش بار اقتصادی با در نظر گرفتن تلفات:

قید تعادل توان

تابع لاگرانژ $$F = \sum_{i=1}^{N} C_i(P_i) + \lambda \left[P_D + \underbrace{P_{Loss}(P_1, P_2, \ldots\ldots P_N)} - \sum_{i=1}^{N} P_i \right]$$

تلفات شبکه وابسته به تولید ژنراتورهاست، چون با تغییر تولید ژنراتورها، توانهای جاری در خطوط تغییر می کنند.

شرایط بهینه سازی KT $$\frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{dC_i(P_i)}{dP_i} + \lambda \left(\frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_i} - 1 \right) = 0 \qquad \forall_i$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_i}} \right] \frac{dC_i(P_i)}{dP_i} = \lambda$$



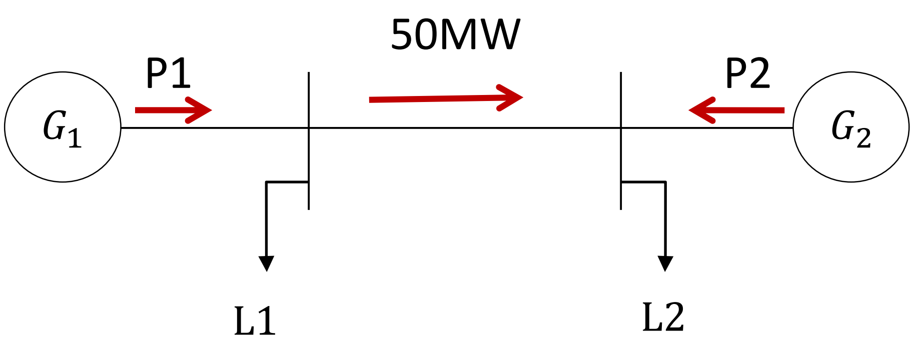

$$\underbrace{\left[\frac{1}{1-\frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_i}}\right]}\frac{dC_i(P_i)}{dP_i}=\lambda$$

$\frac{\partial P_{Loss}}{\partial P_i}$ ⟹ تلفات افزایشی در باس i
(Incremental Loss)

$$Penalty\ Factor = PF_i = \frac{1}{1-\frac{\partial P_{loss}}{\partial P_i}} \Rightarrow PF_i\frac{dc_i}{dP_i}=\lambda$$

اگر تلفات سیستم با افزایش P_i بیشتر شود، $PF_i > 1$
اگر تلفات سیستم با افزایش P_i کمتر شود، $PF_i < 1$

یک مثال ساده:

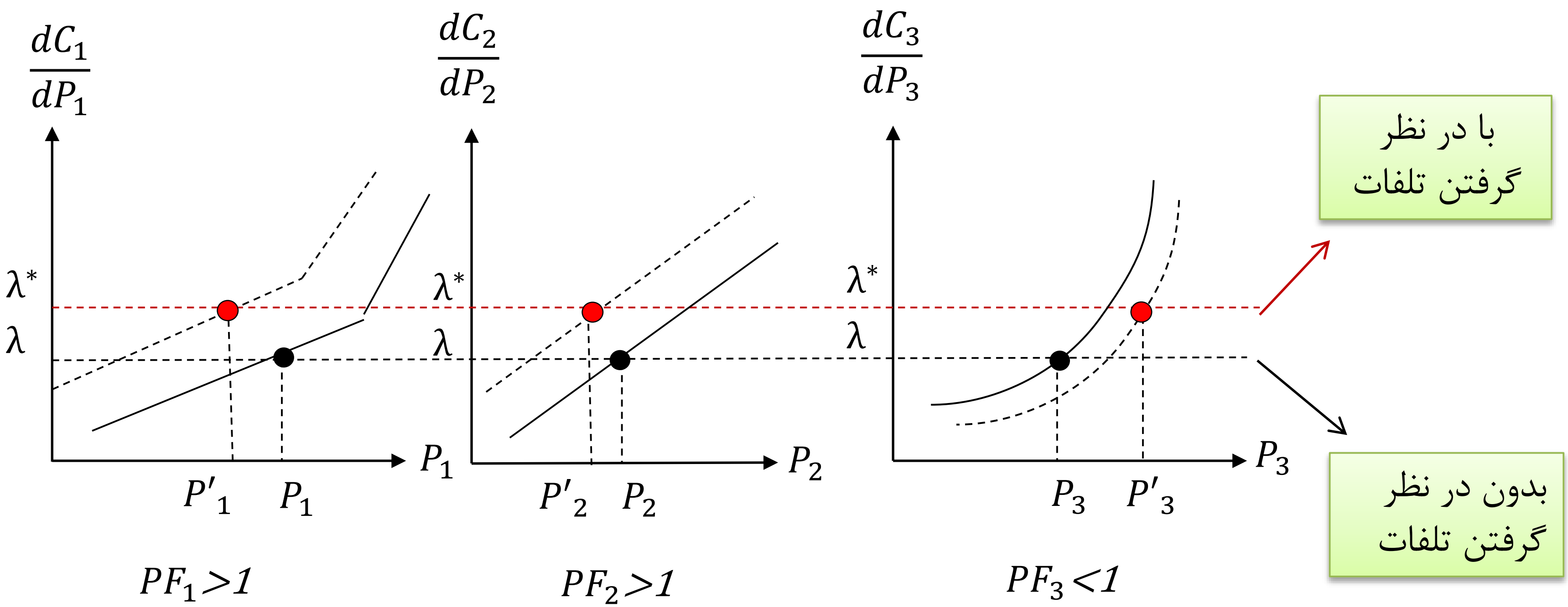


با فرض ثابت بودن بار، با افزایش توان خروجی ژنراتور G1 (یعنی P1)، توان عبوری از خط زیاد می شود. برعکس با زیاد شدن P2 توان عبوری کمتر می گردد.

$$\boxed{\frac{\partial P_{loss}}{\partial P_1} > 0 \longrightarrow PF_1 > 1}$$

$$\boxed{\frac{\partial P_{loss}}{\partial P_2} < 0 \longrightarrow PF_2 < 1}$$


فرض کنید که ۳ ژنراتور با توابع هزینه زیر داریم:

۱– λ برای هر سه ژنراتور برابر است

۲– با لحاظ نمودن تلفات، ژنراتوری که باعث افزایش تلفات می‌شود کمتر Dispatch شده خروجی آن کمتر میگردد. ژنراتوری که باعث کاهش تلفات می‌گردد، بیشتر Dispatch شده و خروجی اش بیشتر میگردد.

۳– در کل چون تلفات داریم، λ بزرگتر شده و در ضمن λ^* برای هر سه ژنراتور یکسان است.

λ برای تمامی ژنراتورهای سیستم یکسان است. مگر زمانی که یک ژنراتور به حد بالا یا پایین خودش برسد

چون تلفات معمولاً رابطه غیر خطی با توان ژنراتورها دارد، لذا تشکیل تابع لاگرانژ و حل آن با استفاده از مشتق و ... به راحتی انجام پذیر نیست و مجبور هستیم از روش تکرار استفاده کنیم.




مثال: در سیستم زیر پخش بار اقتصادی را با در نظر گرفتن تلفات بدست آورید.

$$\begin{cases} C_1(P_1) = {P_1}^2 + 8.5P_1 + 5 \\ C_2(P_2) = 3.4{P_2}^2 + 25.5\,P_2 + 4 \\ P_D = 700 \\ P_{Loss} = 0.00009{P_1}^2 + 0.00003{P_2}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P_{Loss}}{\partial P_1} = 0.00018P_1 \\ \dfrac{\partial P_{Loss}}{\partial P_2} = 0.00006P_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} PF_1 = \dfrac{1}{1-\dfrac{\partial P_{Loss}}{\partial P_1}} = \dfrac{1}{1-0.00018P_1} \\ PF_2 = \dfrac{1}{1-0.00006\,P_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PF_1\dfrac{dC_1}{dP_1} = \lambda \Rightarrow P_1 = \dfrac{\lambda - 8.5}{2+0.00018\lambda} & \text{A} \\ PF_2\dfrac{dC_2}{dP_2} = \lambda \Rightarrow P_2 = \dfrac{\lambda - 25.5}{6.8+0.00006\lambda} & \text{B} \end{cases}$$




ابتدا از تلفات صرفنظر میکنیم تا مقادیر اولیه ای برای P_i ها بدست آوریم:

$$F = C_1 + C_2 + \lambda(700 - P_1 - P_2)$$

$$\begin{cases} IC_1 = IC_2 = \dfrac{dC_1}{dP_1} = \dfrac{dC_2}{dP_2} = \lambda \\ P_1 + P_2 = 700 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = 542.84 \text{ MW} \; ; \; P_2 = 157.16MW \; ; \; \lambda = 1094.18 \; ; \; P_{Loss} = 27.26MW$$

برای جبران P_{Loss} باید مجموع خروجی ژنراتور ها بیشتر شود، لذا λ را بزرگتر فرض می‌کنیم:

$$\lambda = 1200 \frac{\$}{MWh} \xrightarrow{\text{A و B}} P_1 = 537.68 \; ; \; P_2 = 170.91 \Rightarrow P_{Loss} = 26.9\text{MW}$$

بررسی تعادل توان $\quad P_1 + P_2 - (700 + P_{Loss}) = -18.3 \; MW \Rightarrow$ لذا λ باید بزرگتر باشد




$\lambda = 1240$ ⇨ $P_1 = 553.93\ ;\ P_2 = 176.67 \Rightarrow P_{loss} = 28.55MW$

بررسی تعادل توان $P_1 + P_2 - (700 + P_{Loss}) = +2.05MW$

لذا λ را باید کمی کوچکتر کرد:

$\lambda = 1235$ ⇨ $P_1 = 551.91MW\ ;\ P_2 = 175.95MW \rightarrow P_{Loss} = 28.34MW$

بررسی تعادل توان $P_1 + P_2 - (700 + P_{loss}) = -0.48 < (\varepsilon = 0.5)$ ⇨ توقف تکرار


روش حل مساله با در نظر گرفتن تلفات به طریق تکرار: