ادامه حرکت در خط راست

شتاب: وقتی سرعت یک ذره تغییر می‌کند اصولاً ذره دارای شتاب شده است.

ذره در لحظه t_1 دارای سرعت v_1

" " t_2 " v_2

شتاب متوسط $a_{avg} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

شتاب لحظه‌ای $a = \frac{dv}{dt}$

شتاب لحظه‌ای مشتق سرعت نسبت به زمان است.

شتاب در هر نقطه برابر با شیب منحنی $v(t)$ در آن نقطه است

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

یکای شتاب $\frac{m}{s^2}$ است

شتاب هم یک کمیت برداری است (دارای بزرگی و جهت است)

در مثال آسانسور وقتی آسانسور شروع به حرکت می‌کند مشتق منفی $v(t)$ مثبت (شیب مثبت) است که نشان دهنده مثبت بودن $a(t)$ است. وقتی آسانسور کند می‌شود تا متوقف شود مشتق و شیب منفی $v(t)$ منفی است یعنی $a(t)$ منفی است.

نکته ۱:

معمولاً شتاب مثبت: تندی یک شیء در حال افزایش است

شتاب منفی: تندی یک شیء در حال کاهش است (شتاب کند کننده است)

ولی در این کتاب علامت شتاب جهت آن را نشان می‌دهد نه افزایش یا کاهش تندی شیء را

به عنوان مثال اگر اتومبیلی با سرعت آغازی $v = -25\ \frac{m}{s}$ ترمز کند و پس از $5\ s$ متوقف شود $\Leftarrow a_{avg} = \frac{0-(-25)}{5} = +5\ \frac{m}{s^2}$ (این شتاب مثبت است اما تندی اتومبیل کاهش یافته است. دلیلش اختلاف علامت‌های سرعت و شتاب است (شتاب در خلاف جهت سرعت است)

نکته ۲:

اگر علامت‌های سرعت و شتاب یک ذره یکسان باشند تندی ذره افزایش می‌یابد و اگر علامت‌ها مخالف باشند، تندی کاهش می‌یابد.

Scanned by CamScanner

مثال: مکان یک ذره در راستای محور x با معادله زیر مشخص می‌شود

$x = 4 - 27t + t^3$

که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است.

الف) تابع سرعت ذره ($v(t)$) و تابع شتاب ذره ($a(t)$) را بدست آورید.

ب) در چه زمانی $v = 0$ است؟

پ) حرکت ذره را به ازای $t \geq 0$ توصیف کنید.

الف) $v(t) = -27 + 3t^2 \Longrightarrow a = 6t$

ب) $v = 0 \quad 27 = 3t^2 \quad 9 = t^2 \quad \underline{t = \pm 3}$

یعنی $3s$ پیش و $3s$ پس از مبدا، زمان سرعت صفر است

پ) در لحظه $t = 0s$ ذره در مکان $4m$ با سرعت $v(0) = -27 \frac{m}{s}$ یعنی در جهت منفی محور x حرکت می‌کند

در این لحظه شتاب صفر است چون سرعت آن تغییر نمی‌کند

$t = 0$ ، $x = +4m$ ، $v = -27$ ، $a = 0$

برای $0 < t < 3s$ ذره هنوز هم سرعت منفی دارد و به حرکت در جهت منفی محور ادامه می‌دهد اما شتاب دیگر صفر نیست بلکه در حال افزایش و مثبت است (چون علامت‌های سرعت و شتاب مخالف یکدیگر ند) حرکت ذره باید در حال کند شدن باشد

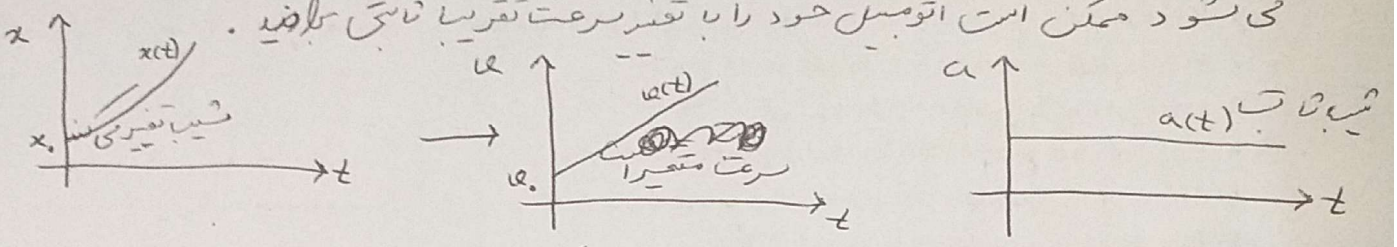
ذره در لحظه $t = 3s$ به حال سکون لحظه‌ای در می‌آید. درست پس از آن، ذره در سمت چپ مبدا در حال دور شدن است. با جاگذاری $t = 3s$ در معادله مربوط به $x(t)$ می‌بینیم که ذره در مکان $x = -50m$ قرار می‌گیرد و شتاب ذره باز هم مثبت است.

برای $t > 3s$ ، ذره به سمت راست محور x حرکت می‌کند. شتاب آن مثبت می‌ماند و بزرگی آن افزایش پیدا می‌کند. در این حالت سرعت مثبت و بزرگی آن نیز در حال افزایش است.

Scanned by CamScanner

شتاب ثابت :

در بعضی از حرکت‌ها شتاب ثابت می‌ماند برای مثال هنگامیکه چراغ راهنمایی قرمز سبز می‌شود ممکن است اتومبیل خود را با تغییر سرعت تقریباً ثابتی بیابید.



برای شتاب ثابت می‌توان معادلات زیر را در نظر گرفت :

وقتی شتاب ثابت است (شتاب لحظه‌ای و متوسط با هم برابرند)

$$a = a_{avg} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

v_0 سرعت ذره در لحظه $t = 0$

v " " t

$$v = v_0 + at \quad *$$

$$v_{avg} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

$$x = x_0 + v_{avg}\, t \quad **$$

x_0 مکان در لحظه $t = 0$

سرعت متوسط در آغاز بازه

$$v_{avg} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

سرعت متوسط در پایان بازه

با جاگذاری * در بالا داریم

$$v_{avg} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at) = v_0 + \frac{1}{2}at$$

با جاگذاری بالا در **

$$x = x_0 + \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)t$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

۲ معادله

$$\begin{cases} v = v_0 + at & \perp \\ x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 & \perp \end{cases}$$

می‌خواهیم یک فرمول مستقل از زمان به دست آوریم

$$\perp \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} \xrightarrow[\text{جاگذاری در } \perp]{} x - x_0 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x - x_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a}$$

$$2a(x - x_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2v_0 v$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

معادله مستقل از زمان / شتاب

اگر شتاب را از دو معادله ۱ و ۲ حذف می‌کردیم خواهیم داشت:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

و سرانجام با حذف v ⟸

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{v = v_0 + at} x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

۵ معادله مربوط به حرکت با شتاب ثابت

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \\ x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \\ x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

مثال: در حالی که با تندی $100\ \frac{km}{h}$ در جاده‌ای رانندگی می‌کنید با مشاهده پلیس ترمز می‌کنید و طی جابجایی $88\ m$ با شتاب ثابت تندی اتومبیل خود را به $80\ \frac{km}{h}$ کاهش می‌دهید.

الف) شتاب اتومبیل چقدر است؟

ب) مدت زمان کاهش دادن تندی چقدر است؟

الف) فرض می‌کنیم اتومبیل در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند

$$v_0 = 100\ \frac{km}{h} = 27{,}78\ \frac{m}{s}$$

اگر ترمز کردن شما در لحظه $t = 0$ و در مکان x_0 صورت بگیرد خواهیم داشت

$$v = 80\ \frac{km}{h} = 22{,}22\ \frac{m}{s}$$

$$x - x_0 = 88\ m$$

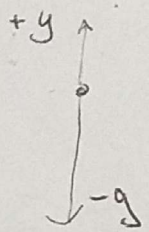
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(22{,}22)^2 - (27{,}78)^2\ \frac{m}{s}}{2\ (88\ m)} = -1{,}58\ \frac{m}{s^2}$$

ب)

$$v - v_0 = at \qquad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{22{,}22 - 27{,}78}{-1{,}58} = 3{,}52\ s$$

شتاب سقوط آزاد: اگر در جسم با جرم‌های مختلف را از ارتفاع‌های یک نی رها کنیم مثلاً یک سیب و یک پر را به طور همزمان از یک ارتفاع رها می‌کنیم خواهیم دید هر دو با آهنگ یک



g به سمت پایین شتاب می‌گیرند و تندی هر دو به یک اندازه افزایش می‌یابد

شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین $a = -g = -9{,}8\ \frac{m}{s^2}$ و بزرگی آن $g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$ است. (شتاب سقوط آزاد همیشه رو به پایین و منفی است و در حین سقوط سرعت هم منفی است و بزرگش افزایش می‌یابد)

Scanned by CamScanner

فصل دوم

مثال: شناگری از ارتفاع ۴۸ متری سطح آب سقوط می کند. فرض می کنیم سرعت آغازی او صفر است و از تأثیر هوا در حین سقوط چشم پوشی می کنیم. مطلوبست

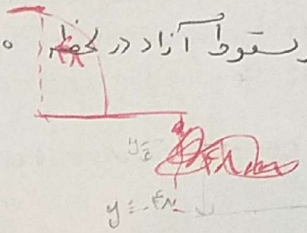
الف) شناگر چه مدت تا رسیدن به سطح آب در حال سقوط بوده است؟

ب) شناگر توانست زمان سه ثانیه را برای زمان سقوط اندازه بگیرد، اما نتوانست ببیند در هر ثانیه چه مسافتی را می پیماید. مکان او را پس از گذشت هر ثانیه کامل مشخص کنید.

پ) شناگر در لحظه برخورد به سطح آب چقدر بوده است؟

الف) سقوط در راستای محور y است و در نقطه $y=0$ آغاز شده و جهت مثبت محور به سمت بالا است پس $a=-g$ (شتاب در راستای محور y است) و سطح آب در نقطه $y=-48m$ قرار دارد

اگر سقوط آزاد در لحظه $t=0$ آغاز شده و سرعت آغازی $v_0=0$ باشد



$$y-y_0=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

$$-48m-0=-\frac{1}{2}(9.8)t^2+0t \Longrightarrow t=3.1s$$

جواب ۳٫۱- قابل قبول نیست چون شناگر پس از آغاز کردن به سقوط در لحظه $t=0$ به سطح آب می رسد

ب)

$t=1s$, $t=2s$, $t=3s$

$$y-y_0=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

$$y-y_0=-\frac{1}{2}(9.8)(1)^2+0t \quad \xrightarrow{t=1s} y=-4.9$$

$t=2s$ $\quad y-0=-4.9(2)^2+0 \qquad y=-4.9\times4=-19.6$

$t=3s$ $\quad y-0=-4.9(3)^2+0 \qquad y=-4.9\times9=-44.1$

پ)

$$v^2-v_0^2=-2g(y-y_0) \qquad v^2-0=-2\times9.8(-48)$$

$$v^2=940.8 \qquad v\simeq-31\ \frac{m}{s}$$

جواب مثبت غیر قابل قبول است

چون سرعت در جهت منفی محور y است

ت) سرعت شناگر در پایان هر ثانیه چقدر است؟ آیا شناگر این سرعت در حال افزایش را حس می کند؟

$t=1s$ $\quad v=v_0-gt \quad \underline{t=1s} \quad v=0-9.8(1)=-9.8\ \frac{m}{s}$

$t=2s$ $\quad t=2s \quad v=0-9.8(2)=-19.6$

$t=3s$ $\quad t=3s \quad v=0-9.8(3)=-29.4$

شناگر در ابتدا از افزایش سرعت خبر داشت و از این سقوط جان سالم به در برد اما به خاطر این عمل بی باکانه با جریمه سنگین قانونی مواجه شد

Scanned by CamScanner

مثال: یک بازیکن بیسبال گویی را با تندی آغازی $12\frac{m}{s}$ در راستای محور y به بالا پرتاب می‌کند

الف) گوی پس از چه مدت به بالاترین ارتفاع مسیر خود (نقطه اوج) می‌رسد

ب) بالاترین ارتفاع گوی نسبت به محل آغازی پرتاب کدام است؟

پ) چه مدت طول می‌کشد تا گوی پس از جدا شدن از دست بازیکن به ارتفاع ۵ متری برسد؟

الف) در بالاترین ارتفاع مسیر خود (نقطه اوج) سرعت ذره صفر است

$v_0 = 12\frac{m}{s}$

$v = v_0 - gt \qquad 0 = 12 - 9.8(t) \qquad t = 1.2\,s$

ب) در نقطه رها شدن گوی فرض می‌کنیم $y_0 = 0$

$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \qquad 0 - (12)^2 = -2 \times 9.8 \times y$

$y = \frac{(12)^2}{2 \times 9.8} = 7.3\,m$

پ) $y - y_0 = 5\,m \qquad y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

$5\,m = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + 12t \qquad 4.9t^2 - 12t + 5\,m = 0$

$t = 1.9\,s$
$t = 0.53\,s$

توپ از ارتفاع 5m دو بار عبور می‌کند یک بار در حین بالا رفتن و یک بار هم در حین پایین آمدن

مثال ۲-۵ ★★ :

در لحظه ای که نوک منقار دارکوب به تنه درخت می خورد، سرعت آن $7.49 \frac{m}{s}$ است.

منقار دارکوب پس از نفوذ $1.87\ mm$ در تنه درخت از حرکت باز می ایستد. با فرض ثابت بودن شتاب، اندازه این شتاب را برحسب g بدست آورید.

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

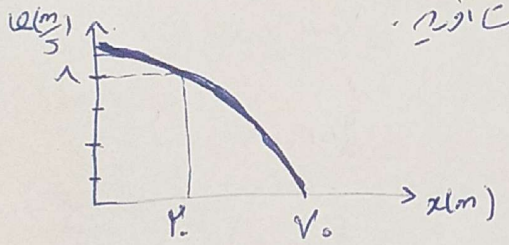
$$0 = (7.49)^2 + 2a(1.87\times10^{-3}\ m)$$

$$\boxed{a = -1.5\times10^{4}\ \frac{m}{s^2}}$$

اندازه این شتاب $1.5\times10^{4}\ \frac{m}{s^2}$ است

$$\frac{1.5\times10^{4}}{g} = \frac{1.5\times10^{4}}{9.8} = 1.53\times10^{3}\ g$$

مثال ۲-۶ : شکل زیر سرعت هایک ذره را برحسب موقعیت مکانی x آن نشان می دهد. شتاب حرکت ذره ثابت است. سرعت ذره را در مکان $x=0$ بدست آورید.



در بازه $(20, 70)$

$$\begin{cases} x_0 = 20 & v_0 = 8 \\ x = 70 & v = 0 \end{cases}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \qquad 0 - (8)^2 = 2a(50) \qquad a = \frac{-64}{100} = -0.64\ \frac{m}{s^2}$$

$x_0 = 0 \quad v_0 = ?$

$x = 20 \quad v = 8$

$$(8)^2 - v_0^2 = 2(-0.64)\,20$$

$$v_0^2 = 64 + 40\times0.64 = 89.6 \Longrightarrow v_0 \simeq 9.5\ \frac{m}{s}$$

Scanned by CamScanner