



تبدیلات هندسی دو بعدی

۹

سه بعدی

مباحث این فصل:

- ❖ تبدیلات اولیه
 - انتقال
 - دوران
 - تغییر مقیاس
- ❖ ماتریس‌های همگن
- ❖ تبدیلات مرکب
- ❖ تبدیلات سه بعدی
- ❖ سایر تبدیلات
 - تبدیلات Shear
 - تبدیلات Affine

تبدیلات هندسی عبارتند از تغییر در موقعیت یا شکل و یا اندازه اشکال و تصاویر. تبدیلات هندسی اولیه عبارتند از : انتقال، دوران و تغییر مقیاس. سایر تبدیلاتی که به اشکال اعمال میشوند عبارتند از : انعکاس و تبدیلات Shear.

تبدیلات اولیه :

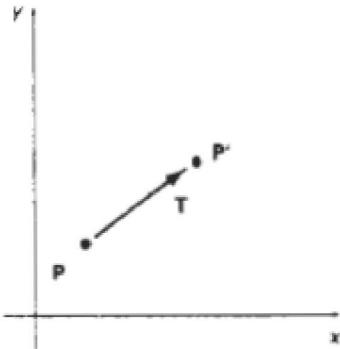
در اینجا به تبدیلات هندسی پایه میپردازیم و در بخش بعدی بیان میکنیم چگونه این تبدیلات را به صورت بیان ریاضی از ماتریسهای ساده تر پیاده سازی کنیم تا بتوان ترکیبی از این تبدیلات را محاسبه کرد.

انتقال :

انتقال یعنی حرکت دادن یک شیء در امتداد یک خط راست از نقطه ای به نقطه دیگر. برای انتقال یک نقطه در مختصات دو بعدی کافیست مختصات بردار انتقال (t_x, t_y) را به مختصات آن نقطه اضافه کنیم.

$$x' = x + t_x \quad , \quad y' = y + t_y$$

شکل زیر انتقال نقطه توسط بردار انتقال نشان میدهد :



معادلات بالا را میتوان به صورت ماتریسی نیز بیان کرد:

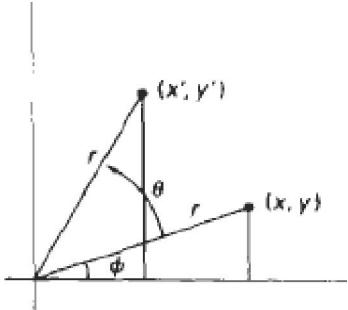
$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$p' = p + t$$

واضح است که انتقال نوعی تبدیل هندسی سخت است یعنی شکل را تغییر نمیدهد، تنها مکان هر نقطه از تصویر را توسط یک مقدار ثابت تغییر میدهد.

دوران :

دوران در مختصات دو بعدی یعنی انتقال شئ روی یک مسیر دایره ای در صفحه XY . برای انجام عمل دوران به دو پارامتر نیاز داریم: اول زاویه چرخش و دوم نقطه محوری. ابتدا معادلات دوران یک نقطه حول مبدأ مختصات را بدست می آوریم. شکل زیر دوران نقطه حول مبدأ مختصات را نشان میدهد.



$$x' = r \cos(\phi + \theta) = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\phi + \theta) = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta$$

همچنین مختصات اولیه نقطه در مختصات قطبی برابر است با :

$$x = r \cos \phi \quad , \quad y = r \sin \phi$$

با جایگزینی معادلات بالا داریم:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

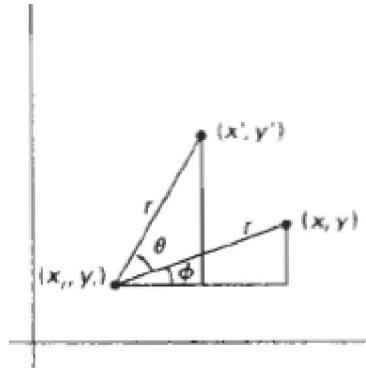
$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

مانند قبل میتوان این معادلات را بر حسب ماتریسها بدست آورد:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$p' = R.p$$

برای دوران حول نقطه غیرمبدأ از فرمول های زیر استفاده میکنیم:



$$x' = x_l + (x - x_l) \cos \theta - (y - y_l) \sin \theta$$

$$y' = y_l + (x - x_l) \sin \theta + (y - y_l) \cos \theta$$

نکته 1 : چرخش در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت است .

نکته 2 : واضح است که دوران یک تبدیل سخت است..

تغییر مقیاس:

تغییر مقیاس تبدیلی است که اندازه تصویر را تغییر میدهد. برای تغییر اندازه از ضریب مقیاس استفاده میشود.

$$x' = x \cdot s_x, \quad y' = y \cdot s_y$$

که در آن s_x تغییر اندازه روی محور X و s_y تغییر اندازه روی محور y میباشد. این معادلات را میتوان به صورت معادلات زیر نوشت:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \Rightarrow p' = S \cdot p$$

میتوان هر مقدار مثبتی را به ضریب مقیاس نسبت داد. مقادیر کمتر از یک موجب کوچک شدن و مقادیر بیشتر از یک موجب بزرگتر شدن جسم می شود. اگر به هر دو مؤلفه ای ضریب مقیاس، مقدار یک داده شود، در این صورت شکل تغییر اندازه نخواهد داد.

نمایش ماتریسی و مختصات همگن:

در برنامه های گرافیکی معمولاً از ترکیبی از تبدیلات متوالی استفاده میشود. در این بخش ما فرمولهای ماتریسی بخش قبل را دوباره بازنویسی میکنیم تا فرایند چند تبدیل متوالی را راحتتر انجام دهیم. در بخش پیش دیدیم که هر یک از تبدیلات اولیه را میتوان به صورت زیر بیان کرد :

$$P' = M_1 \cdot P + M_2$$

که در آن P' مختصات نقطه اولیه، P' مختصات نقطه نهایی، M_1 یک ماتریس دو در دو که میتواند یک ماتریس ضریب مقیاس و یا یک ماتریس دوران باشد و در نهایت M_2 برابر با یک ماتریس یک در دو است که یک ماتریس انتقال است. اگر به جای استفاده از ماتریس دو در دو از یک ماتریس سه در سه استفاده کنیم، میتوانیم تمام تبدیلات را بصورت ضرب بیان کنیم. برای این منظور به جای استفاده از مختصات دو بعدی (x, y) از مختصات سه بعدی $(x, y, 1)$ استفاده میکنیم. استفاده از مختصات سه بعدی این امکان را میدهد تا فرمولهای تبدیلات را دوباره و تنها بر اساس ضرب بیان کنیم. حال دوباره فرمولهای تبدیلات هندسی را بر اساس ضرب ماتریسهای سه در سه بیان میکنیم:

انتقال :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P' = T(t_x, t_y) \cdot P$$

دوران:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P' = R(\theta) \cdot P$$

تغییر مقیاس:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

تبدیلات مركب

با استفاده از نمایش ماتریسی که در بخش قبل ارائه شد، میتوان برای هر ترکیبی از تبدیلات یک ماتریس تبدیل مركب بنویسیم. ماتریس حاصل را معمولاً ماتریس مركب یا ماتریس الحاق می نامند. برای بدست آوردن ماتریس تبدیل مركب، ماتریسهای تبدیل را از آخر به اول در هم ضرب میکنیم.

اگر دو تبدیل انتقال T_1 و T_2 به یک نقطه اعمال شود، ماتریس تبدیل مركب به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x1} + t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y1} + t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب برای دو دوران متوالی $R(\theta_2)$ و $R(\theta_1)$ داریم :

$$R_{total} = R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

و در نهایت برای دو تغییر مقیاس متوالی با ضریب S_1 و S_2 داریم :

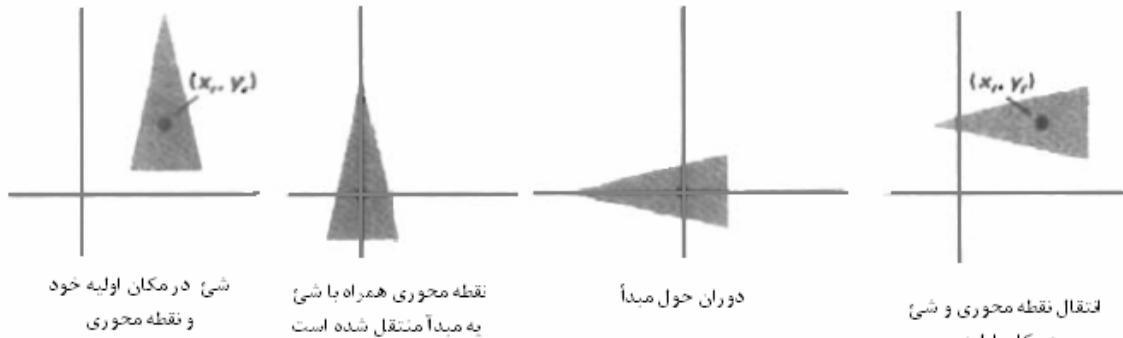
$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دوران حول نقطه دلخواه :

برای دوران حول نقطه دلخواه مراحل زیر را دنبال میکنیم:

- 1 شکل را همراه با نقطه محوری به مبدأ انتقال میدهیم.
- 2 شکل را حول مبدأ مختصات دوران میدهیم .
- 3 شکل را به مکان اولیه خود باز میگردانیم.

این انتقالات در شکل زیر نشان داده شده است(از چپ به راست).



بنابراین ابتدا یک انتقال در امتداد بردار $(-x_c, -y_c)$ سپس یک دوران به اندازه θ و در نهایت یک انتقال دیگر در امتداد بردار (x_c, y_c) . لذا ماتریس ترکیب به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_r(1-\cos \theta) + y_r \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & y_r(1-\cos \theta) - x_r \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای عمل تغییر مقیاس نیز کافیست که نقطه را به مبدأ مختصات انتقال و سپس عمل تغییر مقیاس را انجام دهیم.

تبدیلات سه بعدی :

انتقال : در مختصات سه بعدی، یک نقطه از موقعیت $P(x, y, z)$ به موقعیت $P'(x', y', z')$ توسط ماتریس زیر انتقال می‌یابد.

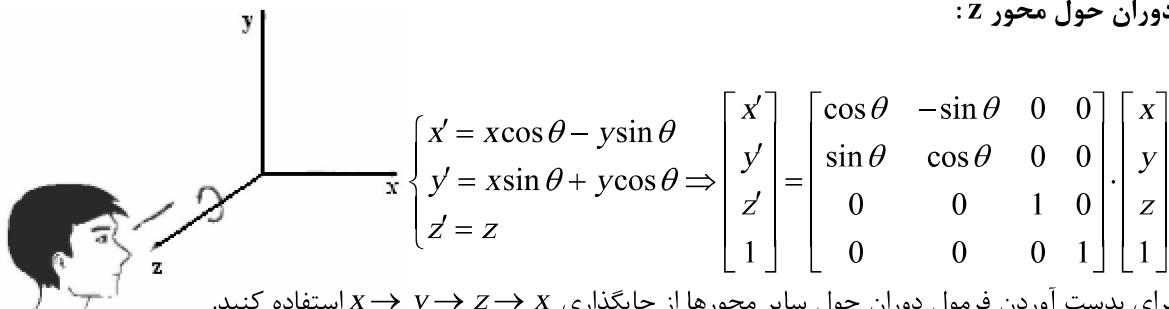
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x + t_x \\ y = y + t_y \\ z = z + t_z \end{cases}$$

تغییر اندازه : ماتریس تغییر اندازه را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x.S_x \\ y = y.S_y \\ z = z.S_z \end{cases}$$

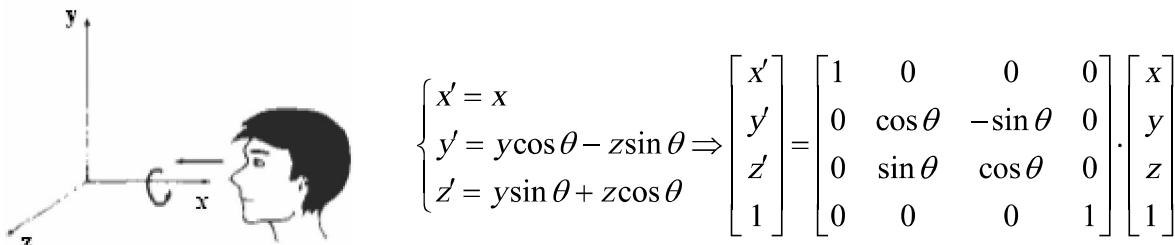
دوران : برای تولید یک تبدیل دوران باید محور دوران و زاویه چرخش را مشخص کنیم. در سه بعدی دوران را میتوان حول هر خط موجود در فضا انجام داد اما در اینجا ما تنها دوران حول محورهای مختصات را بررسی می‌کنیم.

دوران حول محور z :

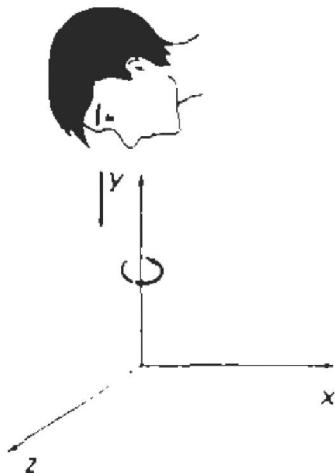


برای بدست آوردن فرمول دوران حول سایر محورها از جایگذاری $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ استفاده کنید.

دوران حول محور x :



دوران حول محور y :

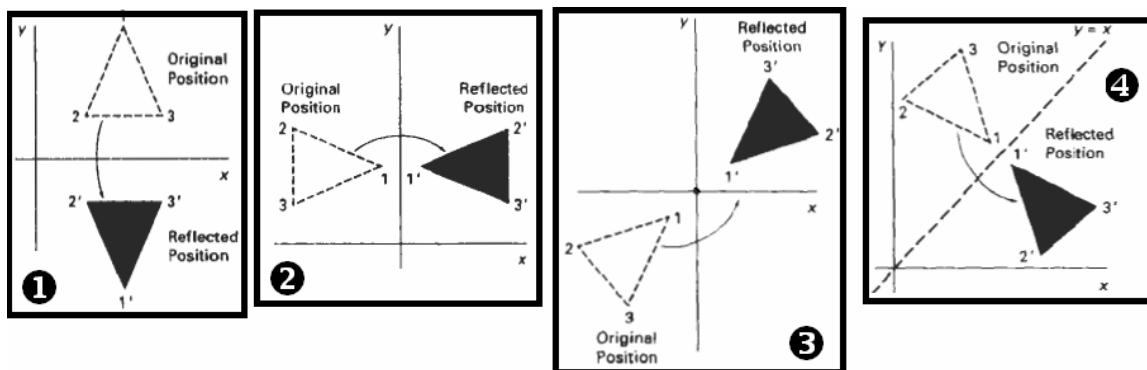


$$\begin{cases} x' = z\cos\theta - x\cos\theta \\ y' = y \\ z' = z\cos\theta - x\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ساختمان تبدیلات :

علاوه بر تبدیلات اولیه که بیان شدند، تبدیلات مفید دیگری نیز وجود دارند که مهمترین آنها عبارتند از : بازتاب و Shear تبدیلات.

برای عمل بازتاب یک محور بازتاب نیاز داریم . در دو بعدی این محور میتواند هر خطی در صفحه مختصات باشد. ما در اینجا بازتاب نسبت به محورهای اصلی و محورهای فرعی بیان میکنیم.



معادلات مربوط به بازتاب اشکال بالا عبارتند از :

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

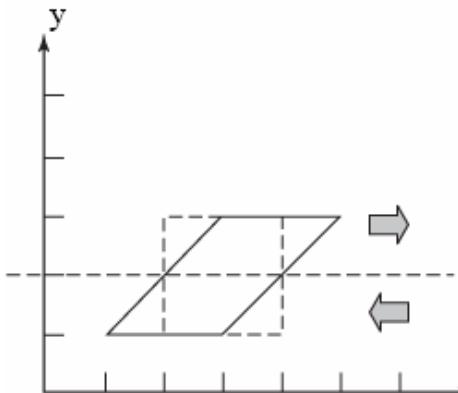
$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تبدیلات Shear

تبدیلات Shear تصویر را در جهت‌های مشخص شیفت میدهند. در واقع این تبدیلات نقطه را به نسبت فاصله از یک خط



و موازی با خط حرکت میدهند. نقاط واقع بر روی خط شیفت داده نمی‌شود و نقاطی که در طرف مقابل اند در جهت مخالف شیفت می‌ابند. تبدیلات Shear شی را دگرگون می‌کنند اما با این حال موازی بودن خطوط را حفظ می‌کنند. شکل روبرو یک نمونه از این تبدیل را نشان میدهد که با مقیاس 1 و نسبت به خط $y=2$ انجام شده است.

معمولًاً شیفت Shear در جهت محور x یا y انجام می‌شود. شیفت Shear در جهت محور x : ماتریس زیر نقاط را با مقیاس sh_x و به نسبت فاصله از خط $y=y_{ref}$ و موازی با آن شیفت میدهد.

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & -sh_x \cdot y_{ref} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + sh_x(y - y_{ref}) \\ y' = y \end{cases}$$

شیفت Shear در جهت محور y : ماتریس زیر نقاط را با مقیاس sh_y و به نسبت فاصله از خط $x=x_{ref}$ و موازی با آن شیفت میدهد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & -sh_y \cdot x_{ref} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y + sh_y(x - x_{ref}) \end{cases}$$

تبدیلات Affine

تبدیلاتی هستند که در آنها موازی بودن خطوط حفظ می‌شود ولی طول خطوط تغییر نمی‌یابند. معروفترین این تبدیلات عبارتند از : انتقال، دوران و تغییر اندازه. برای این سه تبدیل زوایه بین خطوط بعد از تبدیل تغییر نخواهد کرد.

سؤال : چه رابطه ای بین دوران با زاویه $\theta = n\pi$ و عمل تغییر مقیاس در حالت دو بعدی وجود دارد؟ با استفاده از روابط جبری ارتباط مورد نظر را اثبات کنید.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta=n\pi, n=2k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_x = 1 \\ s_y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta=n\pi, n=2k+1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_x = -1 \\ s_y = -1 \end{cases}$$

از حالت اول نتیجه می‌گیریم که دوران با $2k\pi$ هیچ تغییری در شکل ندارد. در حالت دوم نمی‌توان رابطه ای بین تغییر مقیاس و دوران پیدا نمود. چرا که مولفه‌های تغییر مقیاس منفی می‌شوند.