ادامهٔ مبحث حاصلضرب برداری (نقطه‌ای)

اگر دو بردار بر حسب مؤلفه‌ها داده شده باشند، حاصلضرب نقطه‌ای آنها به این صورت است :

$$\begin{cases}\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\\ \vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\end{cases}\Longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

مثال : حاصلضرب نقطه‌ای بردارهای روبرو را به دست آورید.

$$\vec{C}_1=-4\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$$
$$\vec{C}_2=6\hat{j}+\hat{k}$$
$$\Rightarrow \vec{C}_1\cdot\vec{C}_2=(-4\times 0)+(5\times 6)+(3\times 1)=33$$

مثال : زاویهٔ بین بردارهای $\vec{A}=6\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ و $\vec{B}=\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ را تعیین کنید.

پاسخ :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\alpha$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(6\times 1)+(1\times -3)+(-1\times 2)=1$$

$$A=\sqrt{6^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{38}$$

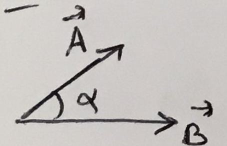
$$B=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

$$1=\sqrt{38}\times\sqrt{14}\times\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{38}\times\sqrt{14}}$$

ضرب برداری (خارجی)

از ضرب خارجی دو بردار، بردار جدیدی به دست می‌آید که اندازهٔ بردار حاصلضرب $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ به این صورت تعریف می‌شود :



$$C=AB\sin\alpha$$

جهت بردار $\vec{C}$ (برداری که از حاصلضرب $\vec{A}\times\vec{B}$ به دست می‌آید) نیز توسط قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود :

ابتدا دست راست را طوری در جهت بردار اول (در اینجا بردار $\vec{A}$) قرار می‌دهیم که کف دست (یا جهت خم شدن چهار انگشت) به سمت بردار دوم (در اینجا بردار $\vec{B}$) باشد. در این صورت انگشت شست نشان‌دهندهٔ جهت $\vec{C}$ خواهد بود.

* بردار $\vec{C}$ که از حاصلضرب $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ ساخته می‌شود، برداریست که هم بر $\vec{A}$ و هم بر $\vec{B}$ عمود است.

با توجه به نکات گفته شده جهت بردار $\vec{C}$ برای بردارهای $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، برداری درونسو است که به این شکل نشان داده می شود. $\vec{C}$ $\otimes$

[$\otimes$ نماد برداریست که بر صفحه عمود و جهت آن به سمت داخل صفحه می باشد. $\odot$ نماد برداریست که بر صفحه عمود و به سمت خارج صفحه می باشد (برونسو)]

* ضرب برداری برخلاف ضرب نقطه ای خاصیت جابه جایی ندارد $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$. [در واقع $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$ می باشد]

* چون $\sin 0^\circ = 0$ می باشد، حاصلضرب خارجی (برداری) دو بردار موازی و هم جهت صفر می باشد.

اگر بردارها برحسب مؤلفه ها داده شده باشند، حاصلضرب خارجی آنها به این صورت تعریف می شود:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{k}$$

چون به خاطر سپردن این رابطه کمی سخت است، می توان از روشهای حل دترمینان که به عهده دانشجو می باشد.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$ استفاده کرد

تمرین: نشان دهید که قانون توزیع پذیری هم در مورد ضرب نرده ای و هم در مورد ضرب برداری صادق است.

یعنی:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

مثال : برای بردارهای زیر، $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ را حساب کنید.

$$\vec{A} = ۹\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$
$$\vec{B} = ۲\hat{i} + ۲\hat{k}$$
$$\vec{C} = ۴\hat{i} + \hat{j} + ۲\hat{k}$$

پاسخ :

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۸\hat{j} + ۲\hat{k} - (۴\hat{j} + ۲\hat{i}) = -۲\hat{i} + ۴\hat{j} + ۲\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (۹\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})\cdot(-۲\hat{i} + ۴\hat{j} + ۲\hat{k}) = (۶\times -۲) + (-۱\times ۴) + (-۱\times ۲)$$
$$= -۱۲ - ۴ - ۲ = -۱۸$$