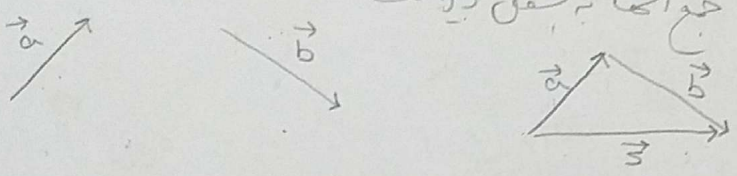
بردارها فصل دوم

بردار دارای بزرگی و جهت است و کمیت برداری کمیتی است که هم بزرگی و هم جهت دارد و می‌توان آنها با یک بردار نمایش داد. همانطور که قبلاً دیدیم کمیتهای فیزیکی از جمله جابجایی، سرعت و شتاب کمیتهای برداری‌اند.

کمیتهای چون دما، فشار، انرژی، جرم و زمان کمیتهای نرده‌ای هستند

جمع کردن بردارها به روش هندسی:

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت مقابل باشند جمع آنها به شکل زیر است



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

بردار $\vec{s}$ مجموع برداری بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است

خواص جمع برداری:

ترتیب جمع کردن بردارها اهمیتی ندارد (جمع کردن $\vec{a}$ با $\vec{b}$ همان نتیجه جمع $\vec{b}$ با $\vec{a}$ را می‌دهد)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

قانون جابجایی:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

قانون شرکت‌پذیری:

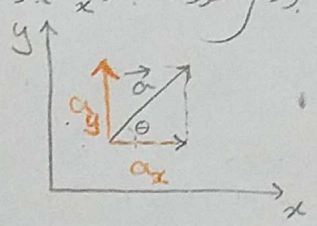
بردار $-\vec{b}$ برداری است که همان بزرگی بردار $\vec{b}$ را دارد اما جهتش مخالف است

$$\vec{b}+(-\vec{b}) = 0$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$$

مؤلفه‌های بردارها:

مؤلفه یک بردار، تصویر بردار بر روی یک محور است. مثلاً تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی محور x با (a_x) و



تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی محور y با (a_y) نشان داده می‌شود

تعیین مؤلفه‌های یک بردار تجزیه کردن بردار می‌نامند.

مؤلفه یک بردار همان جهت بردار را دارد.

مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$:

$$\begin{cases} a_x = a\cos\theta \\ a_y = a\sin\theta \end{cases}$$

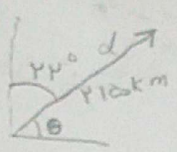
θ زاویه بردار $\vec{a}$ نسبت به محور x مثبت

a بزرگی بردار $\vec{a}$ است

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Scanned by CamScanner

مثال: هواپیمای کوچکی در یک روز ابری مسافت ۲۱۵ km را در جهت ۲۲ درجه شرق محور سمتی می‌پیماید. هواپیما از نقطه آغاز حرکتش چه مسافتی را به سمت شمال و چه مسافتی را به سمت شرق پیموده است؟

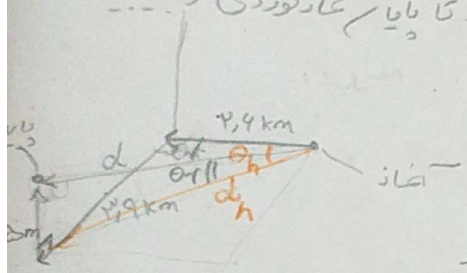


$$d_x = d\cos\theta = 215\cos(90-22) = 215\cos 68 = 81\ km$$

$$d_y = d\sin\theta = 215\sin 68 = 199\ km$$

مقصد هواپیما در فاصله ۸۱ کیلومتری شرق و ۱۹۹ کیلومتری شمال فرودگاه واقع است

مثال: گروهی از غار نوردان مسافت ۲٫۶ km را به سمت مغرب، مسافت ۳٫۹ km را به سمت جنوب و مسافت ۲۵m را به طرف بالا طی کرده‌اند. بردار جابجایی گروه از آغاز تا پایان غارنوردی را بیابید.



$$d_h = \sqrt{(2.6)^2+(3.9)^2} = 4.69\ km$$

$$\tan\theta_h = \frac{3.9\ km}{2.6\ km}, \quad \theta_h = \tan^{-1}\frac{3.9}{2.6} = 56^\circ$$

$$d = \sqrt{d_h^2+(0.025)^2} = \sqrt{(4.69)^2+(0.025)^2} = 4.7\ km$$

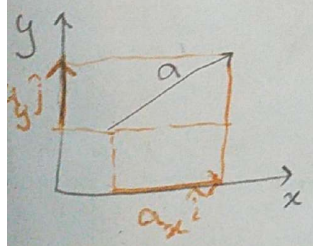
$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{0.025}{4.7} = 0.3$$

محور z بر صفحه xy عمود است پس بر هر خطی که از این صفحه می‌گذرد (d_h) نیز عمود است پس بردار ۲۵m بر خط d_h عمود است پس d_h و وتر مثلث و d و ۲۵m ضلع‌های آن هستند

بردارهای یکه:

بردار یکه، برداری است که بزرگی آن دقیقاً ۱ و دارای جهت خاصی است. این بردار یکه واحد بعد ندارد.

بردارهای یکه در جهت‌های مثبت محورهای x و y و z را با $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نمایش می‌دهند



$a_x\hat{i}$ و $a_y\hat{j}$ بردارند و مولفه‌های برداری $\vec{a}$ نامیده می‌شوند

$$a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

جمع بردارها با استفاده از مولفه‌ها:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad \begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \\ r_z = a_z + b_z \end{cases}$$

$$d = a - b \quad \begin{cases} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \\ d_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

مثال: مولفه x بردار $\vec{a}$ برابر -۲۵^m و مولفه y آن برابر $۴۰m$ است. الف) اندازه $\vec{a}$ چقدر است؟

ب) زاویه بین جهت $\vec{a}$ و جهت مثبت x چقدر است؟

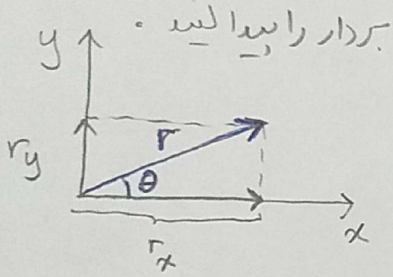
$a_x = -۲۵\ m$

$a_y = ۴۰\ m$

$$a = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} = \sqrt{(۴۰)^۲ + (۲۵)^۲}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{۴۰}{۲۵}\right)$$

مثال: در شکل زیر بردار جابجایی $\vec{r}$ را به طول $۱۵m$ در صفحه xy و در جهت با زاویه $\theta = ۳۰^\circ$ در نظر بگیرید. الف) مولفه x و ب) مولفه y این بردار را پیدا کنید.



$$r_x = r\cos\theta = ۱۵ \times \cos ۳۰ = ۱۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$r_y = r\sin\theta = ۱۵ \times \sin ۳۰ = ۱۵ \times \frac{۱}{۲} = ۷,۵$$

مثال: $\vec{a_1} = ۳\hat{i} + ۴\hat{k}$ و $\vec{a_2} = -۵\hat{i} + ۷\hat{j}$، مطلوبست $\vec{s} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$ و $\vec{d} = \vec{a_1} - \vec{a_2}$؟

$$\vec{s} = (۳\hat{i} + ۴\hat{k}) + (-۵\hat{i} + ۷\hat{j})$$

$$\vec{s} = -۲\hat{i} + ۷\hat{j} + ۴\hat{k}$$

$$\vec{d} = (۳\hat{i} + ۴\hat{k}) - (-۵\hat{i} + ۷\hat{j}) = ۸\hat{i} - ۷\hat{j} + ۴\hat{k}$$

Scanned by CamScanner

ضرب بردارها :

ضرب یک بردار در یک عدد :

اگر بردار $\vec{a}$ را در یک عدد s ضرب کنیم بردار جدیدی بدست می آید. بزرگی این بردار برابر با حاصلضرب بزرگی بردار $\vec{a}$ در قدرمطلق s است. اگر s مثبت باشد جهت این بردار هم جهت با بردار $\vec{a}$ و اگر s منفی باشد در خلاف جهت بردار $\vec{a}$ است.

ضرب یک بردار در یک بردار

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$ ضرب نرده‌ای (حاصل عدد است)

if $\theta = 0 \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} =$ بیشینه

if $\theta = 90 \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} =$ صفر

$\vec{a}\times\vec{b} = |a||b|\sin\theta$ ضرب برداری (حاصل بردار است)

$\theta = 0 \quad \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$\theta = 90 \quad \vec{a}\times\vec{b} =$ بیشینه

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

مثال: زاویه θ میان بردارهای $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ و $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$ چقدر است؟

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underbrace{|a|}_{\text{اندازه بردار } a}\ \underbrace{|b|}_{\text{اندازه بردار } b}\cos\theta$

$|a| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|b| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3.61$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6 + 0 + 0 = -6 \xrightarrow{\text{جاگذاری در بالا}} -6 = 5\times 3.61\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-6}{5\times 3.61}$

Scanned by CamScanner

ضرب برداری:

$$\vec{a}\times\vec{b} = |a|\,|b|\,\sin\theta$$

if $\theta = 0$
if $\theta = \pi$ $\xrightarrow{\sin\theta = 0}$ $\vec{a}\times\vec{b} = 0$

if $\theta = 90$ $\xrightarrow{\sin 90 = 1}$ $\vec{a}\times\vec{b} =$ بیشینه

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

مثال: اگر داشته باشیم $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ و $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$، حاصلضرب برداری $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا کنید.

$$\vec{c} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{i}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12) - \hat{j}(9) + \hat{k}(-8)$$

$$\vec{c} = -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}$$

Scanned by CamScanner

مثال: زاویه بین دو بردار زیر را بدست آورید.

$\vec{a} = ۳\hat{i} + ۳\hat{j} + ۳\hat{k}$

$\vec{b} = ۲\hat{i} + \hat{j} + ۳\hat{k}$

$|a| = \sqrt{۹+۹+۹} = \sqrt{۲۷}$

$|b| = \sqrt{(۲)^۲+(۱)^۲+(۳)^۲} = \sqrt{۴+۱+۹} = \sqrt{۱۴}$

$\vec{a}.\vec{b} = ۳\times۲ + ۳\times۱ + ۳\times۳ = ۶+۳+۹ = ۱۸$

$\vec{a}.\vec{b} = |a|\ |b| \cos\theta$

$۱۸ = \sqrt{۲۷}\ \sqrt{۱۴}\ \cos\theta \qquad \cos\theta = \dfrac{۱۸}{\sqrt{۲۷}\ \sqrt{۱۴}} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{۱۸}{\sqrt{۲۷}\ \sqrt{۱۴}}\right)$

Scanned by CamScanner